

Die Raumzeit-Algebra im Abitur

Martin Erik Horn*

*Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt, Institut für Didaktik der Physik
Max-von-Laue-Str. 1, D – 60438 Frankfurt/Main
Email: m.horn@physik.uni-frankfurt.de

Kurzfassung

Im Rahmen einer Unterrichtsreihe zur Speziellen Relativitätstheorie, die in einem Physik-Leistungskurs an einer Berliner Gesamtschule erprobt wurde, wurde in Anlehnung an David Hestenes die Algebra der Dirac-Matrizen (Raumzeit-Algebra) zur mathematischen Beschreibung speziell-relativistischer Effekte herangezogen. Dies gestattet eine geometrisch einsichtige und mathematisch übersichtliche Darstellung von Effekten wie der Zeitdilatation, der Längenkontraktion und der Lorentz-Transformation.

Da in Berlin in der Physik-Abiturprüfung kein Zentralabitur vorgesehen ist, konnte eine schriftliche Prüfungsaufgabe zur Speziellen Relativitätstheorie im Kontext der Raumzeit-Algebra gestellt werden. Anhand dieser Abituraufgabe wird die Raumzeit-Algebra vorgestellt und didaktisch hinterfragt. Die Prüfungsergebnisse belegen, dass ein erfolgreicher Unterricht zur Raumzeit-Algebra möglich ist.

Inhaltsübersicht

1. Mathematische Vorgeschichte der Relativität
2. Graßmanns Ideen in der Schule
3. Anforderungen an die Abiturprüfung
4. Geometrische Algebra und Raumzeit-Algebra
5. Aufgabenstellungen und Musterlösungen zur Relativität
 - 5.1 Raumzeit-Intervall (Teilaufgabe 2.1)
 - 5.2 Orthogonalität räumlicher und zeitlicher Achsen; Lorentz-Transformation (Teilaufgabe 2.2)
 - 5.3 Zwillingsparadoxon (Teilaufgabe 2.3)
6. Zusammenfassung der Ergebnisse
7. Literatur
8. Anhang: Abiturprüfungsaufgaben

1. Mathematische Vorgeschichte der Relativität

Die Relativitätstheorie verknüpft zwei zutiefst unterschiedliche Erfahrungskategorien, die der räumlichen Ausdehnung zum einen und die des zeitlichen Voranschreitens zum anderen, zu einem einheitlichen, physikalisch konsistenten und mathematisch fundierten Gedankengebäude. Sie verknüpft dabei auch die zwei Wissenschaften Physik und Mathematik.

Felix Klein beschreibt diese Entwicklungsgeschichte in einem historischen Rückblick: „Die fruchtbarste Ausdeutung aber hat die Vorstellung speziell des 4-dimensionalen Raumes in der Mechanik gefunden, indem man den drei Raumkoordinaten x , y , z als vierte ‚Dimension‘ die in jeder Relation der Mechanik auftretende Variable t , die Zeit hinzufügte. (...)

Mit Lagrange beginnt denn auch die historische Entwicklung der Lehre vom mehrdimensionalen Raume. (...) Die erste zusammenhängende Darstellung aber findet die Theorie als eine selbständige mathematische Disziplin 1844 in einem höchst eigenartigen Werke, ... in der Ausdehnungslehre des Stettiner Gymnasiallehrers Graßmann“ [14, S. 171].

Dieses Werk, die Formulierung der Ausdehnungslehre durch Hermann Günther Graßmann [4], stellt einen einschneidenden Schritt in der Entwicklung der modernen Mathematik dar: „there occurred another annus mirabilis, 1844, the birthyear of the Ausdehnungslehre, one of the supreme landmarks in the history of the human mind,“ schreibt Sarton anlässlich der hundertjährigen Wiederkehr dieses ‚Wunderjahres‘ [17], das damit in eine Reihe mit den Jahren 1666 (Newton), 1744 (Euler) und 1905 (Einstein) gesetzt wird.

Doch die mit dieser Leistung verbundenen Chancen wurden nur teilweise ergriffen. Zwar geht die moderne Form der Vektor- und Tensorrechnung direkt auf Graßmann zurück, doch Graßmanns Vision [7] einer umfassenden Vereinheitlichung geometrisch-algebraischer Zusammenhänge wurde von Graßmanns Zeitgenossen und den darauffolgenden Physiker- und Mathematikergenerationen nicht aufgegriffen. „However, in the end (Graßmann and Hamilton) both failed“, schließt Sarton [17, S. 328].

Ein Grund für diesen relativen Misserfolg ist die wissenschaftliche Isolation, in der Graßmann lebte und arbeitete, und die von ihm genutzte, recht unkonventionelle Schreibung seiner mathematischen

Ansätze, die den meisten seiner Kollegen nicht zugänglich war und sie schlichtweg überforderte.

Doch diese beiden Hindernisse sind mittlerweile entfallen. Zum einen übersetzen, überarbeiteten und transformierten zahlreiche Wissenschaftler, allen voran Graßmanns Zeitgenossen Charles Sanders Peirce und William Kingdon Clifford, Graßmanns Ansätze in verständlichere und didaktisch tragfähigere Darstellungen. Zum anderen werden Clifford-Algebren heute im Forschungskontext stark genutzt.

Die Bemerkung Parra Serrass, dass die „Basic Clifford algebra has attained such a degree of completeness that can be claimed it can be explained to the first person you meet in the street« [16, S. 820], ist heutzutage voll und ganz gerechtfertigt. Wenn wir nun in der Lage sind, jeder beliebigen Person, die wir zufällig auf der Straße treffen, die mathematischen Zugänge Graßmanns zu erklären, dann werden wir diese Zugänge auch im Bereich des Physikunterrichts zur Fassung der Speziellen Relativitätstheorie nutzen können.

2. Graßmanns Ideen in der Schule

Ein entscheidender Schritt bei der didaktischen Rekonstruktion von Graßmanns Ideen stellt die Um- und Neuformulierung seiner nicht-kommutativen Ansätze durch David Hestenes vor über 40 Jahren dar [6], [22]. Die von ihm formulierte Geometrische Algebra wird seitdem in zahlreichen Anwendungsgebieten aufgegriffen und findet sich in didaktisch gut ausformulierten Einführungen (siehe z.B. [2], [15]) und wird insbesondere auch zur einfachen mathematischen Beschreibung der Speziellen Relativitätstheorie (siehe z.B. [9], [3]) herangezogen.

Auf Grundlage der Hestenes'schen Formulierung (siehe auch [8], [9], [5]) wurde deshalb vom Autor eine Unterrichtsreihe zur Speziellen Relativitätstheorie entwickelt und an einer Berliner Gesamtschule in einem Leistungskurs Physik erprobt. Beschreibungen dieser Unterrichtsreihe und der damit verbundenen didaktischen Überlegungen finden sich beispielsweise in [11], [12]. Die überarbeiteten Unterrichtsmaterialien sind in [13] veröffentlicht.

Der Themenbereich der Relativitätstheorie ist im Berliner Rahmenlehrplan Physik der Kursphase der Sekundarstufe II [21, S. 25] durch die beiden möglichen Wahlthemen „Relativistische Kinematik“ und „Relativistische Dynamik“ eingebunden. Die inhaltliche Ausgestaltung dieser Themenbereiche ist nicht weiter geregelt. Es wird jedoch explizit die Möglichkeit eröffnet, einen eigenen Vorschlag zu realisieren, so dass gegebenenfalls eine didaktisch begründete Teilauswahl aus den Bereichen von relativistischer Kinematik und Dynamik im Unterricht und damit in der Folge in der Abiturprüfung verwirklicht werden kann.

Dies mag auch unterrichtspraktisch sinnvoll sein, da die schulische Erfahrung zeigt, dass aus Zeitgründen nicht alle Inhalte, die in den vormals geltenden Ber-

liner Curricularen Vorgaben [19, S. 43/44] aufgeführt sind, behandelt werden können. Die Relativität war damals auf drei Wahlpflicht-Themenbereiche aufgeteilt, so dass früher deutlich mehr Zeit zur Verfügung stand.

Die erprobte Unterrichtsreihe zur Speziellen Relativität umfasst insgesamt 25 Schulstunden und wurde direkt nach Beginn des Schuljahres 2008/2009 unterrichtet. Inhaltlich beginnt sie mit einer Erörterung der vorrelativistischen Physik, deren räumliche Struktur im Rahmen der Geometrischen Algebra [10] diskutiert wird. Mit Hilfe der geometrisierten Zeit wird sodann das Raumzeit-Intervall eingeführt und die Algebra der Dirac-Vektoren problematisiert. Dies führt im folgenden auf die Zeitdilatation, die Längenkontraktion, das Zwillingsparadoxon und abschließend die Lorentz-Transformation – Themengebiete, die allesamt im Kontext der Raumzeit-Algebra erarbeitet werden.

Bei diesem Unterrichtsgang zur Speziellen Relativitätstheorie handelt es sich um eine erste Erprobung. Es sollte und konnte gezeigt werden, dass ein Unterricht zur Physik auf Basis der Geometrischen Algebra und Raumzeit-Algebra möglich ist [12].

Eine direkte Evaluation des Unterrichts, etwa um zu ermitteln, ob dieser Unterrichtsgang bessere, gleichwertige oder letztendlich schlechtere Schülerleistungen zur Folge hat als ein konventioneller Unterrichtsgang zur Speziellen Relativität, war nicht vorgesehen. Dennoch bietet sich die Chance, einige Indizien für die Wirkung dieses Unterrichtsgangs zu erheben, da eine von drei Physik-Prüfungsaufgaben im Rahmen des schriftlichen Abiturs 2009 zur Speziellen Relativitätstheorie im Kontext der Raumzeit-Algebra gestellt werden konnten. Diese Indizien sollen hier vorgestellt und erörtert werden.

3. Anforderungen an die Abiturprüfung

Im Bundesland Berlin werden die schriftlichen Abiturprüfungen in den Fächern Deutsch, Mathematik und allen Fremdsprachen in zentraler Form durchgeführt. Im Fach Physik findet dagegen kein Zentralabitur statt. Hier reicht die unerrichtende Lehrkraft zwei Aufgabenvorschläge mit je zwei oder drei Aufgaben bei der Schulaufsichtsbehörde ein [20, Anlage 3 b – Physik, Chemie, Biologie].

Der zuständige Physik-Abiturberater entscheidet dann, ob die Aufgabenstellungen den inhaltlichen Vorgaben an eine ordnungsgemäße Abiturprüfung genügen. Er entscheidet auch, welcher der beiden eingereichten Aufgabenvorschläge durch die Abiturienten zu bearbeiten sind.

Bezüglich der inhaltlichen Anforderungen an die Abiturprüfungsaufgaben heißt es in den Berliner Ausführungsvorschriften über schulische Prüfungen (AV Prüfungen) [20] lapidar: „Die Anforderungen an die in den Prüfungen gestellten Aufgaben müssen den Rahmenlehrplänen und den von der Kultusministerkonferenz der Länder vereinbarten Bildungs-

standards für den jeweiligen Schulabschluss sowie bei der Abiturprüfung den Einheitlichen Prüfungsanforderungen (EPA) (...) entsprechen“ [20, S. 4]. In den fachspezifischen Anlagen zum mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Aufgabenfeld im Anhang wird dies lediglich ergänzt durch die Vorgaben: „In Physik sind die grundlegenden fachlichen Inhalte gemäß der EPA Physik mit mindestens 50 % in jeder Prüfungsaufgabe zu berücksichtigen. Die Aufgaben müssen sich auf mindestens zwei der vier Sachgebiete Felder, Wellen, Quanten und Materie beziehen“ [20, S. 108].

In den Einheitlichen Prüfungsanforderungen [18] ist unter Abschnitt 1.3 festgelegt, dass die verbindlichen grundlegenden Inhalte auf der Basis der Bestimmungen der Länder in der Abiturprüfung durch andere Sachgebiete ergänzt werden können. In der dann gegebenen Auflistung wird die Relativitätstheorie als ein solches ergänzendes Sachgebiet aufgeführt.

Darüber hinaus wird in den Einheitlichen Prüfungsanforderungen deutlich auf die Unterscheidung zwischen Grundkurs- und Leistungskursprüfungen abgehoben: „Die Anforderungen im Grundkursfach bzw. im Leistungsfach sollen sich nicht nur quantitativ, sondern vor allem qualitativ unterscheiden. Die Unterschiede bei den Prüfungen bestehen insbesondere in folgenden Aspekten:

- Umfang und Spezialisierungsgrad bezüglich des Fachwissens, des Experimentierens und der Theoriebildung,
- Grad der Elementarisierung und Mathematisierung physikalischer Sachverhalte und im Anspruch an die verwendete Fachsprache,
- Komplexität der Kontexte sowie der physikalischen Sachverhalte, Theorien und Modelle.“

Weiter wird angemerkt: „Leistungskurse zielen zusätzlich auf eine systematische Auseinandersetzung mit Inhalten, Theorien und Modellen, welche die Komplexität und den Aspektreichtum des Faches verdeutlichen“ [18, Abschnitt 1.4.1].

Eine Abituraufgabe, die die Spezielle Relativitätstheorie unter Rückgriff auf die Dirac-Algebra prüft, erfüllt diese Vorgaben in besonderem Maße. Eine solche Aufgabe spiegelt die im Unterricht erfolgte systematische Auseinandersetzung mit den Inhalten und Phänomenen der Speziellen Relativitätstheorie wieder. Sie bietet durch die algebraische Darstellungsebene der Dirac-Algebra eine geeignete Theorie und durch die geometrische Anschaulichkeit der der Dirac-Algebra zugrunde liegenden Objekte (mathematisch und physikalisch interpretierbare Längen, Flächen, Volumina) ein geeignetes Modell, das die Komplexität und den Aspektreichtum der relativistischen Physik verdeutlicht.

Der von den Einheitlichen Prüfungsanforderungen im Sinne der Kultusministerkonferenz gebotene qua-

litative Unterschied zur Grundkursphysik ist gegeben durch

- den höheren Umfang und Spezialisierungsgrad bezüglich des Fachwissens zur vierdimensionalen Struktur unserer Welt und der Theoriebildung zur Beschreibung dieser Welt,
- den höheren Grad der Elementarisierung, die strukturell-analytisch tiefer geht, und der grundlegenden Mathematisierung, bei der nicht-kommutative Sachverhalte in Raum und Raumzeit und damit in mehreren Dimensionen aufgegriffen werden,
- den Anspruch, die neu im Unterricht eingeführte Fachsprache sowohl zur Relativitätstheorie wie auch zur Raumzeit-Algebra zu nutzen,
- die Komplexität des Zusammenspiels von physikalischen Kontexten in Raum und Raumzeit unter Bezug auf speziell-relativistische Sachverhalte mit der Theorie- und Modellbildung in Form der Geometrischen Algebra im dreidimensionalen Fall und in Form der Raumzeit-Algebra im vierdimensionalen Fall.

Auf Grundlage dieser Analyse wurde Aufgabe 2 des hier im Anhang beigefügten Aufgabenvorschlags, der vom Physik-Abiturberater für die schriftliche Prüfung ausgewählt wurde, entwickelt.

4. Geometrische Algebra und Raumzeit-Algebra

Seit Élie Cartan und damit seit nunmehr fast 80 Jahren wissen wir, dass Pauli-Matrizen die Basisvektoren unseres dreidimensionalen Raums, in dem wir vor Einstein lebten, darstellen [1]. Die Basisvektoren der vierdimensionalen Raumzeit werden durch die Dirac-Matrizen [2] gegeben.

Im schulischen Kontext können diese als Pauli-Vektoren bzw. Dirac-Vektoren bezeichnet werden, so dass die Begriffsbildung bei den Lernenden auf eine Unterscheidung zwischen den üblichen Vektoren der dreidimensionalen Vektoralgebra, die mit einem überstrichenen Pfeil

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \{1\}$$

gekennzeichnet sind, den dreidimensionalen Pauli-Vektoren des klassischen Raumes, die durch eine Unterstreichung

$$\underline{r} = x \underline{\sigma}_x + y \underline{\sigma}_y + z \underline{\sigma}_z \quad \{2\}$$

gekennzeichnet sind und den vierdimensionalen Dirac-Vektoren der Raumzeit, die doppelt unterstrichen

$$\underline{\underline{r}} = ct \underline{\underline{\gamma}}_t + x \underline{\underline{\gamma}}_x + y \underline{\underline{\gamma}}_y + z \underline{\underline{\gamma}}_z \quad \{3\}$$

werden. Das mathematische Verhalten dieser Basisgrößen lässt sich in einem einzigen Satz komprimieren: „The only rule to remember is that different

orthogonal generating units (vectors) anticommute and that their square is $+1, -1$ (or 0).“ [16]. Physikalisch wird dies durch die unterschiedliche Qualität von zeitlichen und räumlichen Größen motiviert.

Zeitlicher Basisvektor:

$$\gamma_t^2 = 1 \quad \{4\}$$

Räumliche Basisvektoren:

$$\gamma_x^2 = \gamma_y^2 = \gamma_z^2 = -1 \quad \{5\}$$

Deshalb kann das Raumzeit-Intervall wie üblich als

$$\begin{aligned} \underline{s}^2 &= (ct \gamma_t + x \gamma_x + y \gamma_y + z \gamma_z)^2 \\ &= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned} \quad \{6\}$$

dargestellt werden. Tatsächlich neu ist hier für die Lernenden lediglich der Umgang mit anti-kommutativen Größen, da flächenartigen und volumenartigen Größen eine Umlaufrichtung zugeordnet wird und so bei Richtungskehr ein Vorzeichenwechsel erfolgt. Die negative Quadrierung von räumlichen Basisvektoren sichert dabei die korrekte Signatur des Raumzeit-Intervalls von Formel {6}.

Die anhand der Abituraufgaben gegebenen Beispiellösungen beleuchten diesen Umstand in den folgenden Abschnitten.

5. Aufgabenstellungen und Musterlösungen zur Relativität

Im Anhang dieses Beitrages ist die Aufgabenstellung zur Aufgabe 2 aus dem Bereich der relativistischen Kinematik angefügt. Diese Aufgabe ist in den Kontext einer Weltraum-Forschungsstation eingebettet, in welchem die Forscher Dr. Wolf, Dr. Gang, Dr. Pau und Dr. Li arbeiten. Diese Forschungsstation sei mitten im Weltall so weit von benachbarten Sternen entfernt, dass zur Aufgabenbearbeitung nur Effekte der Speziellen Relativitätstheorie berücksichtigt werden sollen.

Durch die Aufgabe wird das Verständnis der Relativitätstheorie in Bezug auf die Raumzeit-Algebra auf drei Ebenen abgeprüft. Zum einen wird eine Teilaufgabe gestellt, die gänzlich **ohne Bezug zur Raumzeit-Algebra** formuliert und ohne Rückgriff auf die Raumzeit-Algebra lösbar ist (Teilaufgabe 2.3 zum Zwillingenparadoxon). Eine zweite Teilaufgabe erfordert ein **passives Verständnis der Raumzeit-Algebra**, könnte jedoch ohne Rückgriff auf die Raumzeit-Algebra gelöst werden (Teilaufgabe 2.2 zur Orthogonalität und zur Lorentz-Transformation). Eine weitere Teilaufgabe erfordert ein **aktives Verständnis der Raumzeit-Algebra** (Teilaufgabe 2.1 zum Raumzeit-Intervall), da sie durch die Prüflinge nur mit Hilfe der Raumzeit-Algebra gelöst werden kann.

Die Aufgaben werden entsprechend der Ausführungsvorschrift über schulische Prüfungen klassifiziert. Die Anforderungsbereiche sind dabei folgendermaßen definiert [20, S. 3 – 4]:

a) **Anforderungsbereich I** umfasst die Wiedergabe von Sachverhalten (z. B. Daten, Fakten, Regeln, Formeln, Aussagen) aus einem begrenzten Gebiet sowie die Beschreibung und Anwendung gelernter und geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen jeweils in einem begrenzten Gebiet und in einem wiederholenden Zusammenhang.

(4) b) **Anforderungsbereich II** umfasst das selbstständige Auswählen, Anordnen, Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang sowie das selbstständige Übertragen des Gelernten auf vergleichbare neue Situationen, wobei es entweder um veränderte Fragestellungen oder um veränderte Sachzusammenhänge oder um abgewandelte Verfahrensweisen gehen kann.

c) **Anforderungsbereich III** umfasst planmäßiges Verarbeiten komplexer Gegebenheiten mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Begründungen, Wertungen zu gelangen. Dabei werden aus den gelernten Methoden oder Lösungsverfahren die zur Bewältigung der Aufgaben geeigneten selbstständig ausgewählt oder einer neuen Problemstellung angepasst.

5.1 Raumzeit-Intervall (Teilaufgabe 2.1)

Die Aufgabenstellung 2.1 verknüpft graphische und algebraische Anforderungen und prüft anhand eines einfachen Minkowski-Diagramms ab, ob Basiswissen zum Verständnis der Beziehung zwischen graphischer und algebraischer Darstellungen vorhanden sind. Die geforderten Leistungen entsprechen dem Anforderungsbereich I, während die ebenfalls geforderte Berechnung des Raumzeit-Abstandes aufgrund der zu berücksichtigenden Vorzeichensignatur räumlicher und zeitlicher Größen in den Anforderungsbereich II einzuordnen ist.

Geben Sie an, wie groß der Raumzeit-Abstand zweier beliebiger Punkte auf der Weltlinie von Licht ist.

Überprüfen Sie Ihre Aussage an einem selbstgewählten Beispiel:

- Tragen Sie in beiliegenden ersten Aufgabenblatt zwei beliebige Punkte auf der Weltlinie von Licht ein.
- Geben Sie die Dirac-Vektoren dieser beiden Punkte an.
- Ermitteln Sie den Raumzeit-Abstand dieser beiden Punkte.

Abb.1: Aufgabenstellung 2.1.

In der vorgestellten Beispiellösung (siehe Abb. 2) wählt der Schüler die auf der Weltlinie von Licht liegenden Raumzeit-Punkte A und B. Die Dirac-Vektoren werden korrekt angegeben und der Raum-

zeit-Abstand korrekt unter Nutzung des relativistischen Pythagoras berechnet.

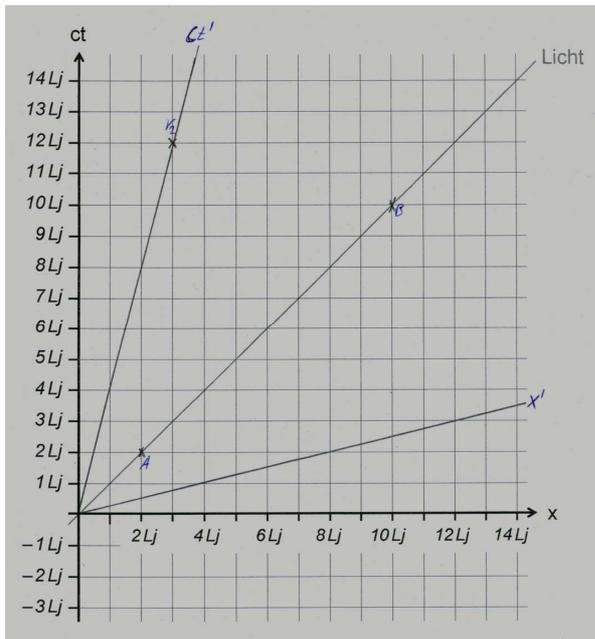


Abb.2: Zeichnerische Bearbeitung der Aufgabenteile 2.1 sowie 2.2b und 2.2c.

Im Unterricht wurde die ausführliche Umformung bei der Abstandsberechnung dieser hier von allen Schülern gewählten knapperen Darstellung für zeitartige Raumzeit-Abstände gegenüber gestellt. Für lichtartige Dirac-Vektoren erfolgte die Behandlung im Unterricht nicht, so dass auch dieser Umstand die Zuordnung in den Anforderungsbereich II rechtfertigt.

Der Vergleich der Schülerlösung mit der kleinschrittigen ausführlichen Alternativlösung (siehe Formeln {7} bis {10}) zeigt, dass die grundlegenden Umformungen durch den Schüler erkannt und folgerichtig durchgeführt wurden.

Mit den von diesem Schüler gewählten Raumzeit-Punkten \underline{r}_A und \underline{r}_B ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta \underline{r} &= \sqrt{(\underline{r}_B - \underline{r}_A)^2} \\ &= \sqrt{(10Lj \gamma_t + 10Lj \gamma_x - (2Lj \gamma_t + 2Lj \gamma_x))^2} \\ &= \sqrt{(10Lj \gamma_t - 2Lj \gamma_t + 10Lj \gamma_x - 2Lj \gamma_x)^2} \\ &= \sqrt{(8Lj \gamma_t + 8Lj \gamma_x)^2} \end{aligned} \quad \{7\}$$

Eine Vertauschung bei der Differenzenbildung hat keinen Einfluss auf das Ergebnis, da durch die Quadrierung ein negatives Vorzeichen entfällt.

$$\begin{aligned} \Delta \underline{r} &= \sqrt{(8Lj \gamma_t)^2 + 8Lj \gamma_t 8Lj \gamma_x + 8Lj \gamma_x 8Lj \gamma_t + (8Lj \gamma_x)^2} \\ &= \sqrt{64Lj^2 \gamma_t^2 + 64Lj^2 \gamma_t \gamma_x + 64Lj^2 \gamma_x \gamma_t + 64Lj^2 \gamma_x^2} \end{aligned} \quad \{8\}$$

Entscheidend ist hier die Berücksichtigung der Multiplikationsreihenfolge, denn eine Vertauschung der

Dirac-Basisvektoren γ_t und γ_x induziert eine Vorzeichenumkehr:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{r} &= \sqrt{64Lj^2 \gamma_t^2 + 64Lj^2 \gamma_t \gamma_x - 64Lj^2 \gamma_t \gamma_x + 64Lj^2 \gamma_x^2} \\ &= \sqrt{64Lj^2 \gamma_t^2 + 64Lj^2 \gamma_x^2} \end{aligned} \quad \{9\}$$

Die mittleren beiden Mischterme kompensieren sich deshalb gegenseitig und entfallen. Im folgenden Schritt werden die Quadrate der Dirac-Basisvektoren entsprechend der Formeln {4} und {5} ausgewertet:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{r} &= \sqrt{64Lj^2 \gamma_t^2 + 64Lj^2 \gamma_x^2} \\ &= \sqrt{64Lj^2 \cdot 1 + 64Lj^2 \cdot (-1)} \end{aligned} \quad \{10\}$$

Dies führt auf das auch in der Schülerlösung formulierte Ergebnis von:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{r} &= \sqrt{64Lj^2 - 64Lj^2} \\ &= 0Lj \end{aligned} \quad \{11\}$$

Die Unsicherheiten bei der Einheitenzuordnung (fehlendes Quadrat der Längeneinheit Lichtjahre: Lj^2 in der vorletzten Zeile von Abb. 3) ist zwar typisch für die Vorgehensweise zahlreicher Schülerinnen und Schüler, die Einheitenzuordnung in den Zwischenschritten zu überspringen und erst nach der Zahlenrechnung vermeintlich passende Einheiten anzufügen, mindert jedoch die fachliche Richtigkeit des Lösungsweges nicht.

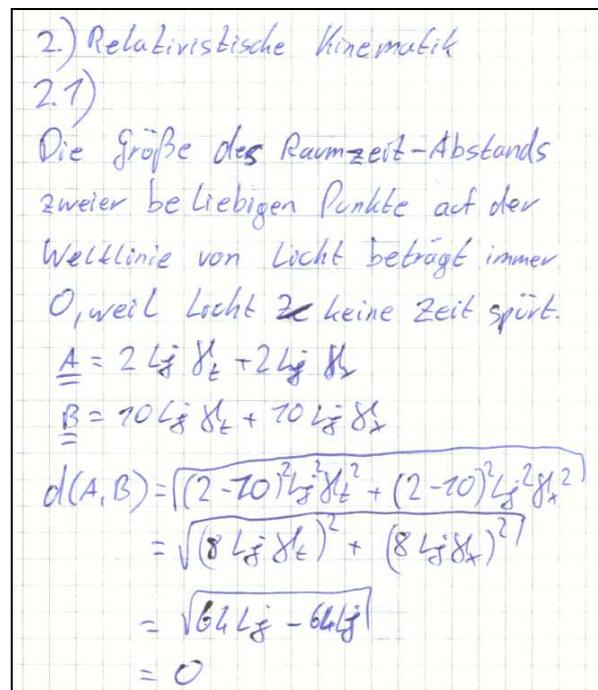
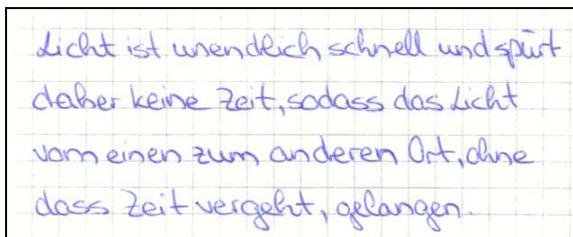


Abb.3: Beispiellösung der Aufgabe 2.1

Ein Schüler verknüpft die Aufgabenlösung allerdings mit dem Fehlkonzept, dass Licht unendlich schnell sei, und deshalb von einem Ort zum anderen gelange ohne dass Zeit vergehe (siehe Abb. 4). Dieser Schüler trennt nicht zwischen der Beobachtung eines Lichtsignals durch einen außenstehenden Be-

obachter und der uns nur gedanklich zugänglichen Weltansicht eines Lichtsignals: Nicht in unserem Inertialsystem ist die Zeitdauer Null, sondern im System einer lichtschnell bewegten Uhr.



Licht ist unendlich schnell und spürt daher keine Zeit, sodass das Licht vom einen zum anderen Ort, ohne dass Zeit vergeht, gelangen.

Abb.4: Konzeptuell problematische Begründung eines lichtartigen Raumzeit-Abstandes von Null durch einen Schüler.

5.2 Orthogonalität räumlicher und zeitlicher Achsen; Lorentz-Transformation (Teilaufgabe 2.2)

Die Aufgabenstellung 2.2 hebt zum einen auf die Koordinatenachsenstellung in raumzeitlichen Diagrammen (Minkowski-Diagrammen) ab. Hierbei tritt ein deutlicher Bruch zwischen graphischer Darstel-

Dr. Pau führt eine längere wissenschaftliche Expedition durch. Dr. Wolf beobachtet ihn dabei. Dr. Pau startet seine Rakete im Ursprung des Inertialsystems von Dr. Wolf. Die Beschleunigungsphase ist dabei so kurz, dass sie vernachlässigt werden kann, da die Rakete von Dr. Pau innerhalb kürzester Zeit ihre konstante Endgeschwindigkeit erreicht.

Einige Zeit später befindet sich die Rakete von Dr. Pau im Inertialsystem von Dr. Wolf an der Position

$$\underline{r}_2 = 12 \text{ Lj } \gamma_t + 3 \text{ Lj } \gamma_x$$

a Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich die Rakete von Dr. Pau im Inertialsystem von Dr. Wolf fortbewegt.

b Das im ersten Aufgabenblatt eingezeichnete Koordinatensystem stellt das Inertialsystem von Dr. Wolf dar. Tragen Sie die zeitliche Koordinatenachse ct' des Inertialsystems von Dr. Pau in dieses Aufgabenblatt ein.

c Tragen Sie die räumliche Koordinatenachse x' des Inertialsystems von Dr. Pau in das Aufgabenblatt ein.

d Im Koordinatensystem von Dr. Pau findet eine Supernova-Explosion an der Position

$$\underline{r}_3' = 10 \text{ Lj } \gamma_t' + 5 \text{ Lj } \gamma_x'$$

statt. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Explosion im Inertialsystem von Dr. Wolf.

Abb.5: Aufgabenstellung 2.2.

lung und algebraischer Beschreibung auf, da die Orthogonalität zweier Dirac-Vektoren zwar algebraisch-rechnerisch tragfähig ermittelt werden kann, jedoch im Minkowski-Diagramm nicht mehr durch einen 90° -Winkel repräsentiert wird.

Ohne ein Verständnis dieses Sachverhaltes kann eine sachangemessene Behandlung der Lorentz-Transformation nicht erfolgen, so dass sich die letzte Teilfrage auf diesen Themenbereich bezieht.

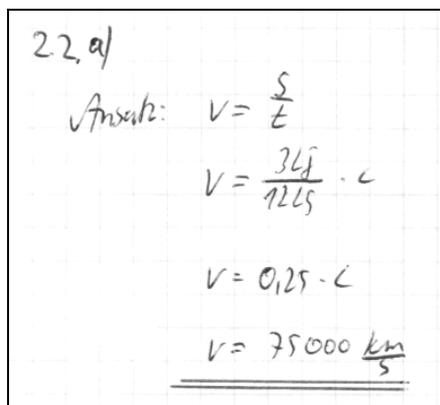
Während die Geschwindigkeitsberechnung und die zeichnerische Ermittlung der Zeitachse einen einfachen Sachverhalt darstellen, ist die zeichnerische Ermittlung der räumlichen Koordinatenachse aufgrund der ungewohnten Symmetriebeziehungen dem Anforderungsbereich II zuzuordnen. Ebenfalls Anteile an den höheren Anforderungsbereich II sind bei der Bearbeitung der Lorentztransformation enthalten.

Die Beispiellösung (siehe Abbildung 6) zeigt, dass der Schüler die Verknüpfung zwischen der Dirac-Darstellung und den Einzelkomponenten verstanden hat. Er interpretiert diese richtig und kann die Geschwindigkeit der Rakete infolgedessen sachangemessen ermitteln.

Es kann an dieser Stelle zwar der Einwand erhoben werden, dass die Abiturienten hier nur ein formelhaftes Reproduzieren verinnerlichter mathematischer Prozeduren ableisten. Diese sind jedoch über die weiteren Aufgabenstellungen mit physikalisch zu interpretierenden Sachverhalten verknüpft, so dass ohne ein Verständnis dieser mathematischen Strukturen ein erfolgreiches Arbeiten kaum möglich erscheint.

Dennoch muss an dieser Stelle auch zugegeben werden: Bei der Aufgabenentwicklung war sich der Autor durchgängig bewusst, dass es sich um ein für die Abiturprüfung so noch nie aufgearbeitetes Themenfeld handelt. Um die Schüler im Rahmen dieses neuartigen Ansatzes nicht zu benachteiligen, wurden Aufgaben aus dem Anforderungsbereich III gezielt nur in den Aufgaben 1 und 3 gestellt, bei denen schon aus vorangegangenen Abiturprüfungen entsprechende Vorerfahrungen vorlagen.

Ein sachangemessene Umgang zeigt sich auch durchgängig bei Bearbeitung der Aufgabe 2.2b. In



2.2.a)
 Ansatz: $v = \frac{s}{t}$
 $v = \frac{36 \text{ Lj}}{1225 \text{ s}} \cdot c$
 $v = 0,25 \cdot c$
 $v = 75000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Abb.6: Beispiellösung der Aufgabe 2.2a.

⑤ 2.2. Supernova-Explosion

$$I_3' = \frac{10 \text{Lj}}{ct'} y_{t'} + \frac{5 \text{Lj}}{x'} y_{x'}$$

ges: x ; t
 geg $x' = 5 \text{Lj}$
 $t' = \frac{10 \text{Lj}}{c} = 3,33 \cdot 10^{-05} \text{s}$

Ansatz

$$x = \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{5 \text{Lj} + (0,25 \cdot c \cdot \frac{10 \text{Lj}}{c})}{\sqrt{1 - \frac{0,25^2 \cdot c^2}{c^2}}}$$

$$x = 7,75 \text{Lj}$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{\frac{10 \text{Lj}}{c} + 5 \text{Lj} \cdot \frac{0,25 \cdot c}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{0,25^2 \cdot c^2}{c^2}}}$$

$$t = 0,0000387 \text{s}$$

$$ct = 11,62 \text{Lj}$$

$$I_3 = 11,62 \text{Lj } y_t + 7,75 \text{Lj } y_x$$

Abb.7: Beispiellösung der Aufgabe 2.2d.

Abbildung 2 hat der Schüler die Koordinaten des Punktes R_2 korrekt interpretiert, diesen Punkt korrekt eingezeichnet und die Zeitachse der Raketenbesatzung korrekt dargestellt.

Ähnlich erfolgreich verlief die Einzeichnung der räumlichen Koordinatenachse x' der Raketenbesatzung, die im Verhältnis zur Zeitachse an der Weltlinie von Licht gespiegelt erscheint.

Eine weitere Analyse der Aufgabenbearbeitung im Rahmen dieser Abiturprüfung zeigt deutlich, dass Verständnisprobleme und Schwierigkeiten im Umgang mit relativistischen Beziehungen nicht im Bereich des Formalismus der Raumzeit-Algebra liegen. Typische Fehler zeigen sich bei relativ einfachen Einheitenumformungen und der Bedeutung des Begriffs des Lichtjahres als eine Entfernungseinheit,

die über die geometrisierte Zeit ct auch als Maß für eine Zeitdauer herangezogen wird.

Während der Schüler die Lorentztransformation fehlerfrei berechnet und durch geschicktes Kürzen der Lichtgeschwindigkeit ein korrektes Resultat erzielt (siehe Abbildung 7), zeigt die Umrechnung von $10 \text{Lj}/c$ in eine Zeitdauer von $3,33 \cdot 10^{-5} \text{s}$ dass der Begriff des Lichtjahres noch nicht richtig durchdacht wurde.

Die Geometrisierung der Zeit stellt mithin eine der kognitiven Hürden beim Verständnis der Speziellen Relativitätstheorie dar. Auf die Art der mathematischen Modellbildung können diese Verständnisprobleme nicht zurückgeführt werden, sondern auf eine nicht erfolgte Routinenbildung im Bereich der Umrechnung relativistisch und eben auch schon nicht-relativistisch sinnvoller Einheiten.

Hier haben die Schüler offenkundig den Messprozess als eine Zuordnung physikalisch äquivalenter mengenartiger Größen nicht kognitiv vollständig durchdrungen. Ein ähnliches Problem tritt regelmäßig auch bei der schon im Mittelstufenbereich praktizierten Winkelmessung auf, die den Winkel einerseits durch die willkürliche Unterteilung in ein 360° -Maß beschreibt, andererseits den Winkel durch Ausmessen der Länge des überstrichen Kreisbogens eines Einheitskreises auf eine physiknähere Art der Messung zurückführt.

Als Konsequenz aus dieser auch immer wieder im Unterricht sichtbaren Tatsache wurde der Aufgabenbogen 10 der Unterrichtsmaterialien zur Speziellen

Dr. Gang und Dr. Li sind Zwillinge. Während Dr. Gang in der Raumstation zurückbleibt, nimmt Dr. Li an einer Expedition zu einem 7 Lichtjahre und 8 Lichtmonate entfernten Stern teil. Die Rakete von Dr. Li fliegt sowohl auf der Hinreise wie auch auf der Rückreise mit einer konstanten Geschwindigkeit von 96 % der Lichtgeschwindigkeit. (Beschleunigungsphasen sind zu vernachlässigen.)

Nachdem die Expeditionsmannschaft von Dr. Li den Stern erreicht hat, untersucht sie diesen zwei Jahre lang und kehrt dann zur Weltraumstation zurück.

a Zeichnen Sie den Reiseverlauf in das Inertialsystem von Dr. Gang auf dem zweiten Aufgabenblatt ein. Tragen Sie dort auch die Weltlinie des Sterns ein.

b Wie viel Zeit vergeht während dieser Expedition für den auf der Weltraumstation wartenden Dr. Gang?

c Wie viel Zeit vergeht während dieser Expedition für Dr. Li?

Abb.8: Aufgabenstellung 2.3.

Relativitätstheorie [13] ergänzt und überarbeitet, so dass bei einer zukünftigen Unterrichtsdurchführung dieser Aspekt ausführlicher behandelt werden kann und Entfernungswerte als Maße für Zeitdauern stärker kognitiv verankert werden.

5.3 Zwillingsparadoxon (Teilaufgabe 2.3)

Mit der Aufgabenstellung 2.3 soll eine typische Anwendungsaufgabe zur Speziellen Relativitätstheorie gelöst werden, die wiederum die Anforderungsbereiche I und II abdeckt. Das Zwillingsparadoxon ist ein eindrückliches Beispiel für ein physikalisches Phänomen, das unserer erfahrungsgeprägten Sichtweise auf die uns umgebende Welt widerspricht und damit sehr gut abtestet, ob die Schüler die Relativitätstheorie nicht nur strukturell-mathematisch, sondern auch physikalisch verstanden haben.

Bei der Aufgabenlösung ist zu beachten, dass eine sinnvolle Reihenfolge der Bearbeitungsstruktur gewählt wird. Die in Teilaufgabe 2.3a geforderte zeichnerische Darstellung des Reiseverlaufs kann erfolgreich erst nach teilweiser Berechnung der entsprechenden Raumzeit-Punkte der Ankunft am Stern und des Abflugs vom Stern bearbeitet werden.

Auch im Rahmen dieser Aufgabenbearbeitung zeigen sich bei einigen Abiturienten wieder Probleme mit dem Begriff des Lichtjahres, das in der Lösung von Abbildung 9 einer Zeit t und nicht der geometrisierten Zeit ct zugeordnet wird.

Darüber hinaus erfolgt die Bearbeitung dieser Aufgabe in ähnlicher Art und Weise wie bei Schülerinnen und Schülern, die die Spezielle Relativitätstheorie im Rahmen der konventionellen Darstellungsformen erlernt haben.

Die Tatsache, dass während der Untersuchung des Sterns die Besatzung relativ zur Weltraumstation ruht und deshalb keiner Zeitdilatation unterliegt, wurde zwar von einigen Schülern nicht berücksichtigt. Die Anwendung der hergeleiteten Formelbeziehungen erfolgt jedoch in gleicher Art und Weise wie dies in Lerngruppen ohne Einbindung der Raumzeit-Algebra beobachtet werden kann.

Die Abbildungen 11 und 12 belegen somit, dass die Prüflinge auch die konventionelle Mathematisierung der Speziellen Relativitätstheorie beherrschen.

$v = 0,96c$
 $t = \frac{s}{v}$
 $t = \frac{7,664j \cdot c}{0,96c}$
 $t = 7,996j$

Abb.9: Beispiellösung zu Aufgabe 2.3a.

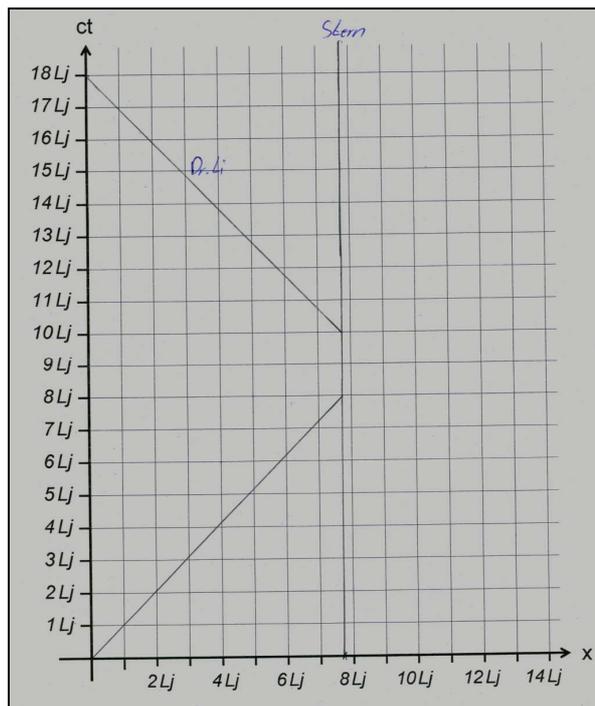


Abb.10: Zeichnerische Bearbeitung der Aufgabe 2.2a.

6. Zusammenfassung der Ergebnisse

Insgesamt kann geschlussfolgert werden, dass die Abiturienten hier einen ähnlich erfolgreichen Umgang mit den die Zeitdilatation, die Längenkontraktion und die Lorentztransformation betreffenden Phänomenen zeigen wie konventionell unterrichtete Schülerinnen und Schüler.

Ihre mathematische Herangehensweise wird durch die neuartige Form der Vektorrechnung unter Nutzung anti-kommutativer Beziehungen domänenspezifisch ergänzt. Vorhandenes früheres Wissen wird bezüglich des Umgangs mit konventionellen mathematischen Formelzusammenhängen nicht verschüttet, sondern konstruktiv mit neuen Ansätzen verbunden.

Der Umgang mit diesen neuen Ansätzen ist jedoch souverän, zielgerichtet und hinsichtlich der auftretenden Lernschwierigkeiten mindestens genauso tragfähig wie andere Mathematisierungen.

Hinflug 7,99 Jahre
 Umkehrung 2 Jahre
 Rückflug 7,99 Jahre
 17,98 Jahre
 Für Dr. Song vergeht 17,98 Jahre bis Dr. Li wieder da ist.

Abb.11: Beispiellösung zu Aufgabe 2.3b.

Die Schülerleistungen lassen sich auch hinsichtlich der erreichten Bewertungspunkte analysieren. Dies spiegelt den Leistungsstand dieser Lerngruppe zur Speziellen Relativitätstheorie wieder.

Aufgrund der kleinen Schülerpopulation ist jede statistische Verallgemeinerung unmöglich. Es können damit zwar nur Aussagen über diese spezielle Lerngruppe gemacht werden, doch die Ergebnisse, die in Tabelle 1 vorgestellt werden, sind ein deutliches Indiz dafür, dass gute bis sehr gute Lernerfolge erzielt wurden.

Teilaufgabe	maximal erreichbare Punktzahl	durchschnittlich erreichte Punktzahl
2.1	4	3,50
2.2 a	1	1,00
2.2 b	2	2,00
2.2 c	2	1,83
2.2 d	7	5,17
2.3 a	5	5,00
2.3 b	2	2,00
2.3 c	4	3,50
Summe	27	24,00

Tab.1: Überblick über die durchschnittlich erreichten Bewertungseinheiten.

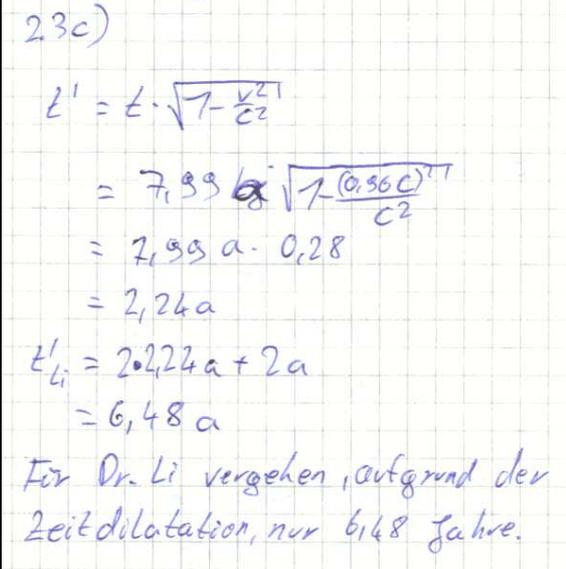
Durchschnittlich wurde mit 24 von 27 möglichen Bewertungseinheiten ein prozentualer Anteil von knapp 89 % erreicht. Das ist ein deutlich höherer Prozentsatz als bei den anderen abgeprüften Themenbereichen. Dies mag vielleicht am hohen motivationalen Stand von Schülern und Lehrer gelegen haben, gilt doch die Relativitätstheorie auch Hundert Jahre nach ihrer Formulierung durch Einstein immer noch als ein Highlight der Physik und stößt gerade bei Leistungskurschülern immer wieder auf ein extrem hohes Interesse und eine rege Neugier, was die relativistischen Effekte betrifft.

Andererseits schwingt hier auch die Hoffnung des Autors mit, dass die gewählte Mathematisierung und somit die Raumzeit-Algebra bzw. Dirac-Algebra einen Beitrag zu den erfreulichen Ergebnissen beigetragen haben.

Ist die Spezielle Relativitätstheorie für die Schüler auf Grundlage der Raumzeit-Algebra somit einfacher oder schwieriger zu verstehen als auf Grundlage anderer Mathematisierungen? Diese Frage muss weiterhin unbeantwortet bleiben. Die wenigen Daten lassen bisher einen Vergleich mit anderen Unterrichtsansätzen nicht zu.

Doch ein Ergebnis zeigt diese Auswertung deutlich: Es ist möglich, die Spezielle Relativitätstheorie auf Grundlage der Raumzeit-Algebra mit Schülern in sinnvoller Art und Weise ergebnisorientiert und verständlich zu erarbeiten. Die Dirac-Algebra ist in der Schule angekommen.

Und damit gilt auch: Die Vision von Graßmann kann – zumindest in der gymnasialen Oberstufe – im schulischen Rahmen verwirklicht werden.



2.3c)

$$t' = t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$= 7,99 a \cdot \sqrt{1 - \frac{(0,96c)^2}{c^2}}$$

$$= 7,99 a \cdot 0,28$$

$$= 2,24 a$$

$$t'_{Li} = 2 \cdot 2,24 a + 2 a$$

$$= 6,48 a$$

Für Dr. Li vergehen, aufgrund der Zeitdilatation, nur 6,48 Jahre.

Abb.12: Beispiellösung zu Aufgabe 2.3c.

7. Literatur

- [1] Cartan, Élie (1981): The Theory of Spinors, unveränderter Wiederabdruck der englischen Übersetzung, im Original erschienen 1937 unter dem Titel ‚Leçons sur la théorie des spineurs‘, Dover Publications, New York.
- [2] Doran, Chris; Lasenby, Anthony (2003): Geometric Algebra for Physicists, Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Girard, Patrick R. (2007): Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics, Birkhäuser Verlag, Basel.
- [4] Graßmann, Hermann Günther (1844): Die Wissenschaft der extensiven Größen oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin. Ersther Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend, Verlag Otto Wigand, Leipzig.
- [5] Gull, Stephan; Lasenby, Anthony; Doran, Chris (1993): Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime. In: Foundations of Physics, Vol. 23, No. 9, S. 1175 – 1196.
- [6] Hestenes, David (1966): Space-Time Algebra, Gordon & Breach Science Publishers, New York.
- [7] Hestenes, David (1996): Grassmann’s Vision. In: Gert Schubring (Hrsg.): Hermann Günther Graßmann (1809 – 1877): Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, S. 191 – 201.
- [8] Hestenes, David (2003): Reforming the Mathematical Language of Physics, Oersted Medal Lecture. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2 (2003), S. 104 – 121.

- [9] Hestenes, David (2003): Spacetime Physics with Geometric Algebra. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 7 (2003), S. 691 – 714.
- [10] Horn, Martin Erik (2006): Quaternionen und Geometrische Algebra. In: Volkhard Nordmeier, Arne Oberländer (Hrsg.): Didaktik der Physik, Beiträge zur Frühjahrstagung in Kassel, Tagungs-CD des Fachverbands Didaktik der Physik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Beitrag 28.2, LOB – Lehmanns Media, Berlin.
- [11] Horn, Martin Erik (2009): Vom Raum zur Raumzeit. In: Dietmar Höttecke (Hrsg.): Chemie- und Physikdidaktik für die Lehramtsausbildung, Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Schwäbisch Gmünd, Band 29, S. 455 – 457, LIT-Verlag Dr. W. Hopf Berlin.
- [12] Horn, Martin Erik (2009): Die Spezielle Relativitätstheorie im Kontext der Raumzeit-Algebra. In: Volkhard Nordmeier, Helmuth Grötzebauch (Hrsg.): Didaktik der Physik, Beiträge zur Frühjahrstagung in Bochum, Tagungs-CD des Fachverbands Didaktik der Physik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Beitrag 30.40, LOB – Lehmanns Media Berlin.
- [13] Horn, Martin Erik (2009): Arbeitsbögen zur Geometrischen Algebra und zur Raumzeit-Algebra, veröffentlicht als Anlage des Beitrags [12] in: Volkhard Nordmeier, Helmuth Grötzebauch (Hrsg.): Didaktik der Physik, Beiträge zur Frühjahrstagung in Bochum, Tagungs-CD des Fachverbands Didaktik der Physik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Beitrag 30.40, LOB – Lehmanns Media Berlin.
- [14] Klein, Felix (1979): Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teile 1 und 2, Reprint, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, veröffentlicht im Original als Band 24 der Serie „Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Verlag Julius Springer, Berlin 1926.
- [15] Macdonald, Alan (2010): A Survey of Geometric Algebra and Geometric Calculus, Luther College, Decorah, Iowa.
<http://faculty.luther.edu/~macdonal/GA&GC.pdf> (Stand: 26. Mai 2010).
- [16] Parra Serra, Josep Manel (2009): Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. In: Advances of Applied Clifford Algebras, 19 (2009), S. 819 – 834.
- [17] Sarton, George (1944): Grassmann – 1844. In: Isis, Vol. 35, No. 4, S. 326 – 330.
- [18] Sekretariat der Kultusministerkonferenz: Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Physik, Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 1. Dez. 1989 in der Fassung vom 5. Feb. 2004.
- [19] Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin (2005): Curriculare Vorgaben für die gymnasiale Oberstufe der Gymnasien, der Gesamtschulen mit gymnasialer Oberstufe, der Beruflichen Gymnasien, der Kollegs, der Abendgymnasien, Physik Berlin.
- [20] Senatsverwaltung für Schule, Berufsbildung und Sport Berlin (2006): Ausführungsvorschriften über schulische Prüfungen (AV Prüfungen) vom 12. Mai 2006.
- [21] Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin in Zusammenarbeit mit dem Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg und dem Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Mecklenburg-Vorpommern (2006): Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe Physik, Gymnasien, Gesamtschulen mit gymnasialer Oberstufe, Berufliche Gymnasien, Kollegs, Abendschulen, Oktoberdruck AG Berlin.
- [22] Sobczyk, Garret (1993): David Hestenes – The Early Years. In: Foundations of Physics, Vol. 23, No. 10, S. 1290 – 1293.

8. Anhang: Abiturprüfungsaufgaben

Auf den folgenden Seiten ist der Abituraufgabenvorschlag mit vollständiger Aufgabenstellung aller Aufgaben, den den Schülern zur Verfügung gestellten Arbeitsblättern und dem ausgearbeiteten Erwartungshorizont beigelegt. Die Aufgaben 1 und 3 wurden unter Rückgriff auf modifizierte Abiturprüfungsvorschläge der Albrecht-Dürer-Oberschule Berlin aus dem Jahr 2007, der Hanna-Arndt-Oberschule Berlin aus dem Jahr 2007 und des Bayerischen Zentralabiturs aus dem Jahr 2003 gestellt.

Im Erwartungshorizont wurden die Kompetenzbereiche gemäß den KMK-Beschlüssen wie folgt kategorisiert:

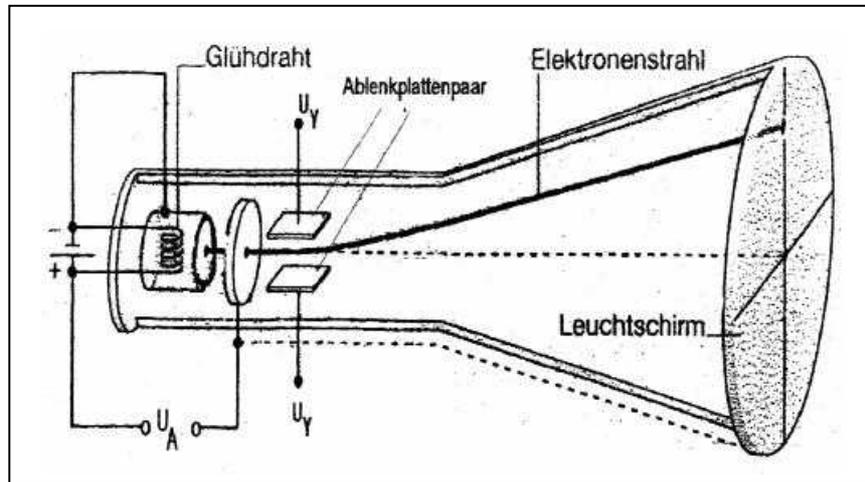
- **Fachkenntnisse (K 1):** Physikalisches Wissen erwerben, wiedergeben und nutzen.
- **Fachmethoden (K 2):** Erkenntnismethoden der Physik und Fachmethoden beschreiben und nutzen.
- **Kommunikation (K 3):** In Physik und über Physik kommunizieren.
- **Reflexion (K 4):** Über die Bezüge der Physik reflektieren.

Der Vorschlag wurde in der vorliegenden Form bei der Schulaufsichtsbehörde eingereicht und vom Abiturberater Physik zugelassen. Die Abiturprüfung fand im Frühjahr 2009 an der Otto-Hahn-Schule in Berlin-Neukölln statt.

Insgesamt betrug die Bearbeitungszeit 240 Minuten. Zugelassene Hilfsmittel waren ein nicht-programmierbarer Taschenrechner, ein mathematisch-naturwissenschaftliches Tafelwerk sowie Zeichen- und Schreibmaterialien.

Aufgabe 1: Bewegung von Ladungen im elektrischem Feld**43 BE**

Die Skizze zeigt eine Elektronenstrahlröhre (Braunsche Röhre) mit nur einem Ablenkplattenpaar. Für die nachfolgenden Betrachtungen soll die Annahme gelten, dass die Elektronen mit vernachlässigbarer Geschwindigkeit aus der Kathode austreten.



- 1.1 Erläutern Sie die Skizze und beschreiben Sie die Funktionsweise dieser Elektronenstrahlröhre. Gehen Sie dabei besonders auf die Erzeugung, Beschleunigung und Ablenkung der Elektronen ein.
- 1.2 Die Elektronen durchfliegen die Anodenöffnung mit der Geschwindigkeit $v_x = 2,35 \cdot 10^7$ m/s und treten sodann mit dieser Geschwindigkeit senkrecht in den Bereich zwischen die Ablenkplatten ein. Berechnen Sie den Wert der Anodenspannung U_A , der benötigt wurde, um die Elektronen auf diese Geschwindigkeit zu beschleunigen.
- 1.3 Der Elektronenstrahl wird durch Lochblenden gebündelt, deren Durchmesser in der Größenordnung von ungefähr 1 mm liegen. Erklären Sie, warum dabei keine störenden Beugungserscheinungen auftreten. (Argumentieren Sie ohne Rechnung.)
- 1.4 Legt man den Ursprung eines x-y-Koordinatensystems in den Eintrittspunkt des Elektronenstrahls in das Ablenkplattenpaar, so wird die Elektronenbahn im Bereich zwischen den Ablenkplatten durch die Gleichung

$$y = \frac{e \cdot U_y}{2 \cdot m_e \cdot d \cdot v_x^2} \cdot x^2 \quad (1)$$

beschrieben, wobei der Abstand d zwischen den Ablenkplatten dieser Braunschen Röhre $d = 5,4$ cm beträgt. Die Ablenkplatten haben eine Länge von $\ell = 8$ cm.

Berechnen Sie den Wert der Ablenkung y der Elektronen nach dem Durchfliegen des Ablenkplattenpaares, wenn an den Ablenkplatten eine Ablenkspannung von $U_y = 1200$ V anliegt.

- 1.5 Berechnen Sie Geschwindigkeit, mit der die Elektronen den Bereich des elektrischen Feldes zwischen den Ablenkplatten verlassen. (Nehmen Sie dabei näherungsweise an, dass das elektrische Feld direkt am Ende des Plattenpaares auf Null abfällt.)
- 1.6 Berechnen Sie den Abstand des Auftreffpunktes der Elektronen vom Mittelpunkt des Leuchtschirms, wenn das rechte Ende der Ablenkplatten 16 cm vom Leuchtschirm entfernt ist.
- 1.7 Leiten Sie die oben angegebene Gleichung (1) für die Bahnkurve der Elektronen im Raum zwischen den Ablenkplatten her.
- 1.8 Der Glühdraht wird nun in einer sonst identisch aufgebauten Röhre durch eine Ionenquelle ersetzt, die einfach negativ geladene Ionen der Masse m_{Ion} erzeugt. Zeigen Sie, dass die Bahnkurve und der Auftreffpunkt auf dem Schirm der Bahnkurve und dem Auftreffpunkt von Elektronen entspricht.

Aufgabe 2: Relativistische Kinematik**27 BE**

2. In einem Weltraum-Forschungsstation arbeiten die Forscher Dr. Wolf, Dr. Gang, Dr. Pau und Dr. Li. Die Forschungsstation wurde mitten im Weltall stationiert. Es sollen bei der Aufgabenbearbeitung deshalb nur Effekte der Speziellen Relativitätstheorie berücksichtigt werden.

2.1 Geben Sie an, wie groß der Raumzeit-Abstand zweier beliebiger Punkte auf der Weltlinie von Licht ist.

Überprüfen Sie Ihre Aussage an einem selbstgewählten Beispiel:

- Tragen Sie in beiliegenden ersten Aufgabenblatt zwei beliebige Punkte auf der Weltlinie von Licht ein.

- Geben Sie die Dirac-Vektoren dieser beiden Punkte an.

- Ermitteln Sie den Raumzeit-Abstand dieser beiden Punkte.

2.2 Dr. Pau führt eine längere wissenschaftliche Expedition durch. Dr. Wolf beobachtet ihn dabei. Dr. Pau startet seine Rakete im Ursprung des Inertialsystems von Dr. Wolf. Die Beschleunigungsphase ist dabei so kurz, dass sie vernachlässigt werden kann, da die Rakete von Dr. Pau innerhalb kürzester Zeit ihre konstante Endgeschwindigkeit erreicht. Einige Zeit später befindet sich die Rakete von Dr. Pau im Inertialsystem von Dr. Wolf an der Position

$$\underline{x}_2 = 12 \text{ Lj } \gamma_i + 3 \text{ Lj } \gamma_k$$

2.2a Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich die Rakete von Dr. Pau im Inertialsystem von Dr. Wolf fortbewegt.

2.2b Das im ersten Aufgabenblatt eingezeichnete Koordinatensystem stellt das Inertialsystem von Dr. Wolf dar. Tragen Sie die zeitliche Koordinatenachse ct' des Inertialsystems von Dr. Pau in dieses Aufgabenblatt ein.

2.2c Tragen Sie die räumliche Koordinatenachse x' des Inertialsystems von Dr. Pau in das Aufgabenblatt ein.

2.2d Im Koordinatensystem von Dr. Pau findet eine Supernova-Explosion an der Position

$$\underline{x}_3' = 10 \text{ Lj } \gamma_i' + 5 \text{ Lj } \gamma_k'$$

statt. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Explosion im Inertialsystem von Dr. Wolf.

2.3 Dr. Gang und Dr. Li sind Zwillinge. Während Dr. Gang in der Raumstation zurückbleibt, nimmt Dr. Li an einer Expedition zu einem 7 Lichtjahre und 8 Lichtmonate entfernten Stern teil. Die Rakete von Dr. Li fliegt sowohl auf der Hinreise wie auch auf der Rückreise mit einer konstanten Geschwindigkeit von 96 % der Lichtgeschwindigkeit. (Beschleunigungsphasen sind zu vernachlässigen.) Nachdem die Expeditionsmannschaft von Dr. Li den Stern erreicht hat, untersucht sie diesen zwei Jahre lang und kehrt dann zur Weltraumstation zurück.

2.3a Zeichnen Sie den Reiseverlauf in das Inertialsystem von Dr. Gang auf dem zweiten Aufgabenblatt ein. Tragen Sie dort auch die Weltlinie des Sterns ein.

2.3b Wie viel Zeit vergeht während dieser Expedition für den auf der Weltraumstation wartenden Dr. Gang?

2.3c Wie viel Zeit vergeht während dieser Expedition für Dr. Li?

Aufgabe 3: Siebkette (Serienresonanzkreis)**30 BE**

3. Ein ohmscher Widerstand R , eine ideale Spule der Induktivität L und ein idealer Kondensator der Kapazität C werden in Reihe an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen, die eine Wechselspannung der Form

$$U(t) = U_{\max} \cdot \sin(\omega t)$$

liefert.

- 3.1 Zeichnen Sie das entsprechende Schaltbild.
 3.2 Zeigen Sie anhand eines geeigneten Zeigerdiagramms, dass für den Scheinwiderstand Z und den Phasenwinkel φ der Schaltung gilt:

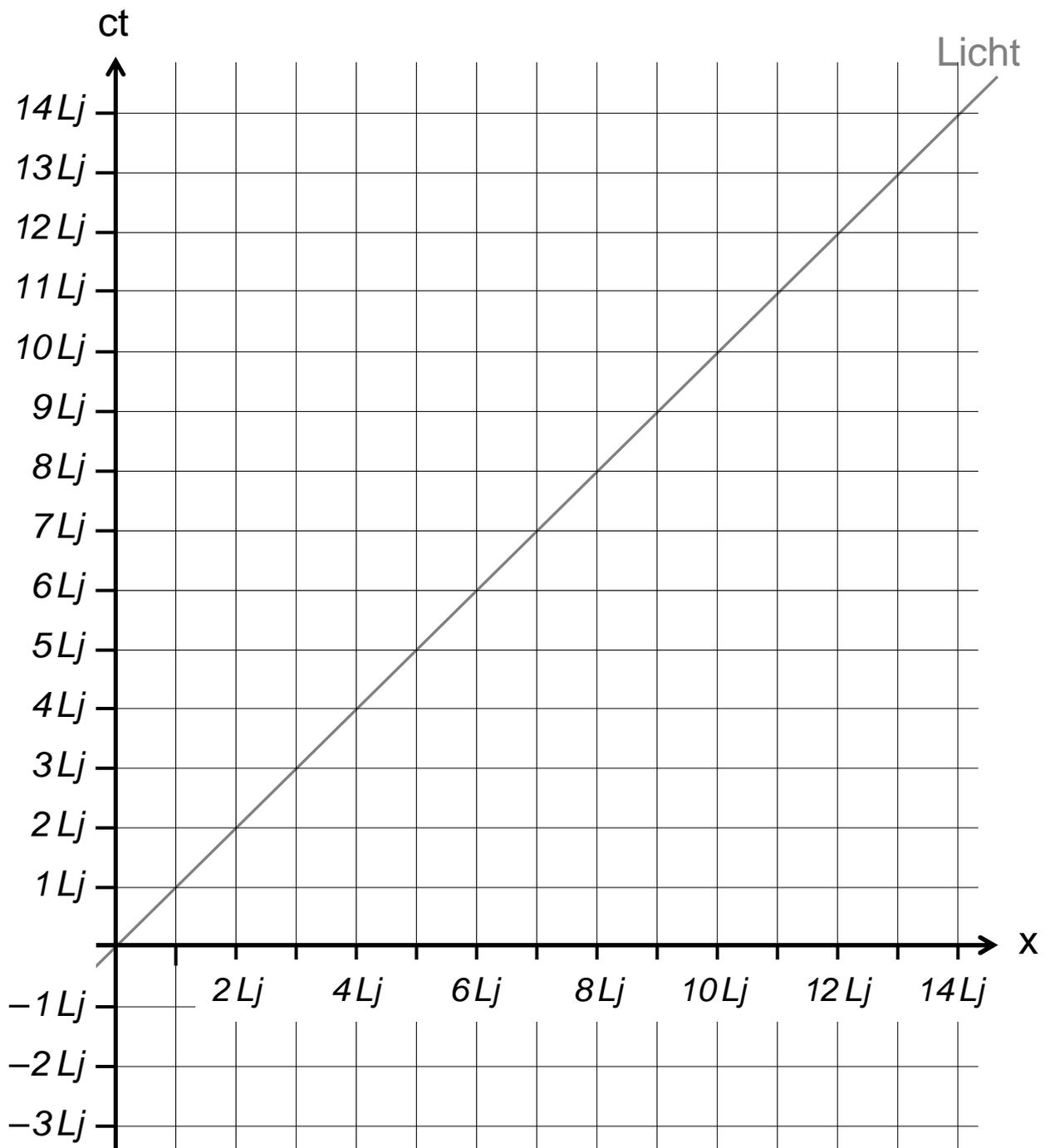
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \quad (2)$$

und

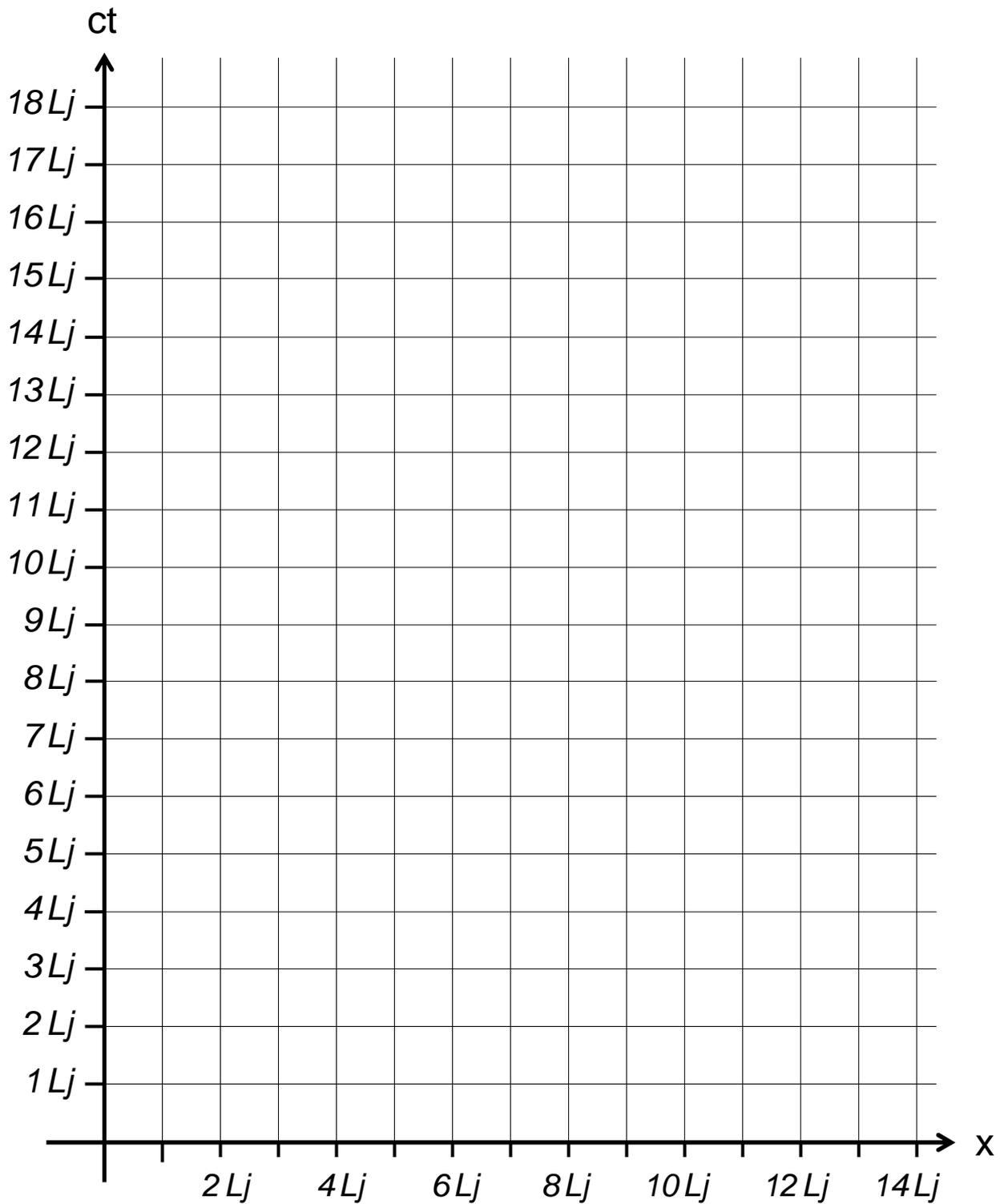
$$\tan \varphi = \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R} \quad (3)$$

Erläutern und begründen Sie Ihre Überlegungen ausführlich.

- 3.3 Nun sei der Scheitelwert U_{\max} der angelegten Spannung konstant, die Frequenz f der Spannung jedoch variabel. Stellen Sie in einem Diagramm qualitativ dar, wie der Scheinwiderstand Z der Siebkette und die Scheitelstromstärke I_{\max} von der Frequenz f abhängen. Begründen Sie den Kurvenverlauf jeweils ausführlich ohne Rechnung. (Hinweis. Tragen Sie dabei die Frequenz f bitte jeweils auf der Horizontalen Ihres Diagramms ab.)
- 3.4 Welchen Einfluss hat die Größe des ohmschen Widerstands auf den Verlauf der Kurve von I_{\max} in Teilaufgabe 3.3? Warum ist die Dimensionierung des ohmschen Widerstands in einer realen Schaltung also wichtig?
- 3.5 Wie muss die Induktivität L der Spule gewählt werden, damit der Blindwiderstand Z der Siebkette bei der Frequenz $f_0 = 110 \text{ Hz}$ minimal ist, wenn für den ohmschen Widerstand $R = 100 \Omega$ und für die Kapazität $C = 0,775 \mu\text{F}$ gilt?
- 3.6 Bei welchem Phasenwinkel weist die effektive Stromstärke I_{eff} den Maximalwert auf? Bei welchem Phasenwinkel sinkt die effektive Stromstärke auf die Hälfte dieses Maximalwerts?

Erstes Arbeitsblatt (zu den Aufgabenteilen 2.1 und 2.2):

Zweites Arbeitsblatt (zu Aufgabenteil 2.3):



Erwartungshorizont Aufgabe 1

Teil-aufg.	Erwartete Teilleistung	Didaktischer Zusammenhang mit dem vorausgegangenen Unterricht	Komp. be-reich	BE im AB		
				I	II	III
1.1	Erläuterung der Funktionsweise einer Elektronenstrahlröhre.	Routine, wurde eingeübt.	K 1, K 3	4		
1.2	Auswertung des Energieerhaltungssatzes zur Ermittlung von $U_A = 1,57 \cdot 10^3$ V, Dimensionsbetrachtung.	Routine, wurde eingeübt.	K 1, K 2	4	1	
1.3	Erklärung, warum Beugungserscheinungen vernachlässigt werden können.	Begründungszusammenhänge erkennen, Sachverhalte verknüpfen, eingeübt.	K 1, K 2, K 3		3	
1.4	Einsetzen in Formel (1) und der Ablenkung $y(8 \text{ cm}) = 2,26 \text{ cm}$, Dimensionsbetrachtung	Routine für eine umfangreiche Berechnung.	K 2	5		
1.5	Betrachtung der unterschiedlichen Geschwindigkeitskomponenten, Zusatzkomponente in y-Richtung: $v_y = \frac{e \cdot U_y \cdot \ell}{m_e \cdot d \cdot v_x} = 1,33 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2,70 \cdot 10^7 \text{ m/s}$	Strukturiertes schriftliches Präsentieren komplexer Sachverhalte, eigenständige komplexe Überlegungen und Rechnungen zur Bestimmung von v_y .	K 1, K 2, K 3, K 4		4	
1.6	Berechnung des Abstands des Leuchtpunktes alternativ über Flugzeitbetrachtung oder Nutzung des Ablenkwinkels $\tan \alpha = 0,5662$ ($s_y = 9,06 \text{ cm}$; $y_{\text{ges}} = 11,32 \text{ cm}$)	Grundlage für die richtige Problembearbeitung ist eine klare physikalische Strukturierung des vorliegenden komplexen physikalischen Sachverhalts.	K 1, K 2, K 3, K 4,		5	
1.7	Herleitung der Bahngleichung $y(x)$ durch Zeitbetrachtung, $t = \frac{x}{v_x}$, Bestimmung der Beschleunigung $a_y = \frac{e \cdot U_y}{m_e \cdot d}$ und Einsetzen in die Bewegungsgleichung $s = \frac{1}{2} a_y t^2$	Begründetes Herleiten der mathematischen Beschreibung, wurde an anderen Sachverhalten geübt.	K 1, K 2, K 3, K 4		2	
1.8	Mögliche Argumentation: Anwendung des Energieerhaltungssatzes für beliebige Massen zur Bestimmung von v_x^2 und Substitution von v_x^2 in verallgemeinerter Formel (1), Bahngleichung $y = \frac{U_y}{4U_A d} x^2$ und somit auch Auftreffpunkt unabhängig von Ionenmasse.	Begründungszusammenhänge erkennen, Reflexion. Nachweis einer Hypothese durch allgemeingültige Schlussregeln. In PH-3 wird diese Fragestellung nicht angesprochen.	K 3, K 4 K 3, K 2			6

Summe: 14 23 6 (43)

Erwartungshorizont Aufgabe 2

Teilaufg.	Erwartete Teilleistung	Didaktischer Zusammenhang mit dem vorausgegangenen Unterricht	Komp. bereich	BE im AB		
				I	II	III
2.1	Angabe des Raumzeit-Abstands ($\Delta \underline{r} = 0$), Auswahl zweier geeigneter Punkte, Angabe der Dirac-Vektoren, Berechnung des Raumzeit-Abstands (negatives Quadrat der räumlichen Komponente)	Basiswissen, Routine, einfacher Sachverhalt, komplexer Sachverhalt.	K 1, K 2, K 3	1 1 1		1
2.2a	Geschwindigkeitsberechnung ($v = c/4$ oder $v = 75\,000$ km/s)	einfacher Sachverhalt	K 1, K 2	1		
2.2b	Erkennen und Eintragen der zeitlichen Koordinatenachse	Verknüpfen physikalischer Inhalte mit graphischer Darstellung.	K 1, K 2, K 3	2		
2.2c	Erkennen und Eintragen der räumlichen Koordinatenachse (Punkte aller im gestr. Inertialsystem gleichzeitig stattfindenden Ereignisse)	komplexerer Sachverhalt	K 1, K 2, K 3		2	
2.2d	Anwendung der Lorentz-Transformation ($x = 7,75$ Lj; $t = 11,62$ Jahre), Dimensionsbetrachtung	Einfacher Sachverhalt mit teilweise komplexen Umrechnungsschritten, wurde eingeübt.	K 1, K 2, K 3	3 1	3	
2.3a	Eintragen der Weltlinie des Sterns, rechnerische Ermittlung des Schnittpunktes von Weltlinie des Dr. Li mit Weltlinie des Sterns, Eintragen der Weltlinienabschnitte für Hinflug, Sternerforschung, Rückflug	Verknüpfen physikalischer Sachverhalte mit graphischer Darstellung. Zwillingsparadoxon wurde im Unterricht behandelt.	K 1, K 2, K 3	1 3		1
2.3b	Berechnung der im ruhenden Inertialsystem vergangenen Zeit ($\Delta t = 17,97$ Jahre ≈ 18 Jahre)	einfacher Sachverhalte, Routine		2		
2.3c	Berechnung der im bewegten System vergangenen Zeit (Zeitdilatation ist nur für zwei der drei Zeitabschnitte zu berücksichtigen, ($\Delta t' = 6,47$ Jahre)	Komplexer Sachverhalt mit Reflexionsanteil (da Zeitdilatation für alle Teilstrecken korrekt zu beachten ist)	K 1, K 2, K 3, K 4			4

Summe: 16 11 0 (27)

Erwartungshorizont Aufgabe 3

Teil-aufg.	Erwartete Teilleistung	Didaktischer Zusammenhang mit dem vorausgegangenen Unterricht	Komp. bereich	BE im AB		
				I	II	III
3.1	Schaltbild	Routine,	K 1	2		
3.2	Zeigerdiagramm (z.B. der Spannungen) unter Beachtung der Phasenbeziehungen R: $\varphi = 0^\circ$; L: $\varphi = 90^\circ$; C: $\varphi = -90^\circ$ mit Erläuterungen, Ansatz für Beträge der Spannungen $U_{\max}^2 = U_{R\max}^2 + (U_{L\max} - U_{C\max})^2$ liefert Ausdruck für Z, Ansatz für Tangens des Phasenwinkels $\tan \varphi = (U_{L\max} - U_{C\max}) / U_{R\max}$ liefert Ausdruck für $\tan \varphi$.	Routine komplexer Sachverhalt.	K 1, K 2, K 3, K 4	2	6	
3.3	Darstellung von $Z(f)$ mit Minimum bei f_R , Begründung über Frequenzabhängigkeit von X_C und X_L , bei f_R ist $X_C = X_L$. Darstellung von $I_{\max}(f)$ mit Maximum bei f_R , Begründung über I antiproportional zu Z.	Routine, Darstellung eines komplexen Sachverhalts, Routine, Darstellung eines komplexen Sachverhalts	K 1, K 2, K 3	1	3	1
3.4	R klein: hohes Maximum, R groß: niedriges Maximum, Strom- und Spannungsspitzen bei zu niedrig dimensioniertem R können Gerät zerstören.	Anwendung in Technik Darstellung eines komplexen Sachverhalts	K4 K 1, K 2, K 3	2	2	
3.5	Ansatz: Z wird minimal bei $\omega L - 1/\omega C = 0$ Dies liefert $L = 2,7 \text{ H}$.	Auswählen bei vertrauter Struktur, Routineberechnung	K 1, K 2	2	2	
3.6	Ansatz 1: $Z = R \Rightarrow \tan \varphi = 0$ liefert $\varphi = 0^\circ$ Ansatz 2: $Z = 2R \Rightarrow \omega L - 1/\omega C = \sqrt{3} R \Rightarrow \tan \varphi = \sqrt{3}$ liefert $\varphi = 60^\circ$	Komplexer Sachverhalt, im Unterricht nicht besprochen.	K 2, K 3, K 4		1	4

Summe: 10 16 4 (30)

Übersicht über die Punktezuordnung:

Semester	3. Semester (Schwerpunkthalbjahr)	3. Semester (Schwerpunkthalbjahr)	2. Semester	Summe
Aufgabe	Bewegung von Ladungen im elektrischen Feld	Relativistische Kinematik	Siebketten (Serienresonanzkreis)	
EPA-Bezug	Felder, Quanten	Materie, Felder	Felder, Wellen	
AB I	14	16	10	40
AB II	23	11	16	50
AB III	6	0	4	10
Summe	43	27	30	100
vorgesehene Bearbeitungszeit	103 Min (43 %)	65 Min (27 %)	72 Min (30 %)	240 Min (100 %)