Workshops zur Allgemeinen Relativitätstheorie im Schülerlabor „Raumzeitwerkstatt“ an der Universität Hildesheim

Corvin Zahn, Ute Kraus

Universität Hildesheim, Abteilung Physik,
Marienburger Platz 22, 31141 Hildesheim,
corvin.zahn@uni-hildesheim.de,
ute.kraus@uni-hildesheim.de.

Kurzfassung
Im Rahmen des Schülerlabors „Raumzeitwerkstatt“ bieten wir Workshops zur Einführung in die Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie auf Schulniveau an.
Dabei setzen wir einen neuartigen Zugang ein, der in unserer Arbeitsgruppe entwickelt wurde. Er basiert auf dem Regge-Calculus, einer Methode zur Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen, und resultiert in einer koordinatenfreien, nur auf messbaren Abständen beruhenden Beschreibung der Raumzeit.
In den Workshops wird mit zwei- und dreidimensionalen Modellen gearbeitet, welche die TeilnehmerInnen aus Bauvorlagen selbst bauen und an denen sie Messungen ausführen und Vorhersagen der Theorie konstruieren. Die mathematische Formulierung, die über die Schulmathematik weit hinausgeht, wird dabei durch geometrische Anschauung und zeichnerische Lösungen ersetzt.
Die Themen der Workshops reichen von der relativistischen Beschreibung der Gravitation als Raumzeitkrümmung bis hin zu Schwarzen Löchern, Neutronensternen, Wurmlöchern und dem expandierenden Universum.
Nähere Informationen und Kontakt: `www.raumzeitwerkstatt.de`.

1. Einleitung

Unsere Workshops zur Allgemeinen Relativitätstheorie sind ein Angebot des Schülerlabors Raumzeitwerkstatt ([1]) der Universität Hildesheim. Sie richten sich an die oberen Klassenstufen (ab 10. Klasse) sowie an Lehrkräfte.
Auch wenn die Relativitätstheorie wenig Raum in den Kerncurricula für die Schule einnimmt, halten wir eine Einbeziehung ihrer Grundlagen in den Schulunterricht trotzdem für wichtig:

- Es geht um grundlegende Konzepte unseres Alltags: Raum und Zeit.
- Die Relativitätstheorie mit ihren Anwendungen ist sehr präsent in den Medien: Einstein, Schwarze Löcher, LHC, Science Fiction, ...
- Fehlvorstellungen sind weit verbreitet (gerade in den Medien).
- Untersuchungen zeigen, dass Astronomie eines der wenigen Teilgebiete der Physik ist, die auch Mädchen ansprechen.

Die Allgemeine Relativitätstheorie gilt als schwierig und dem Schulunterricht nicht zugänglich. Wenn man an den mathematischen Hintergrund denkt, der im Hochschulstudium zu diesem Thema vermittelt wird, stimmt das sicher.
Die Grundidee der Allgemeinen Relativitätstheorie kann jedoch recht einfach zusammengefasst werden:

> Matter tells space how to curve.
> Space tells matter how to move.
> John Wheeler

Die Materie krümmt den Raum (genauer die Raumzeit) und die gekrümmte Raumzeit bestimmt die Bewegung der Materie.
Daraus ergeben sich direkt drei Fragen:

1. Was ist denn eigentlich ein gekrümmter Raum? Eine gekrümmte Fläche kann man sich noch ganz gut vorstellen, aber einen gekrümmten Raum? Mathematisch wird dies durch den Riemanntensor beschrieben.
2. Wie genau bewegt sich ein Körper unter dem Einfluss der Gravitation? Um dies zu berechnen müssen die Geodätengleichungen, vier gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung, gelöst werden.
3. Wie hängen die Materieverteilung und die Raumzeitkrümmung zusammen? Dies wird

durch die Einsteinschen Feldgleichungen ausgedrückt (10 nichtlineare, gekoppelte, partielle Differentialgleichungen).

Die mathematische Behandlung dieser drei „einfachen“ Fragen überschreitet bei Weitem die Möglichkeiten der Schulmathematik. Hier etwas Schultaugliches herauszuziehen, das über die üblichen Analogien hinausgeht, erscheint auf den ersten Blick aussichtslos.

Andererseits ist die Allgemeine Relativitätstheorie eine geometrische Theorie und damit der geometrischen Anschauung zugänglich. Wir haben für unsere Workshops neues Unterrichtsmaterial entwickelt, das den geometrischen Aspekt in den Mittelpunkt stellt und fast ohne Mathematik auskommt. Stattdessen setzen wir auf geometrische Anschauung und das Selbstkonstruieren und Basteln von Modellen. Unser neuer Zugang basiert auf dem Regge-Calculus ([2]), einer Methode zur Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen. Er resultiert in einer koordinatenfreien, nur auf messbaren Abständen beruhenden Beschreibung der Raumzeit. Typische Anwendungen des Regge-Calculus liegen in den Bereichen numerische Relativitätstheorie und Quantengravitation. Wir möchten zeigen, dass der Ansatz auch für die didaktische Aufbereitung der Allgemeinen Relativitätstheorie sehr fruchtbar ist. Sein großer Vorteil besteht darin, dass er eine koordinatenfreie, maßstabsgerechte Darstellung der Raumzeit liefert, so dass durchweg mit Beobachtungsgrößen argumentiert werden kann.

Andere Ansätze für die Visualisierung gekrümmter Räume oder Raumzeiten basieren auf Einbettungen glatter zusammenhängender Flächen in einen dreidimensionalen Raum (z.B. Darstellungen wie Abb. 1, [3], [4] (s.a. [5]), [6]) oder in eine 2+1-dimensionale Raumzeit ([7]). Sie sind damit auf zweidimensionale Räume beschränkt. Der Verzicht auf die Einbettung in einen höherdimensionalen Raum in unserem Zugang erlaubt die Modellierung eines *dreidimensionalen* gekrümmten Raums. Mit einer Dimension weniger umgehen zu müssen, erleichtert außerdem das Basteln der Modelle und den praktischen experimentellen Umgang damit (der einen Schwerpunkt unserer Workshops darstellt).

Das für unsere Workshops entwickelte Material und seine Anwendung möchten wir hier anhand der oben genannten drei Fragen kurz vorstellen.

2. Gekrümmter Raum: Erklärungsversuche

Für den gekrümmten Raum wird als Erklärungsmuster oft folgendes angeboten:

Eine Linie kann gerade oder krumm sein, eine Fläche eben oder gekrümmt, beim Raum ist es genauso, nur eine Dimension höher.

Diesem Muster folgend wird ein Schwarzes Loch oft wie in Abb. 1 dargestellt. Dies ist eine mathematisch korrekte Darstellung der zweidimensionalen Äquatorfläche eines Schwarzen Lochs, eingebettet in den dreidimensionalen Raum. Nur die Aufforderung, sich dies einfach eine Dimension höher vorzustellen, funktioniert nicht; unser Verstand ist dreidimensional.

Was dabei herauskommt, sieht man beispielsweise in Abb. 2 oder Abb. 3: Solche Bilder für Schwarze Löcher sind weit verbreitet, sie können jedoch bestenfalls die Illusion von Verständnis vermitteln: Was man hier sieht, ist irgendwie krumm und hat ein Loch. Trotzdem haben sich, besonders im populärwissenschaftlichen Bereich, solche Bilder fest als Symbol eines Schwarzen Lochs etabliert. Das es dadurch zu eklatanten Fehlvorstellungen kommt, ist klar.

Wir suchen ein Modell eines gekrümmten Raums, das dessen geometrische Eigenschaften (auch quantitativ) korrekt wiedergibt, ohne dass ein höherdimensionaler Raum benötigt wird, in den es sich hineinkrümmen kann.

Um sich dem zu nähern, schauen wir uns in unseren Workshops zuerst zweidimensionale gekrümmte Flächen an. Anhand von Alltagsgegenständen wird der Begriff der *inneren Krümmung* einer Fläche diskutiert. Die Oberfläche eines Tennisballs ist positiv gekrümmt, die eines Kartoffelchips negativ und ein zu einem Zylinder gerolltes Blatt Papier ist gar nicht gekrümmt.

Aus vorgegebenen Bastelbögen werden Modelle gekrümmter Flächen gebaut (Abb. 4 links). Aus der 3D-Perspektive ist die Krümmung leicht erkennbar.

Wie könnte ein zweidimensionales Wesen ([8]), das *in* einer solchen Fläche lebt, feststellen, ob und wie diese gekrümmt ist? Von außen betrachten kann es diese Fläche nicht, dieses Wesen hat keine Vorstellung von der dritten Dimension.

Es kann jedoch die Fläche in Sektoren aufteilen und diese als Modell auf dem ebenen Tisch ausbreiten. Es wird feststellen, dass die Stücke nicht zusammenpassen (Abb. 4 rechts). Die Weise, wie sie nicht zusammenpassen (ob Lücken übrigbleiben oder ob sich die Sektoren überlappen würden) steht in direktem Zusammenhang mit der Krümmung in dieser Gegend.

Unser Flächenwesen kann so mit seinem 2D-Verstand die innere Geometrie seiner Welt ermitteln, ohne eine zusätzliche dritte Dimension zu benötigen.

Diese Methode können wir jetzt auf drei Dimensionen übertragen. Wir unterteilen den ev. gekrümmten Raum in dreidimensionale Sektoren, messen diese aus und bauen sie in unserem ungekrümmten Raum nach.

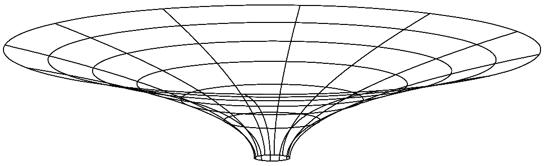


Abb. 1: Einbettungsfläche der Äquatorfläche durch ein Schwarzes Loch.

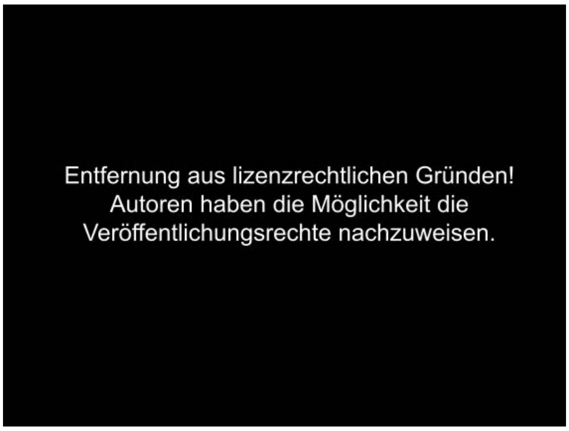


Abb. 2: Schwarzes Loch, J. Bergeron, Sky & Telescope Magazine.

Abb. 3: Schwarzes Loch. Barron Storey, im Auftrag der Stanford University für eine Broschüre zu Gravity Probe B ([9]).

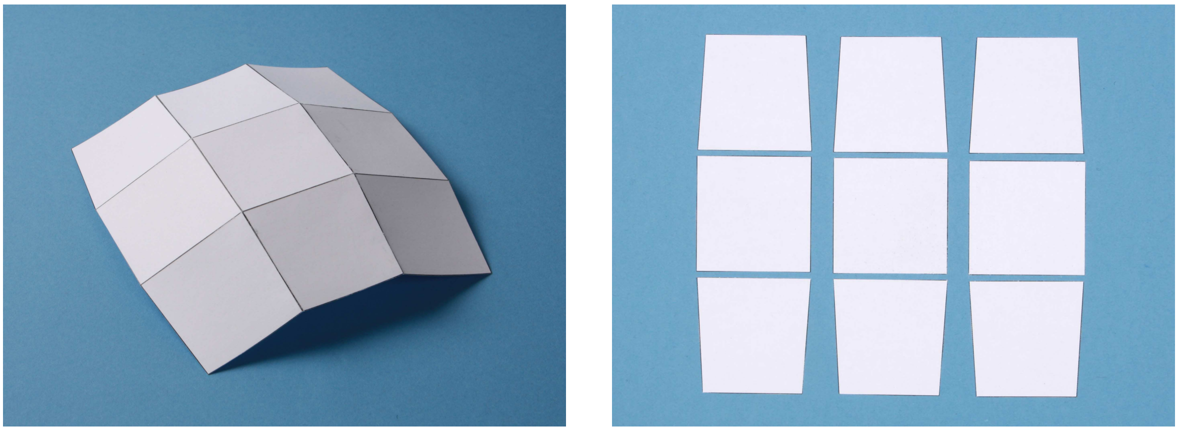


Abb. 4: Links: Durch ungekrümmte Flächenstücke angenäherte positiv gekrümmte Fläche. Rechts: dazugehörende Sektorkarte.

Ein solches Modell ist (wie auch das vorher genannte 2D-Modell) maßstabsgetreu. D. h. wir können es verwenden, um geometrische Konstruktionen zu machen oder um, wie in einem Straßenatlas, eine Reiseroute zu planen. Längen und Winkel in der „Wirklichkeit“ entsprechen, eventuell maßstäblich verkleinert, Längen und Winkeln im Modell. Eine „Gerade“ in der Wirklichkeit ist eine Gerade im Modell.

Als Beispiel bauen wir in unseren Workshops ein Pappmodell des gekrümmten Raums um ein Schwarzes Loch ([10], [11]).

Links in Abb. 5 sieht man eine Computergrafik des kompletten Modells, rechts oben einen Bastelbogen und rechts unten einen gebastelten Ausschnitt aus dem Modell. Man sieht, dass die Klötzchen wie im

2D-Fall nicht zusammenpassen.

3. „Space tells matter how to move“

Wie wirkt sich die Raumkrümmung auf die Materie aus?
In der Allgemeinen Relativitätstheorie gibt es den Begriff der Gravitationskraft nicht. Freie Teilchen bewegen sich auf Geodäten, d. h. lokal geradeaus. Mathematisch können Geodäten mit den Geodätengleichungen beschrieben werden (Abb. 6 für ein Schwarzes Loch), was aber für die Schule zu anspruchsvoll ist.
Da eine Geodäte lokal gesehen eine Gerade ist, ist sie das auch in unserem maßstäblichen Modell und kann dort einfach mit einem Lineal konstruiert werden (Abb. 7).
Das 3D-Modell aus Abb. 5 ist für diese Experimente etwas unhandlich, wir nehmen deshalb die zweidimensionale (dort grüne) Äquatorfläche heraus (Abb. 8). Für diese Sektoren geben wir in unseren Workshops meist Bastelvorlagen aus (obwohl diese, wenn man etwas mehr Zeit hat, auch mit Schulmathematik selbst berechnet werden können). Die einzelnen Sektoren können dann mit Sprühkleber für wiederlösbare Verbindungen auf einen Untergrund aufgeklebt und hin- und herversetzt werden.
In Abb. 9 sieht man zwei Punkte, die durch zwei Linien verbunden sind. Beide Linien sind gerade, wie man durch Umlegen der Sektoren zeigen kann (so wurden sie auch konstruiert). D. h. die Aussage, dass zwei Punkte genau eine Gerade festlegen, gilt im gekrümmten Raum nicht.
Hier entsprechen die zwei Geraden zwei gespannten Schnüren. Analog dazu ist die gravitative Lichtablenkung zu verstehen. Licht breitet sich lokal gerade aus und hat trotzdem nach dem Passieren einer großen Masse eine andere Richtung als vorher; es wird „abgelenkt“. Um dies mit unserer Methode korrekt darzustellen, bräuchte man ein raumzeitliches Modell. Ein solches ist auch in unserem Workshopprogramm enthalten. Es ist aber deutlich anspruchsvoller, da Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie benötigt werden.

4. „Matter tells space how to curve“

Zum letzten Punkt, dem Kern der Allgemeinen Relativitätstheorie: Wie hängt die Raum/Raumzeit-Krümmung mit der Materieverteilung zusammen?
Dies wird durch die Einsteinschen Feldgleichungen beschrieben, deren mathematische Behandlung natürlich weit jenseits des in der Schule Möglichen liegt.
Für statische Materieverteilungen gibt es aber eine einfache Form: Die Summe der Krümmungen in drei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen an einem Punkt ist direkt proportional zur Materiedichte an diesem Punkt. Die Krümmung dieser drei Ebenen kann durch Messungen am Modell ermittelt werden. D. h. an einem gegebenen Modell kann mit einem Geodreieck und einer einfachen Rechnung die Materiedichte ermittelt werden.
In unseren Workshops setzen wir dafür das vorher genannte Modell des Schwarzen Lochs sowie ein Modell des Inneren eines Neutronensterns ein.

5. Workshops im Schülerlabor

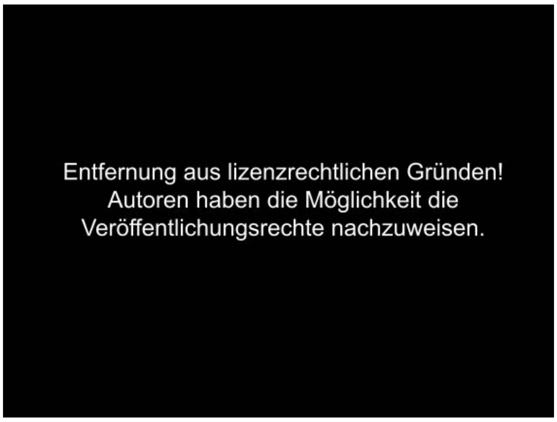
Unser Angebot an Workshops umfasst folgende Themen:

- „Wir basteln ein Schwarzes Loch“ – Schwarze Löcher und gekrümmte Räume
- „Licht auf krummen Wegen?“ – Lichtablenkung im Schwerefeld, Gravitationslinsen, Geodäten
- „Wie Materie den Raum krümmt“ – Neutronensterne und die Feldgleichungen
- „Gravitationswellen“ – Was wellt sich da?
- „Flug durch ein Wurmloch“
- „Newton vs. Einstein“ – Wurfparabel, Gravitationsrotverschiebung
- „Das expandierende Universum“

Je nachdem wieviel Zeit zur Verfügung steht, kann man in etwa einer Stunde einen Einblick in den Begriff des gekrümmten Raums geben, an einem Nachmittag Geodäten und Lichtablenkung hinzunehmen und in etwa einem ganzen Tag oder zwei Nachmittagen mit den Feldgleichungen eine Komplettour durch die Allgemeine Relativitätstheorie machen. Als Vertiefung sind die weiteren Themen gedacht, die in den Rahmen einer Projektwoche oder Lehrerfortbildung passen können.
Nähere Infos, Termine, Kontaktadresse sind auf unserer Webseite:

`www.raumzeitwerkstatt.de`

zu finden.



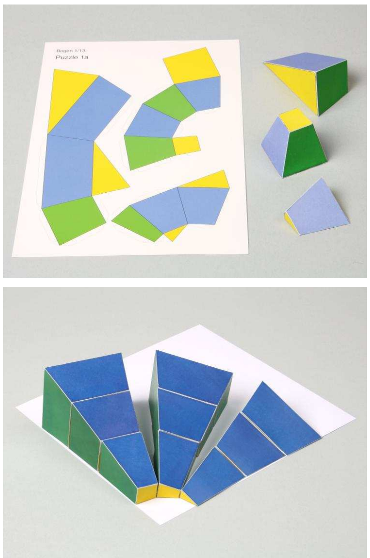


Abb. 5: Links: Computergeneriertes Klötzchenmodell einer Hohlkugel, die ein Schwarzes Loch im Zentrum hat. Rechts: Pappmodelle.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\lambda^2} &= -\frac{2M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\\
\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\lambda^2} &= -\frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}^2+\frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}^2\\
&\quad +(r-2M)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}^2+\sin^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}^2\right)\\
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\lambda^2} &= -\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}+\sin\theta\cos\theta\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}^2\\
\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\lambda^2} &= -\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}-2\cot\theta\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}.
\end{aligned}
$$

Abb. 6: Geodätengleichungen in der Schwarzschild-metrik. Werkzeug: Computer.

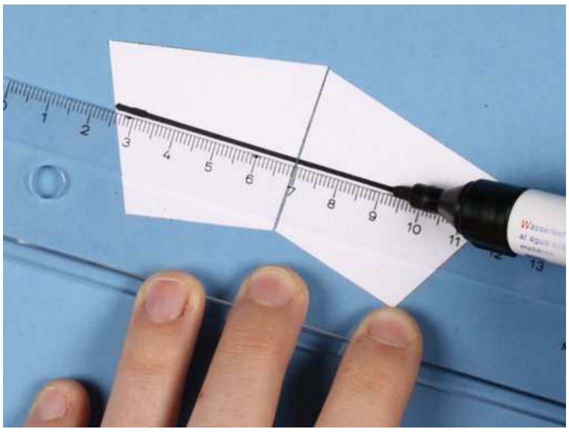


Abb. 7: Geodäte auf der Sektorkarte. Werkzeug: Lineal!

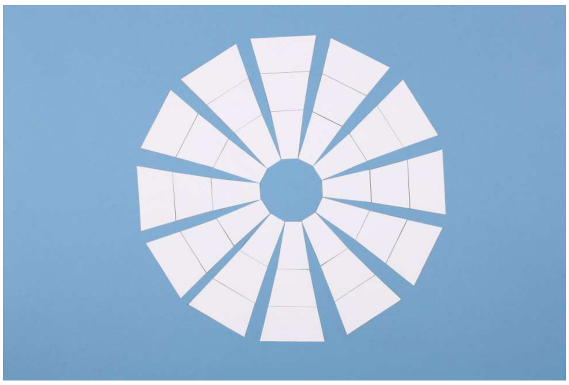


Abb. 8: Eine gestückelte Karte für einen Teil der Äquatorebene des Schwarzen Lochs.

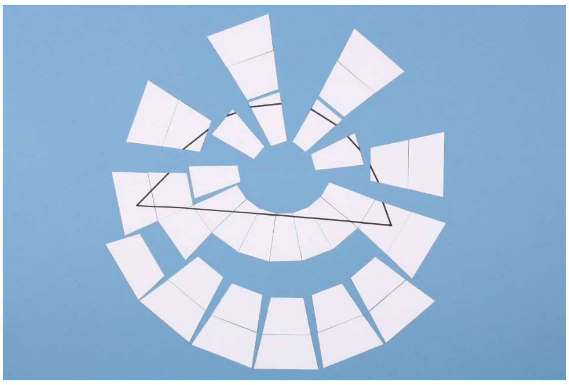


Abb. 9: Ein Geradenstück auf der zweidimensionalen Karte (untere Linie).

6. Literatur

[1] Kraus, U.; Zahn, C.: Das Schülerlabor „Raumzeitwerkstatt“ an der Universität Hildesheim, Tagungsbeitrag zur Frühjahrstagung Didaktik der Physik, Hannover 2010.

[2] Regge, T.: General Relativity without Coordinates, Il Nuovo Cimento **19**, 558–571, 1961.

[3] Epstein, L. C.: Relativity Visualized, Insight, San Francisco, 1994, Kap. 10–12.

[4] Jonsson, R. M.: Embedding Spacetime via a Geodesically Equivalent Metric of Euclidean Signature, Gen. Relativ. Gravit. **33**, 1207–1235, 2000.

[5] Kahnt, M.; Korte, S.: Newtons fallender Apfel als Effekt der Raumzeitkrümmung, Frühjahrstagung Didaktik der Physik, Hannover 2010.

[6] Jonsson, R. M.: Visualizing curved spacetime, Am. J. Phys. **73** (3), 248–260, 2005.

[7] Marolf, D.: Spacetime embedding diagrams for black holes, Gen. Rel. Grav. **31** (1999) 919, [arXiv:gr-qc/9806123].

[8] Abbott, E. A.: Flatland, A Romance in Many Dimensions, Seely & Co., 1884; deutsche Übersetzung: Flächenland. Ein mehrdimensionaler Roman, Klett Verlag, 1982.

[9] Storey, B.: Illustrationen im Auftrag der Stanford University für eine Broschüre zu Gravity Probe B, URL: `http://einstein.stanford.edu/content/pict_gal/barren_storey/`

[10] Zahn, C.; Kraus, U.: Wir basteln ein Schwarzes Loch, Arbeitsheft mit Bastelbögen, 2004 Bärenverlag (nur Direktvertrieb) oder online URL: `http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/graum/graum.html`

[11] Kraus, U.; Zahn, C.: Wir basteln ein Schwarzes Loch – Unterrichtsmaterialien zur Allgemeinen Relativitätstheorie, Praxis der Naturwissenschaften Physik, Didaktik der Relativitätstheorien, Heft 4/54, 38–43, 2005.