

Didaktische Rekonstruktion zur Quantenbildgebung

- Interferenzkontrast im Experiment quantitativ charakterisieren -

Dustin-Philipp Preissler*, Holger Cartarius*

*AG Fachdidaktik der Physik und Astronomie, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Max-Wien-Platz 1, 07743
Jena
dustin.philipp.preissler@uni-jena.de

Kurzfassung

Ein wesentliches Merkmal von Quantenobjekten ist die Fähigkeit zur Interferenz. In einem Mach-Zehnder-Interferometer beobachtet man Interferenz von Laserstrahlen oder auch Einzelphotonen. Für Laserstrahlung lässt sich dieses Phänomen klassisch sehr anschaulich mithilfe der Überlagerung zweier elektromagnetischer Wellen erklären, die auf zwei unterschiedlichen Wegen durch das Interferometer propagieren. Entscheidend für die quantenphysikalische Erklärung ist, dass für ein Einzelphoton, das zum Interferenzmuster beiträgt, keine Information über den tatsächlich genommenen Weg durch das Interferometer vorliegt. Liegt stattdessen Welcher-Weg-Information vor, trägt das Einzelphoton nicht zum Interferenzmuster bei. Klassisch kann man dazu einen der beiden Strahlengänge im Interferometer blockieren: Das Interferenzmuster verschwindet. Wir gehen hier der Frage nach, was mit dem Interferenzmuster passiert, wenn ein Strahlengang etwas geschwächt wird, z.B. durch ein Objekt mit Transmissionskoeffizient T und wie sich die Sichtbarkeit der Interferenz (= Interferenzkontrast) im Experiment sogar quantifizieren lässt. Der Interferenzkontrast charakterisiert unter anderem die Performanz von Experimenten zur Quantenbildgebung und die Transmission des Objekts. Somit beleuchtet dieser Artikel auch einen wichtigen Teilaспект moderner Quantentechnologien und bereitet ihn für Lehramtsstudierende und außerschulische Lernorte auf.

Weiterhin wird das Mach-Zehnder-Interferometer mit einem Objekt im Strahlengang ausführlich mathematisch beschrieben, da Lehramtsstudierende der Physik nicht nur den Dirac-Formalismus im Rahmen der zweiten Quantisierung auf ein schultaugliches Real-Experiment anwenden können, sondern auch Interferenz sprachlich sauber charakterisieren lernen.

1. Mathematische Grundlagen

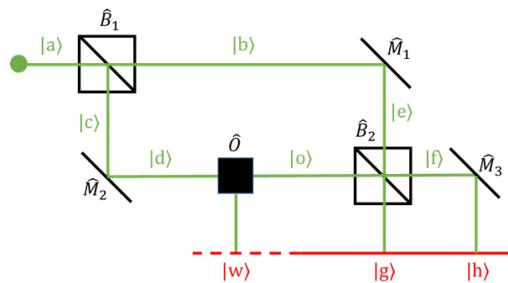


Abb. 1: Mach-Zehnder-Interferometer mit eingebrachtem Objekt \hat{O} im unteren Strahlengang. Jeder Strahlengang wird durch einen Ket-Vektor repräsentiert, jede optische Komponente durch einen Operator (Strahlteiler \hat{B} , Spiegel \hat{M} , Objekt \hat{O}). Vor der Detektion ist der Zustand eine Superposition aus Detektion auf einem Schirm in $|g\rangle$ oder $|h\rangle$ und Absorption $|w\rangle$ durch das Objekt. Eigene Abbildung



Abb. 2: Laserstrahlung wird durch ein Objekt mit Transmissionskoeffizient T in seiner Intensität I geschwächt. Eigene Abbildung

Das Mach-Zehnder-Interferometer (Abb. 1) besteht aus einer Laserquelle, die Photonen in den Strahlengang $|a\rangle$ aussendet. Am ersten 50:50-Strahlteiler \hat{B}_1 wird dieser Strahl in $|b\rangle$ und $|c\rangle$ aufgeteilt. Spiegel \hat{M}_1 reflektiert den oberen Strahl und Spiegel \hat{M}_2 den unteren Strahl. Beide Strahlen treffen auf einen weiteren 50:50-Strahlteiler \hat{B}_2 mit Ausgängen $|f\rangle$ und $|g\rangle$. Zur Detektion beider Ausgänge mit nur einem Schirm wird ein zusätzlicher Spiegel \hat{M}_3 genutzt. In den unteren Strahlengang wird ein Objekt \hat{O} mit Transmissionskoeffizient T eingebracht [1]. Dieser hängt direkt mit der Transmissionswahrscheinlichkeit T^2 eines Einzelphotons durch das Objekt zusammen. Die Wahrscheinlichkeit für Absorption (= Gegeneignis zu Transmission) beträgt entsprechend $1 - T^2$. Makroskopisch ergibt sich für Laserstrahlung der in Abb. 2 dargestellte Zusammenhang [2]. Die Absorption können wir ganz einfach durch einen Verlust-Strahlengang $|w\rangle$ modellieren: Ein Photon, das absorbiert wurde, wird nicht in einem der Strahlengänge $|a\rangle$ bis $|h\rangle$ zu finden sein [3].

Ein Photon, das durch das Objekt transmittiert, kann eine Phasenverschiebung erleiden, weil z.B. das Objekt aus Glas besteht und die Ausbreitungsgeschwindigkeit

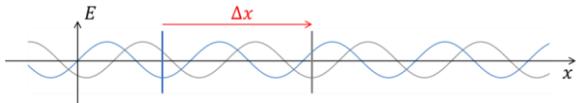


Abb. 3: Zwei Sinusfunktionen mit derselben Amplitude, die um Δx verschoben sind. Beispielhaft ist hier der räumliche Verlauf der elektrischen Feldstärke einer elektromagnetischen Welle dargestellt ($t = \text{const.}$). Eigene Abbildungdigkeit c im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c_0 in Vakuum bzw. Luft verringert ist. Dadurch ist der Brechungsindex charakterisiert: $n = c_0/c$. Man kann sich nun leicht makroskopisch mithilfe elektromagnetischer Wellen überlegen, welche Zusammenhänge hinter dem Strahlteiler \hat{B}_2 , also nach dem Zusammenführen der zuvor getrennten Teilwellen, zwischen diesen zwei phasenverschobenen Wellenzügen bestehen (Abb. 3):

Oberer Wellenzug in Abb. 1 (blauer Graph):

$$E_0 \sin(kx), \quad \{1\}$$

unterer Wellenzug in Abb. 1 (grauer Graph):

$$E_0 \sin[k(x - \Delta x)]. \quad \{2\}$$

Dabei ist $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl mit der Wellenlänge λ . Der untere Wellenzug ist um Δx nach rechts verschoben. Um welchen Winkel (bzw. Phase) ϕ muss der untere Wellenzug verschoben werden, damit er wieder in Phase mit dem oberen Wellenzug ist? In Formeln:

$$\sin(kx) = \sin[k(x - \Delta x) + \phi]. \quad \{3\}$$

Offensichtlich ist das allgemein für $m2\pi = -k\Delta x + \phi$ mit $m \in \mathbb{Z}$ erfüllt. Insgesamt ergibt sich also (o.B.d.A. $m = 0$):

$$\phi = k\Delta x = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi f\Delta x}{c} = \frac{2\pi f n \Delta x}{c_0}. \quad \{4\}$$

Dabei ist $c = \lambda f$ mit der Frequenz f des Lasers bzw. der Einzelphotonen. Diese Formel beinhaltet – wie wir noch sehen werden – alle Möglichkeiten, die Struktur des Interferenzmusters zu beeinflussen [4]. Mithilfe des Dirac-Formalismus können wir jede Beeinflussung von Einzelphotonen bzw. von Laserstrahlung im Rahmen der zweiten Quantisierung beschreiben. Der einfallende Strahl wird mit $|e\text{in}\rangle$ bezeichnet, die übrigen Bezeichnungen der Ket-Vektoren sind sehr intuitiv [3]-[5]:

Phasenverschiebung ϕ :

$$|e\text{in}\rangle \mapsto \exp(i\phi) |e\text{aus}\rangle, \quad \{5\}$$

Transmission/Absorption:

$$\begin{aligned} |e\text{in}\rangle &\mapsto T |t\text{transmittiert}\rangle \\ &+ \sqrt{1 - T^2} |a\text{absorbiert}\rangle. \end{aligned} \quad \{6\}$$

Jetzt können wir die Bauteile im Interferometer modellieren [1]:

$$\text{Spiegel } \hat{M}: |e\text{in}\rangle \mapsto i |e\text{reflektiert}\rangle, \quad \{7\}$$

$$\begin{aligned} \text{Strahlteiler } \hat{B}: |e\text{in}\rangle &\mapsto 1/\sqrt{2} (|t\text{transmittiert}\rangle \\ &+ i |r\text{reflektiert}\rangle), \end{aligned} \quad \{8\}$$

$$\begin{aligned} \text{Objekt } \hat{O}: |e\text{in}\rangle &\mapsto T \exp(i\phi) |t\text{transmittiert}\rangle \\ &+ \sqrt{1 - T^2} |a\text{absorbiert}\rangle. \end{aligned} \quad \{9\}$$

Man kann sich schnell davon überzeugen, dass die Vektoren, auf welche die Zustände $|e\text{in}\rangle$ abgebildet werden, ebenfalls Zustände sind. Diese Formeln fassen mathematisch alles kompakt zusammen. Sie enthalten bspw. die Information, dass zwischen einfallendem und reflektiertem Strahl an einer Grenzfläche (z.B. Spiegeloberfläche oder Strahlteiler) eine Phasendifferenz von $\pi/2$ besteht, denn $i = \exp(i\pi/2)$.

Vor der Messung eines Einzelphotons mithilfe eines Schirms oder Detektors können wir nicht sagen, ob es absorbiert wurde ($|w\rangle$) oder in $|g\rangle$ oder $|h\rangle$ zu finden sein wird. Wir erwarten also eine Superposition aus $|g\rangle$, $|h\rangle$ und $|w\rangle$ für unseren Zustand vor der Messung, den wir mit $|\psi\rangle$ bezeichnen. Wir wenden jetzt einfach obige Formeln Schritt für Schritt auf unsere Laserstrahlung bzw. Einzelphotonen im Interferometer an, nachdem diese auf ein bestimmtes Bauteil getroffen ist bzw. sind:

$$\hat{B}_1: |a\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} (|b\rangle + i|c\rangle), \quad \{10\}$$

$$\hat{M}_1: |b\rangle \mapsto i|e\rangle, \quad \{11\}$$

$$\hat{M}_2: |c\rangle \mapsto i|d\rangle, \quad \{12\}$$

$$\hat{O}: |d\rangle \mapsto T \exp(i\phi) |o\rangle + \sqrt{1 - T^2} |w\rangle, \quad \{13\}$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_2: |o\rangle &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} (|f\rangle + i|g\rangle) \\ &\& |e\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle + i|f\rangle), \end{aligned} \quad \{14\}$$

$$\hat{M}_3: |f\rangle \mapsto i|h\rangle. \quad \{15\}$$

Jetzt kann man alles ineinander einsetzen, um zu erhalten:

$$\begin{aligned} |a\rangle \mapsto |\psi\rangle &:= \frac{i}{2} (|g\rangle - |h\rangle) \\ &- \frac{i}{2} T \exp(i\phi) (|g\rangle + |h\rangle) \\ &- \frac{\sqrt{1 - T^2}}{\sqrt{2}} |w\rangle. \end{aligned} \quad \{16\}$$

Das ist genau das, was wir erwartet haben: Eine Superposition aus den Zuständen $|g\rangle$, $|h\rangle$ und $|w\rangle$. Die Herleitung der Formel des Zustandes $|\psi\rangle$ ist auch als Übung geeignet, genauso wie die weiteren Betrachtungen: Mithilfe der Bornschen Regel können wir die Wahrscheinlichkeiten für Detektion in Strahlengang $|g\rangle$, $|h\rangle$ oder $|w\rangle$ (Absorption) ausrechnen [1]:

$$P_g = |\langle g|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4} [T^2 - 2T \cos \phi + 1], \quad \{17\}$$

$$P_h = |\langle h|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4} [T^2 + 2T \cos \phi + 1], \quad \{18\}$$

$$P_w = |\langle w|\psi\rangle|^2 = \frac{1 - T^2}{2}. \quad \{19\}$$

Tab. 1: Detektionswahrscheinlichkeiten für Einzelphotonen im Mach-Zehnder-Interferometer bei Abwesenheit des Objektes ($T = 1$) und Strahlfall als Objekt ($T = 0$)

	$T = 1$	$T = 0$
P_g	$\sin^2(\phi/2)$	1/4
P_h	$\cos^2(\phi/2)$	1/4
P_w	0	1/2

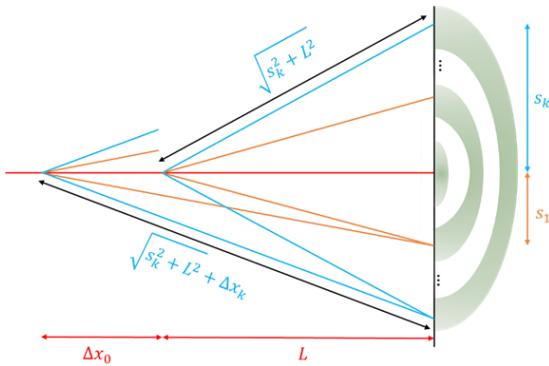


Abb. 4: Optische Achse des Mach-Zehnder-Interferometers in rot. Durch den oberen Strahlengang legt das Licht den optischen Weg L zurück, im unteren Strahlengang den Weg $L + \Delta x_0$. Entfernt man sich entlang des Schirms von der optischen Achse, nehmen die optischen Weglängendifferenzen ab. Gilt z.B. $\Delta x_0 = m\lambda$ mit $m \in \mathbb{N}$, so ist $\Delta x_k = (m - k)\lambda$ mit $k \leq m$. Für ein auf identische optische Weglängen in beiden Teilwellen justiertes Interferometer ($m = 0$) gibt es deshalb keine Nebenmaxima. Eigene Abbildung nach [6]

Der Spezialfall $T = 1$ liefert uns die bekannten Formeln für das ungestörte Mach-Zehnder-Interferometer (keine Welcher-Weg-Information) und $T = 0$ entspricht dem Vorhandensein vollständiger Welcher-Weg-Information (Tab. 1) [4].

Für den Fall $T = 1$ erhalten wir ein Interferenzmuster auf dem Schirm, da P_g und P_h von ϕ abhängen. Schauen wir uns dazu Gl. {4} nochmal an: Für ein ungestörtes Interferometer ($n = \text{const.}$) bei Verwendung eines monochromatischen Lasers ($f = \text{const.}$) hängt ϕ nur von einer Weglängendifferenz Δx ab. Jeder Punkt des Schirms steht für ein anderes Δx (Abb. 4). Auf der optischen Achse gilt, weil man gerade im Schulkontext kein perfekt auf identische optische Weglängen in beiden Armen justiertes Interferometer realisiert bekommt, $\Delta x = \Delta x_0$, und mit größer werdendem Abstand von der optischen Achse fällt Δx monoton. Weil \sin^2 und \cos^2 periodische Funktionen sind, gibt es periodisch helle und dunkle Stellen auf dem Schirm und weil der Laserstrahl rotationssymmetrisch ist, ergibt sich ein rotationssymmetrisches Interferenzbild aus hellen und dunklen Kreisen [6]. Insgesamt ist dem Interferenzbild noch das Laserprofil aufgeprägt, die Intensität nimmt also radial exponentiell ab (Abb. 5 links).

Für den Fall $T = 0$ hat die Detektionswahrscheinlichkeit keinen Freiheitsgrad. Hier ist der Schirm

konstant beleuchtet, wobei auch hier wieder das Intensitätsprofil radial exponentiell abnimmt (Abb. 5 rechts).

Insbesondere werden in der Schule oder in Lehrveranstaltungen an der Universität diese beiden Spezialfälle behandelt. Der Spezialfall $T = 1$ wird meist als Interferenz bezeichnet, weil die Detektionswahrscheinlichkeiten von der Phasenverschiebung ϕ abhängen. Für ein perfekt justiertes Interferometer gilt z.B. $\phi = 0$ und $P_g = 0$ und $P_h = 1$. Einzelphotonen werden also nur im Ausgang $|h\rangle$ gemessen.

Tatsächlich sollte man aber für den Fall $T = 1$ nicht nur von *Interferenz* reden, sondern von *Interferenz mit maximalem Interferenzkontrast*, wie wir noch sehen werden. Geradezu natürlich erwächst nämlich die Frage nach der Gestalt des Interferenzmusters für alle Fälle $0 < T < 1$. Wir schreiben dazu die Gln. {17}-{19} für die Detektionswahrscheinlichkeiten mit trigonometrischen Identitäten künstlich um:

$$P_g = T \sin^2 \frac{\phi}{2} + (1 - T)^2 \frac{1}{4}, \quad \{20\}$$

$$P_h = T \cos^2 \frac{\phi}{2} + (1 - T)^2 \frac{1}{4}, \quad \{21\}$$

$$P_w = T \cdot 0 + (1 - T)^2 \frac{1}{2}. \quad \{22\}$$

Man sieht sehr deutlich, dass für alle Fälle $0 < T < 1$ die Detektionswahrscheinlichkeiten eine Überlagerung aus den beiden Spezialfällen ($T = 1$ und $T = 0$) bilden. Mit abnehmendem T nimmt der Einfluss der Summanden ab, die von ϕ abhängen. Die Sichtbarkeit der Interferenz wird schlechter. Hätte insbesondere der zweite Summand (der nicht von ϕ abhängt) den Koeffizienten $1 - T$, dann würde die Sichtbarkeit der Interferenz linear mit T abnehmen. Das Auftauchen des Koeffizienten $(1 - T)^2$ legt aber ein nichtlineares Verhalten nahe.

2. Interferenzkontrast als physikalische Größe

Wir sehen an den Gln. {20}-{22}, dass im Falle eines Objekts mit Transmission $0 < T < 1$ das Interferenzbild eine Überlagerung aus Interferenz mit maximalem Kontrast und keiner Interferenz (konstante Beleuchtung) ist. Folglich werden mit abnehmendem T die Minima immer heller und die Maxima immer dunkler. Weil immer mehr Photonen absorbiert und gar nicht detektiert werden, wird das Interferenzbild im Mittel dunkler. Der Kontrast nimmt rapide ab.

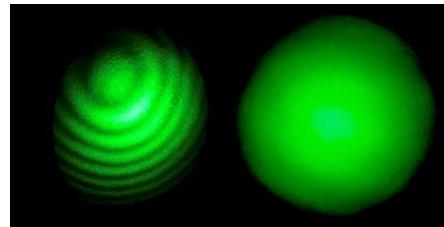


Abb. 5: Detektierte Laserstrahlung für den Fall Interferenz mit maximalem Interferenzkontrast ($T = 1$, links) und für den Fall eines blockierten unteren Strahlengangs ($T = 0$, rechts). Eigene Abbildung

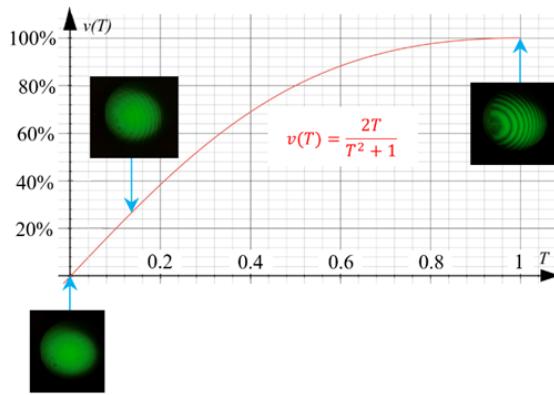


Abb. 6: Abhängigkeit des Interferenzkontrastes $v(T)$ im Mach-Zehnder-Interferometer vom Transmissionskoeffizienten T des eingebrachten Objekts. Die Interferenzbilder repräsentieren von links nach rechts: 0%, 27%, 100% Interferenzkontrast. Eigene Abbildung nach [1]

Um das zu quantifizieren, definiert man den Interferenzkontrast V wie folgt [2]:

$$\text{Interferenzkontrast} = \frac{\text{Amplitude}}{\text{Mittelwert}}. \quad \{23\}$$

Die Amplitude ist gegeben durch $|I_g - I_h|/2$ und der Mittelwert durch $(I_g + I_h)/2$. Mit $I_g = I_a P_g$ und $I_h = I_a P_h$ folgt [7]:

$$V = \frac{|I_g - I_h|}{I_g + I_h} = \frac{2T}{T^2 + 1} |\cos \phi|. \quad \{24\}$$

Wir haben bereits diskutiert, dass jeder Punkt auf dem Schirm für ein anderes Δx bzw. ϕ steht. Global wird der Interferenzkontrast nur von T bestimmt. Wir definieren deshalb den Interferenzkontrast als [1]:

$$\frac{V}{|\cos \phi|} = \frac{2T}{T^2 + 1} =: v(T). \quad \{25\}$$

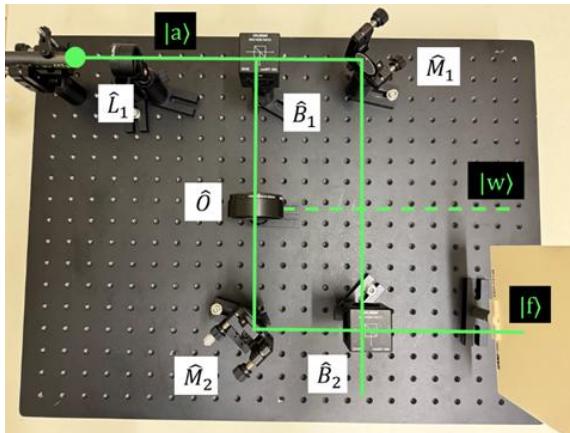


Abb. 7: Das Objekt \hat{O} ist ein ND-Filter bekannter Transmission. Das Objekt kann beliebig im unteren Strahlenweg platziert werden. Die Zerstreuungslinse \hat{L}_1 weitet den Laserstrahl auf, um das Interferenzbild auf dem Schirm zu vergrößern. Es genügt für das Experiment zur Bestimmung des Interferenzkontrastes die Verwendung eines Schirms in $|f\rangle$ oder $|g\rangle$. Eigene Abbildung

Gemäß unserer Vorbetrachtung hängt der Interferenzkontrast nichtlinear von T ab. Abbildung 6 zeigt den grafischen Verlauf von $v(T)$. Er enthält unsere beiden Spezialfälle: $T = 1$ liefert einen Interferenzkontrast von $V = 1 = 100\%$ und $T = 0$ ergibt $V = 0 = 0\%$. Dazwischen liegen all unsere Fälle mit Interferenzkontrasten $0 < V < 1$. Wir ersetzen unser Objekt durch einen ND-Filter mit Transmission T^2 (Abb. 7). Mit Gl. {25} kann man aus dem Transmissionskoeffizienten den Interferenzkontrast bestimmen. Im Falle von 2% Transmission, d.h. $T^2 = 0.02$, ist $T \approx 0.14$ und $v(T) \approx 27\%$.

Im Experiment kann durch die Wahl verschiedener ND-Filter mit definierter Transmission mithilfe von Gl. {25} der Interferenzkontrast berechnet werden. So kann man sehr effizient verschiedene Interferenzbilder mit definiertem Kontrast einstellen.

3. Fazit

Das Mach-Zehnder-Interferometer wurde mithilfe der zweiten Quantisierung quantenmechanisch beschrieben. Im Experiment nutzen wir hingegen klassisches Licht. Das ist kein Widerspruch, da die Detektionswahrscheinlichkeiten mit relativen Intensitäten verknüpft werden. So muss das aus der Schule und aus den ersten Semestern bekannte Wellenmodell des Lichts nicht aufgegeben werden, da die neue quantenmechanische Beschreibung daran anknüpft. Jeder der in der Rechnung auftauchenden Größen kann eine reale Größe im Experiment zugeordnet werden. Das hilft bei der Charakterisierung von Interferenz als Wellen- und quantenmechanisches Phänomen. Insbesondere der Interferenzkontrast kann sehr leicht charakterisiert werden. Er ist notwendig, um bei modernen Quantentechnologien wie z.B. Quantenbildgebung die Performanz des Aufbaus zu bewerten. Ein abnehmender Interferenzkontrast kann z.B. ein Hinweis für im Aufbau auftretende Absorption sein. Das bedeutet konkret: Einzel-Photonen gehen verloren, weil sich Linsen oder Spiegel im Laufe der Zeit leicht verformen oder verkippen aufgrund von Temperaturschwankungen, Erschütterungen usw. [8] Umgekehrt sollte man beim Justieren nur solche Schritte vornehmen, die den Interferenzkontrast verbessern.

4. Literatur

- [1] Preissler, D.-P.; Mappes, T.; Dienerowitz, M.; Cartarius, H. (2025): Teaching the Foundations of Quantum Imaging Through Mach-Zehnder Interferometry. In: 2025 IEEE Conference on Education and Training in Optics and Photonics (ETOP). Glasgow: IEEE. Url: <https://doi.org/10.1109/ETOP64842.2025.11030714> (Stand 8/2025)
- [2] Fox, M. (2006): Quantum Optics. An Introduction. Oxford: Oxford University Press.

- [3] Lemos, G.B.; Borish, V.; Cole, G.D.; Ramelow, S.; Lapkiewicz, R.; Zeilinger, A. (2014): Quantum imaging with undetected photons. In: Nature 512 (7515), S. 409–412. Url:
<https://doi.org/10.1038/nature13586>
(Stand 5/2025)
- [4] Lvovsky, A.I. (2018): Quantum Physics. An Introduction Based on Photons. 1st ed. Berlin, Heidelberg: Springer.
- [5] Vedral, V. (2005): Modern Foundations of Quantum Optics. London: Imperial College Press.
- [6] Thorlabs Inc. (2018): EDU-QE1. EDU-QE1/M. Quantum Eraser Demonstration Kit. User Guide. Url:
<https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=EDU-QE1/M>
(Stand 8/2025)
- [7] Aehle, S.; Scheiger, P.; Cartarius, H. (2022): An Approach to Quantum Physics Teaching through Analog Experiments. In: Physics 4 (4), S. 1241–1252. Url:
<https://doi.org/10.3390/physics4040080>
(Stand 5/2025)
- [8] Gilaberte Basset, M.; Hochrainer, A.; Töpfer, S.; Riexinger, F.; Bickert, P.; León-Torres, J. R. et al. (2021): Video-Rate Imaging with Undetected Photons. In: Laser & Photonics Reviews 15 (6), S. 2000327. Url:
<https://doi.org/10.1002/lpor.202000327>
(Stand 5/2025)

Danksagung

Gefördert durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) – Projekt-Nr. 398816777 – SFB 1375 „Nonlinear Optics down to Atomic scales“.