

Multi-repräsentationale Lernaufgaben zur Vektoranalysis in der Studieneingangsphase

Larissa Hahn*, Alexander Voigt[†], Philipp Mertsch[†], Pascal Klein*

*Universität Göttingen, Physik und ihre Didaktik, Friedrich-Hund-Platz 1, 37077 Göttingen

[†]RWTH Aachen, Institut für Theoretische Teilchenphysik und Kosmologie, Sommerfeldstr. 16, 52074 Aachen
larissa.hahn@uni-goettingen.de

Kurzfassung

Um Vektorfeldkonzepte wie Divergenz oder Rotation in physikalischen Kontexten anzuwenden, ist ein solides Verständnis ihrer Grundlagen erforderlich. Bisherige empirische Forschungsergebnisse bei Studierenden zeigten hierbei Schwierigkeiten auf, die sich z. B. auf die visuelle Interpretation von Vektorfelddiagrammen zurückführen lassen und in physikalische Anwendungsgebiete, z. B. die Elektrodynamik, transferieren. Im Einklang mit lerntheoretischen Erkenntnissen wird daher der Einsatz multipler Repräsentationen bei der Vermittlung dieser Konzepte empfohlen. Auf Basis empirischer Vorarbeiten wurden Lernaufgaben entwickelt, die einen visuellen Zugang zur Vektoranalysis anhand von multiplen Repräsentationen (MR) ermöglichen und Zeichenaktivitäten sowie ein interaktives Vektorfeld-Visualisierungswerkzeug integrieren. Die MR-Lernaufgaben wurden in die begleitenden Übungen einer Elektromagnetismus-Vorlesung an der Universität Göttingen implementiert ($N = 81$). Die Wirksamkeitsanalyse ergab höhere Lerneffekte der MR-Lernaufgaben im Vergleich zu traditionellen, rechenbasierten Aufgaben. Eine Implementation der Lernaufgaben in die begleitenden Übungen einer Vorlesung zu mathematischen Methoden der Physik an der RWTH Aachen zielt neben einer Replikation der Ergebnisse auf die Lernwirksamkeit der MR-Lernaufgaben bezüglich der Anwendung vektoranalytischer Konzepte in physikalischen Kontexten ab. Dieser Beitrag präsentiert die Konzeption entsprechender Aufgaben eines Performanztests zur Anwendung der Vektoranalysis in der Fluidmechanik, Elektro- sowie Magnetostatik.

1. Einleitung

Vektoren und Vektorfelder nehmen eine zentrale Stellung in der Hochschulphysik ein. Besonders bedeutsam sind vor allem die Differentialoperatoren, mit deren Hilfe charakteristische Eigenschaften eines Feldes beschrieben werden können – etwa dessen Quellen oder Wirbel. Ebenso spielen die Integralsätze von Gauß und Stokes eine fundamentale Rolle (eine Übersicht der zentralen Definitionen der Vektoranalysis findet sich im Anhang). Vektoranalytische Konzepte sind dabei insbesondere für die Fluidmechanik und die Elektrodynamik von zentraler Relevanz, zwei bedeutenden Teilgebieten der Physik. Dort bilden sie die Grundlage für das Verständnis und die mathematische Beschreibung physikalischer Phänomene.

Ein solides Verständnis der Vektoranalysis ist aufgrund ihrer grundlegenden fachlichen Bedeutung ein zentraler Bestandteil des Physikstudiums. So konnten Burkholder et al. (2021) nachweisen, dass eine umfangreiche Vorbereitung der Vektorrechnung signifikant mit dem Studienerfolg in einem Einführungskurs zum Elektromagnetismus korreliert. Gleichzeitig legen weitere Studien nahe, dass insbesondere das vektoranalytische Konzeptwissen, das für das physikalische Verständnis entscheidend ist, vielen Studierenden Schwierigkeiten bereitet (Singh & Maries, 2013). Da im Lehralltag vor allem abstrakte, formal-mathematische Zugänge dominieren, wird deutlich, dass es innovativer Lehr-Lern-Materialien zur

Vektoranalysis bedarf, um einen anschaulichen Zugang zu ermöglichen. Lernwirksamkeitsanalysen sollten dabei über mathematisch-abstrahierte Testaufgaben hinaus vor allem die Anwendung vektoranalytischer Konzepte in typischen Teilgebieten der Physik, z. B. der Elektrodynamik, adressieren (Bollen et al., 2015).

Angesichts dieser Befunde und Überlegungen präsentiert dieser Beitrag eine Forschungslinie zu Lernwirksamkeitsanalysen multi-repräsentationaler Aufgaben zur Vektoranalysis, die in Lehrveranstaltungen der Studieneingangsphase implementiert werden. Im Zentrum steht die Entwicklung physikbezogener Aufgaben für einen Vektoranalysis-Test, der im Rahmen einer Replikationsstudie zur Lernwirksamkeitsanalyse eingesetzt wird.

2. Fachdidaktischer Hintergrund

In diesem Abschnitt werden die empirischen und theoretischen Grundlagen für die Entwicklung der multi-repräsentationalen Lernaufgaben und kontextbezogener Testitems zur Vektoranalysis vorgestellt. Dazu werden zunächst empirische Ergebnisse zu Lernschwierigkeiten bei Studierenden im Umgang mit Vektorfeldkonzepten und deren Anwendung in physikalischen Kontexten zusammengefasst (für eine ausführliche Zusammenfassung siehe Hahn, 2024). Anschließend wird der Ansatz des Lernens mit multiplen Repräsentationen, sowie weitere didaktische

Methoden, als Grundlage für die Entwicklung der Lernaufgaben und des Vektoranalysis-Tests vorgestellt.

2.1. Lernschwierigkeiten im Umgang mit Vektorfeldern und vektoranalytischen Konzepten

Vorangegangene Studien belegen, dass die Erstellung von Vektorfelddiagrammen für viele Studierende eine erhebliche Herausforderung darstellt ($N = 196$; Bollen et al., 2017). Schwierigkeiten traten insbesondere bei der vollständigen und korrekten Darstellung der Feldeigenschaften auf, z. B. hinsichtlich der radialen Veränderung von Richtung und Betrag der Vektoren. Darüber hinaus zeigten Studierende grundlegende Verständnisschwierigkeiten in Bezug auf die graphische Darstellung als Vektorfelddiagramm. So wurden Vektoren als gekrümmte Pfeile gezeichnet und alle Vektoren im Ursprung beginnend oder an ihrem Ort zentriert dargestellt (Bollen et al., 2017). Bei der Bestimmung eines entsprechenden mathematischen Ausdrucks zu einem Vektorfelddiagramm wurden darüber hinaus Probleme deutlich, die sich auf die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems sowie die Nutzung von Einheitsvektoren und Komponenten bezogen (Bollen et al., 2017; Gire & Price, 2012).

Darüber hinaus legten empirische Studien zahlreiche Defizite von Studierenden beim Verständnis der Differentialoperatoren offen. Beispielsweise zeigten Studierende Schwierigkeiten, zu beurteilen, ob ein ebenes Vektorfelddiagramm divergenz- bzw. rotationsfrei ist oder nicht (Ambrose, 2004; Baily und Astolfi, 2014; Bollen et al., 2015; Jung und Lee, 2012; Klein et al., 2018, 2019; Singh und Maries, 2013). Eine Analyse der verwendeten Strategien ergab, dass nur 3% der Studierenden konzeptuelle Erklärungen formulierten, mit diesen allerdings 100% Erfolgsquote erreichten (Bollen et al., 2015). Etwa ein Viertel der Studierenden überführte das Vektorfelddiagramm in einen entsprechenden mathematischen Ausdruck und berechnete die Differentialoperatoren anschließend. Für Vektorfelddiagramme in kartesischen Koordinaten erzielten sie damit eine Erfolgsquote von über 50%, für radialsymmetrische Felder unter 50% (Bollen et al., 2015). Ein verbreitetes Phänomen ist zudem, Divergenz und Rotation wörtlich zu verstehen und sich bei der Interpretation von Vektorfelddiagrammen von Oberflächenmerkmalen des Diagramms leiten zu lassen (Baily & Astolfi, 2014). So wird Divergenz mit einem Auseinanderlaufen des Feldes und Rotation mit einer Richtungsänderung im Feldverlauf assoziiert (Baily und Astolfi, 2014; Bollen et al., 2016; Jung und Lee, 2012; Singh und Maries, 2013).

Im Hinblick auf die Integralsätze von Gauß und Stokes zeigten verschiedene Studien zudem zahlreiche Verständnishürden von Studierenden bezüglich der Interpretation der entsprechenden Weg-, Oberflächen- und Volumenintegrale sowie vektoriellen Linien-, Flächen- und Volumendifferentiale (Jones, 2020; Schermerhorn & Thompson, 2019). Huffman

et al. (2020) zeigten zudem, dass Studierende zwar die mathematische Form des Gaußschen Satzes reproduzieren können, jedoch erhebliche Schwierigkeiten bei der qualitativen Interpretation des Satzes haben ($N = 60$). Fast die Hälfte der Befragten gab an, keine sinnvolle Interpretation formulieren zu können.

2.2. Lernschwierigkeiten bei der Anwendung der Vektoranalysis in physikalischen Kontexten

Jenseits der mathematischen Dimension zeigten Studien, dass ein unzureichendes Verständnis vektoranalytischer Konzepte unmittelbar zu Fehlinterpretationen in physikalisch-technischen Kontexten führen kann. So beobachteten Pepper et al. (2012), dass Studierende bei der Analyse elektrischer Felder häufig entweder nur die Richtung oder nur den Betrag der Vektoren berücksichtigten – eine Vorgehensweise, die auf grundlegende Schwierigkeiten mit der vektoriellen Struktur dieser Felder hinweist. In einer Studie von Bollen et al. (2015) bestimmen nur 5% der Teilnehmenden am Ende eines Elektromagnetismus-Einführungskurses ($N = 19$) Divergenz und Rotation des Magnetfeldes eines geraden, stromdurchflossenen Leiters anhand eines Vektorfelddiagramms korrekt. Typische Hürden stellten vor allem die Verwendung krummliniger Koordinaten und die mathematische Beschreibung des Feldes in kartesischen Koordinaten dar. Zudem stellten Pepper et al. (2012) fest, dass nur 26% der Studierenden ($N = 51$) eines Elektromagnetismus-Kurses divergenzfreie Bereiche des elektrischen Feldes einer kugelförmigen Ladungsschale korrekt angeben konnten. Auch bei der Interpretation von Linien-, Oberflächen- und Volumenintegralen zeigten Lernende erhebliche Schwierigkeiten, vor allem im Hinblick auf deren Bedeutung als Summenbegriffe, z. B. beim Ampère'schen Gesetz (Wallace & Chasteen, 2010). Weitere Studien dokumentierten darüber hinaus vielfältige Probleme im Umgang mit den Maxwell'schen Gleichungen – sowohl in ihrer differentiellen (Bollen et al., 2015, 2016) als auch in ihrer integralen Form (Li & Singh, 2017) – sowie bezüglich des elektrischen Potentials (Pepper et al., 2012). Bollen et al. (2016) beobachteten, dass Studierende zur Beurteilung der Divergenz und Rotation elektromagnetischer Felder Skizzen anfertigten, diese jedoch häufig fehlerhaft oder für sie selbst nicht interpretierbar waren. Als mögliche Ursache nennen die Autor:innen u. a., dass sich Lernende auf Berechnungen konzentrieren, statt auf zugrundeliegende Konzepte, was eine Integration mathematischer Kenntnisse in den elektromagnetischen Kontext erschwert. Zusammenfassend betonen Pepper et al. (2012), dass viele der beobachteten Schwierigkeiten bei der Anwendung vektoranalytischer Konzepte im Elektromagnetismus darauf zurückzuführen sind, dass es Studierenden schwerfällt, mathematische Werkzeuge gezielt einzusetzen, physikalische Konzepte mit Rechenoperationen zu verknüpfen und die jeweilige physikalische Situation angemessen in ihre Überlegungen einzubeziehen.

2.3. Multiple Repräsentationen, Zeichenaktivitäten und digitalgestützte Visualisierungen zur Unterstützung des Lernens vektoranalytischer Konzepte

Angesichts der beschriebenen Forschungsbefunde zu studentischen Lernschwierigkeiten im Umgang mit Vektorfeldern, vor allem im Hinblick auf die Anwendung in physikalischen Kontexten, fordern Bollen et al. (2015, 2016) Instruktionen zur Vektoranalysis, die eine Verknüpfung von Mathematik und Physik fokussieren. Sie plädieren dabei für einen konzeptuell-visuellen Ansatz, der eine Interpretation der entsprechenden Konzepte adressiert. Diese Empfehlungen entsprechen den Vorschlägen von Dray und Manogue (1999) zur Überwindung der „vector calculus gap“. Gleichzeitig folgen sie dem didaktischen Konsens zum Einsatz multipler visueller Repräsentationen, deren Lernwirksamkeit häufig nachgewiesen werden konnte (Nieminen et al., 2012; Rau, 2017).

Vor diesem Hintergrund entwickelten Klein et al. (2018) multi-repräsentationale Instruktionsmaterialien zur visuellen Interpretation der Divergenz von Vektorfelddiagrammen. Diese instruieren sowohl die differentielle (Gl. 2 Anhang) als auch auf die integrale Definition der Divergenz (Gl. 4 Anhang). In einer Folgestudie wurden zusätzliche Hilfen zur Komponentenzerlegung in der Instruktion der differentiellen Strategie ergänzt und anschließend erfolgte der Transfer zur Rotation eines Vektorfeldes (Klein et al., 2019; Gl. 3 Anhang). Die empirischen Ergebnisse zeigten eine Steigerung des konzeptionellen Verständnisses der Lernenden infolge der durchgeführten Interventionen. In begleitenden Interviews wurde insbesondere die Zerlegung des Feldes in seine Feldkomponenten als zentrale Schwierigkeit benannt (Gl. 1 Anhang; Klein et al., 2018). Als Reaktion darauf integrierten zwei weitere experimentelle Studien Zeichenaktivitäten, um die visuelle Interpretation der Divergenz gezielt zu unterstützen (Hahn & Klein, 2021, 2022a, 2023a). Neben positiven Lerneffekten zeigte sich hierbei, dass das Skizzieren einzelner Feldkomponenten die subjektiv empfundene kognitive Belastung bei der Divergenzbeurteilung signifikant verringern konnte (Hahn & Klein, 2022a, 2023a).

Im Kontext des multi-repräsentationalen Lernens wird der Einsatz digitalgestützter Visualisierungen vielfach als lernförderlich betont (De Jong, 2011). Studien zeigen, dass solche Werkzeuge durch die Veranschaulichung abstrakter Inhalte das konzeptuelle Verständnis fördern und durch ihre Interaktivität lernendenzentrierte Lernumgebungen kreieren können (Wieman et al., 2010; Wu et al., 2001). Mehrere Untersuchungen belegten zudem, dass der gezielte Einsatz von Zeichenaktivitäten das Lernen mit digitalen Visualisierungen effektiv unterstützen kann (Kohnle et al., 2020; Wu & Rau, 2018). So ermöglicht das begleitende Zeichnen u. a. ein vertieftes Verständnis der entsprechenden Repräsentationen (Ainsworth et al., 2011; Kohnle et al., 2020).

3. Implementation multi-repräsentationaler Lernaufgaben zur Vektoranalysis in die Studieneingangsphase

Auf Basis der beschriebenen Vorarbeiten zum Lernen vektoranalytischer Inhalte sowie der theoretischen Überlegungen zur Unterstützung des Lernens mit multiplen Repräsentationen wurden multi-repräsentationale (MR) Lernaufgaben zur Vektoranalysis, d. h. zu Divergenz und Rotation, sowie den Integralsätzen von Gauß und Stokes, entwickelt (Hahn & Klein, 2022b). Diese enthalten verschiedene Repräsentationsformen, d. h. Vektorfelddiagramme, mathematische Ausdrücke sowie verbale Beschreibungen, und involvieren diagrammspezifische Zeichenaktivitäten und ein digitalgestütztes Vektorfeld-Visualisierungswerkzeug (Hahn et al., 2024). Lernwirksamkeitsanalysen der MR-Lernaufgaben erfolgen im Rahmen von Implementationen der Lernaufgaben in die begleitenden Übungen von Lehrveranstaltungen in der Studieneingangsphase des Physikstudiums.

3.1. Primärstudie: Hahn & Klein (2023b, 2025)

In den Sommersemestern 2022 bis 2024 wurden die MR-Lernaufgaben in die begleitenden Übungen einer universitären Elektromagnetismus-Vorlesung im zweiten Studiensemester an der Universität Göttingen implementiert (Hahn & Klein, 2023b, 2025). Im Vergleich einer Interventionsgruppe (IG) mit MR-Lernaufgaben und einer Kontrollgruppe (KG) mit traditionellen, rechenbasierten Lernaufgaben wurde die Lernwirksamkeit der MR-Lernaufgaben anhand verschiedener Performanzindikatoren (Antwortkorrektheit, Antwortsicherheit) sowie der kognitiven Belastung bei der Aufgabenbearbeitung untersucht ($N = 81$; Hahn & Klein, 2025). Die Erfassung der Performanz erfolgte dabei im Rahmen eines Vektoranalysis-Tests, der Konzeptwissen und Repräsentationskompetenzen im Umgang mit Vektorfeldern erfasste, ohne einen physikalischen Kontext zu referenzieren (Hahn & Klein, 2023b).

Die Lernwirksamkeitsanalyse ergab, dass Studierende, die mit MR-Lernaufgaben arbeiteten, einen höheren Lernzuwachs erzielten (Hake-Gain $g_{H,IG} = 0.35$, $g_{H,KG} = 0.13$), eine höhere lernrelevante kognitive Belastung wahrnahmen (germane cognitive load; Signifikanz $p = 0.02$, Effektstärke Cohens $d = 0.48$) und im Posttest nach der Interventionsphase einen höheren Score erreichten ($p = 0.04$, $d = 0.40$; Hahn & Klein, 2025). Das Vektorfeld-Visualisierungswerkzeug empfahlen die Studierenden der Interventionsgruppe für weitere Studieneingangsvorlesungen, vor allem Lehrveranstaltungen zu den mathematischen Methoden der Physik (Hahn et al., 2024).

3.2. Replikationsstudie

Im Sommersemester 2025 erfolgt eine Implementation der MR-Lernaufgaben in die Studieneingangsphase Physik an der RWTH Aachen. Der Einschätzung der Studierenden folgend, dass das Vektorfeld-Visualisierungswerkzeug vor allem in

mathematischen Grundlagenveranstaltungen hilfreich wäre, werden die MR-Lernaufgaben dabei in die begleitenden Übungen der Veranstaltung „Mathematische Methoden der Physik II“ implementiert. Physikstudierende besuchen diese Vorlesung typischerweise im zweiten Studiensemester parallel zur Elektromagnetismus-Lehrveranstaltung. Mit Blick auf die empirischen Befunde zu Schwierigkeiten bei der Anwendung vektoranalytischer Konzepte in der Physik (Kap. 2.2) adressiert diese Replikationsstudie neben Konzeptwissen und Repräsentationskompetenzen in mathematisch-abstrahierten Kontexten die Anwendung der Vektoranalysis in der Elektro- und Magnetostatik sowie der Fluidmechanik.

4. Vektoranalysis-Test: Kontextbezogene Items

Während die mathematisch-abstrahierten Items des Vektoranalysis-Tests in der Replikationsstudie denen der Primärstudie entsprechen (siehe Hahn & Klein, 2023b, für Beschreibung und Item-/Skalenanalysen), wurden die Aufgaben zur Fluidmechanik und zum Elektromagnetismus für die Replikationsstudie neu entwickelt. Fachdidaktische und methodische Überlegungen der Konzeption dieser Items werden im Folgenden beschrieben.

4.1. Fluidmechanik-Aufgabe: Wasserstrahl

Bisherige Items zur Anwendung der Vektoranalysis nutzten vor allem Kontexte elektrischer und magnetischer Felder (z. B. Bollen et al., 2015; Pepper et al., 2012); die Fluidmechanik wurde hingegen kaum als Anwendungskontext verwendet. Aufbauend auf den Überlegungen von Rabe et al. (2022) wird in den Vektoranalysis-Test der Replikationsstudie eine solche Aufgabe integriert. Konkret adressiert sie einen zweidimensionalen Wasserstrahl aus einem Wasserhahn im homogenen Gravitationsfeld auf der Erdoberfläche. Für das den Wasserstrahl beschreibende Geschwindigkeitsvektorfeld $\vec{v}(x, y)$ gilt die Kontinuitätsgleichung. Da Wasser (näherungsweise) inkompressibel ist, folgt daraus $\text{div } \vec{v}(x, y) = 0$. Die Einführung in den Kontext und die Aufgabenstellung von Teilaufgabe a) lauten:

In der Küche fließe Wasser aus einem Wasserhahn. Die Geschwindigkeit des Wasserstrahls in Abbildung 1 ist durch das dargestellte Geschwindigkeitsvektorfeld $\vec{v}(x, y)$ gegeben.

Für einen Wasserstrahl gilt im Allgemeinen die Kontinuitätsgleichung. Aus dieser kann geschlossen werden, dass für das Geschwindigkeitsfeld gilt $\text{div } \vec{v}(x, y) = 0$.

a) Erklären Sie, warum der Wasserstrahl in Abbildung 1 nicht divergenzfrei sein kann.

Dieser Aufgabenteil zielt auf die Bestimmung der Divergenz des gegebenen Vektorfeldes ab und adressiert so eine zentrale Schwierigkeit von Studierenden, die Divergenz eines ebenen Vektorfelddiagramms zu bestimmen (z. B. Singh & Maries, 2013). Der Lösungsweg ist dabei frei von den Lernenden

bestimmbar, z. B. können sie die differentielle oder integrale Definition der Divergenz für ihre Erklärung verwenden oder die Divergenz berechnen, nachdem sie das Vektorfeld durch einen geeigneten mathematischen Ausdruck beschrieben haben (ähnlich wie bei Bollen et al., 2015). In den meisten Fällen bedarf es hierbei eines Repräsentationswechsels vom Vektorfelddiagramm in eine verbale Erklärung, z. B. der Veränderung der Feldkomponenten, oder in einen mathematischen Ausdruck zur Berechnung der Divergenz.

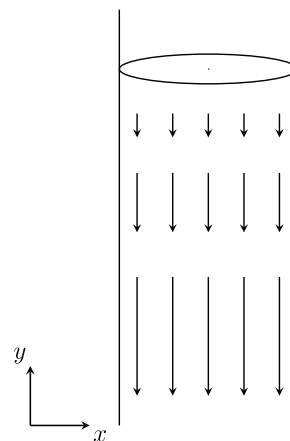


Abb. 1: Aufgabe zur Fluidmechanik: Wasserstrahl aus einem Wasserhahn im homogenen Gravitationsfeld auf der Erdoberfläche (eigene Darstellung).

In Aufgabenteil a) gibt der Kontext der Fluidmechanik die Rahmenbedingungen vor. Für die Bearbeitung der Aufgabe sind jedoch keine kontextspezifischen Argumente oder Konzepte notwendig. Die Fluidmechanik selbst rückt in Aufgabenteil b) stärker in den Fokus:

b) Skizzieren Sie den Wasserstrahl so, dass in Übereinstimmung mit der Kontinuitätsgleichung $\text{div } \vec{v}(x, y) = 0$ gilt.

Die besondere Schwierigkeit bei diesem Aufgabenteil besteht darin, dass der zu skizzierende Wasserstrahl nicht nur divergenzfrei ist, sondern gleichzeitig dem Anwendungskontext, d. h. dem Wasserstrahl im homogenen Gravitationsfeld auf der Erdoberfläche, genügt. Das bedeutet, dass die Zunahme des Betrages der vertikalen Komponente des Geschwindigkeitsvektorfeldes in negative y-Achsenrichtung, wie in Abbildung 1 dargestellt, auch in der Skizze gegeben sein muss. Darüber hinaus muss das Geschwindigkeitsvektorfeld eine von Null verschiedene horizontale Komponente besitzen, die die Geschwindigkeitszunahme in vertikaler Richtung ausgleicht. Anschaulich bedeutet dies, dass sich der Wasserstrahl verjüngt. Mit Blick auf bestehende Vorarbeiten zur Skizzierung von Vektorfelddiagrammen adressiert dieser Aufgabenteil zudem ein grundlegendes Verständnis bezüglich der Darstellungsform eines Vektorfeldes als Vektorfelddiagramm (Bollen et al., 2017).

4.2. Elektrostatik-Aufgabe: Gauß'sches Gesetz

Die Aufgabe zur Elektrostatik adressiert ein zentrales Gesetz der Elektrodynamik, das Gauß'sche Gesetz im Vakuum. Es besagt, dass der Fluss eines elektrischen Feldes \vec{E} durch die geschlossene, nach außen orientierte Oberfläche ∂V eines Volumengebiets $V \subset \mathbb{R}^3$ proportional zur elektrischen Ladung Q ist, die sich in V befindet, $\oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{E} = Q/\epsilon_0$. Das Integral auf der linken Seite des Gauß'schen Gesetzes ist ein Oberflächenintegral 2-ter Art, bei dem das ortsabhängige Skalarprodukt aus dem Flächennormalenvektor $d\vec{A}$ und dem elektrischen Feld \vec{E} über die Randfläche ∂V integriert wird. Die konkrete Aufgabenstellung lautet:

Zur analytischen Bestimmung des elektrischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$ in einem Volumen V kann das Gauß'sche Gesetz, $\oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{E} = Q/\epsilon_0$ verwendet werden. Q beschreibt die Ladung im Volumen V , die von der geschlossenen Randfläche ∂V eingeschlossen wird. Zur Notation: Es gilt $d\vec{A} = \vec{n}dA$.

Betrachten Sie folgende Aussage. Geben Sie an, ob die Aussage korrekt oder inkorrekt ist und begründen Sie Ihre Antwort.

Wenn es in V keine Ladungen gibt ($Q = 0$), dann ist $\vec{E} = \vec{0}$ in V .

Diese Aufgabe zielt vor allem auf ein Verständnis und eine Interpretation des gegebenen Oberflächenintegrals ab. Das Integral kann einerseits direkt als Gesamtfluss des elektrischen Feldes durch die Oberfläche ∂V , d. h. als Bilanzierung des Skalarprodukts aus elektrischem Feld und Flächennormalenvektor über die Oberfläche interpretiert werden. Andererseits kann das Integral mithilfe des Gauß'schen Satzes $\oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{E} = \iiint_V dV \operatorname{div} \vec{E}$ als Bilanzierung von Teilladungen in V interpretiert werden. Eine konzeptuelle Interpretation solcher mathematischer Konstrukte stellte sich in vorangegangenen Studien als schwierig für Studierende heraus (Huffman et al., 2020; Jones, 2020; Schermerhorn & Thompson, 2019; Wallace & Chasteen, 2010). Die Besonderheit der hier vorgestellten Elektrostatik-Aufgabe gegenüber diesen Arbeiten liegt vor allem im konkreten Kontextbezug. So kann eine mögliche Lösung auch darin liegen, sich ein Gegenbeispiel zu der in der Aufgabenstellung angegebenen Aussage zu überlegen. Beispielsweise kann eine elektrische Punktladung außerhalb von V betrachtet werden, die ein elektrisches Feld erzeugt, dass in V nicht verschwindet. In diesem Fall kann die Interpretation des Oberflächenintegrals vermieden und stattdessen der Zusammenhang zwischen der elektrischen Ladungsverteilung und dem elektrischen Feld für die Problemlösung herangezogen werden. Insgesamt erfordert die Begründung in den meisten Fällen einen Repräsentationswechsel von der dargestellten Gleichung hin zu einer verbalen Erläuterung.

4.3. Magnetostatik-Aufgabe: Gerader, stromdurchflossener Leiter

Die Aufgabe zur Magnetostatik greift ein typisches Beispiel aus der Elektromagnetismus-Vorlesung auf, das magnetische Feld \vec{B} im Vakuum außerhalb eines unendlich langen, geraden, von einem homogenen Ladungsstrom durchflossenen Leiters. Charakteristisch für das Magnetfeld ist, dass es gleichzeitig divergenz- und wegen $\vec{j} = \vec{0}$ rotationsfrei ist.

Bollen et al. (2015) nutzten dieses Beispiel ebenfalls als Kontext-Aufgabe in einem Vektoranalysis-Test. Die Studierenden sollten hierbei erklären, an welchen Stellen im Feld Divergenz und Rotation (Nicht-)Null sind. Im Vektoranalysis-Test der hier vorgestellten Replikationsstudie liegt der Fokus neben der Bestimmung der Differentialoperatoren aus einem Vektorfelddiagramm vor allem auf der Konfrontation typischer Schwierigkeiten von Studierenden. Die Aufgabenstellung lautet:

Das Vektorfeld in Abbildung 2 zeigt das Magnetfeld \vec{B} eines geraden, stromdurchflossenen Leiters in der Ebene. Der Leiter verläuft senkrecht zur dargestellten Ebene und schneidet diese im grauen Punkt. Die technische Stromrichtung im Leiter mit der elektrischen Stromdichte \vec{j} zeigt aus der Ebene heraus.

a) Im Allgemeinen gilt, dass es keine magnetischen Monopole gibt, d. h., dass für das Magnetfeld gilt $\operatorname{div} \vec{B} = 0$. Erklären Sie, dass das Feld in Abbildung 2 divergenzfrei ist, obwohl die Stärke des Magnetfeldes proportional zur Entfernung vom Leiter abnimmt.

b) Für die Rotation eines statischen Magnetfeldes gilt $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. Außerhalb des stromdurchflossenen Leiters ist die Stromdichte $\vec{j} = \vec{0}$ und das Feld ist rotationsfrei. Erklären Sie, wie \vec{B} rotationsfrei sein kann, wenn das Feld doch kreisförmig um den Leiter verläuft.

Beide Aufgabenteile evozieren einen kognitiven Konflikt, indem typische Lernschwierigkeiten von Studierenden adressiert werden. So lassen sich Studierende bei der Beurteilung von Vektorfeldern häufig von Äußerlichkeiten des Feldes leiten (Baily & Astolfi, 2014). Bei der Divergenz ist es, z. B. das Auseinanderlaufen des Feldes, bei der Rotation ist es die Richtungsänderung von Vektoren, die als Indikator für eine von Null verschiedene Divergenz bzw. Rotation genutzt wird (Bollen et al., 2016). Die Herausforderung liegt dabei darin, in einem, für die meisten Lernenden, bekannten Kontext die Interpretation des Feldes auf die mathematische Definition der Divergenz zu fokussieren und sich nicht von der äußeren Form des Feldes leiten zu lassen. Der Lösungsweg zur Beantwortung der Aufgabe ist dabei frei bestimmbar, z. B. können die Lernenden die differentielle oder die integrale Definition der Differentialoperatoren verwenden, diese berechnen nachdem sie das Feld mit einem geeigneten mathematischen Ausdruck

beschrieben haben oder eine Skizze, z. B. der Feldkomponenten, zur Erklärung heranziehen (ähnlich wie bei Bollen et al., 2015).

Im Gegensatz zur Fluidmechanik-Aufgabe ist bei der Aufgabe zum geraden, stromdurchflossenen Leiter kein Koordinatensystem vorgegeben. Die Studierenden können daher frei wählen, ob sie kartesische oder krummlinige Koordinaten nutzen (ähnlich wie bei Bollen et al., 2015). Damit adressiert diese Aufgabe eine typische Anforderung, die Studierenden beim kontextfreien Repräsentationswechsel vom Diagramm zum mathematischen Ausdruck in Vorarbeiten erhebliche Schwierigkeiten bereitet (Kap. 2.1; Bollen et al., 2017; Gire & Price, 2012).

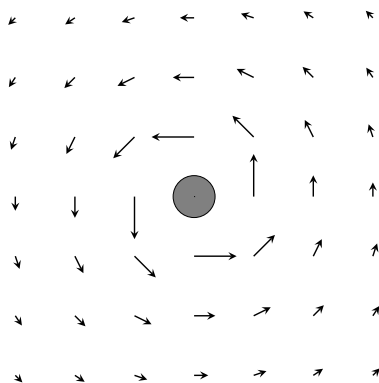


Abb. 2: Aufgabe zur Magnetostatik: Vektorfelddiagramm des Magnetfeldes eines geraden, stromdurchflossenen Leiters (eigene Darstellung).

Durch die fehlende Vorgabe des Koordinatensystems rückt zudem der Anwendungskontext stärker in den Fokus. So ist die Verwendung von Polarkoordinaten zur Bearbeitung der Aufgabe vermeintlich einfacher, da der Betrag des Magnetfeldes eines geraden, stromdurchflossenen Leiters radialsymmetrisch ist (Dray & Manogue, 1999). Zum Prä-Messzeitpunkt vor der Intervention bietet die Bearbeitung der Magnetostatik-Aufgabe somit zusätzliche Einblicke darin, welches Koordinatensystem bevorzugt zur Argumentation herangezogen wird. Im Vergleich mit der Bearbeitung zum Post-Messzeitpunkt nach der Intervention lässt sich dann untersuchen, welchen Einfluss die Intervention auf diese Wahl hat. Dabei ist zu beachten, dass die MR-Lernaufgaben vorrangig die Differentialoperatoren in kartesischen Koordinaten instruieren; Divergenz und Rotation in krummlinigen Koordinaten werden nur als Transferaufgabe in die Lerneinheit integriert. Die Wahl des Koordinatensystems zum Post-Messzeitpunkt kann daher zudem Anhaltspunkte für die Notwendigkeit gezielter Instruktionen von vektoranalytischen Konzepten in krummlinigen Koordinaten bieten.

5. Fazit und Ausblick

Zur Analyse der Lernwirksamkeit multi-repräsentationaler Lernaufgaben zur Vektoranalysis im Zuge einer Replikationsstudie wurden kontextbezogene

Aufgaben zur Anwendung vektoranalytischer Konzepte in der Fluidmechanik und im Elektromagnetismus entwickelt. Diese adressieren zahlreiche Schwierigkeiten von Studierenden, die in Vorarbeiten vor allem in mathematisch-abstrahierten Kontexten auftreten, z. B. die Beurteilung der Divergenz und Rotation eines ebenen Vektorfelddiagramms und die Interpretation eines Oberflächenintegrals. Neben der reinen Kompetenzmessung bietet die Offenheit der Aufgabenstellungen und Antwortformate darüber hinaus vielfältiges Potential für weitere Forschungsrichtungen. Beispielsweise kann untersucht werden, welche Definition der Divergenz (differentiell oder integral) Studierende bevorzugt zur Argumentation heranziehen und welchen Einfluss die Intervention auf diese Wahl hat. Außerdem bietet die Aufgabenbearbeitung Einblicke in die Schwierigkeiten von Studierenden in der physikalischen Anwendung vektoranalytischer Konzepte, im Umgang mit kartesischen und krummlinigen Koordinaten, bei der Argumentation im Umgang mit vektoranalytischen Konzepten, beim Repräsentationswechsel verschiedener Vektorfeld-Darstellungen und bei der Skizzierung von Vektorfelddiagrammen.

6. Literatur

- Ainsworth, Shaaron; Prain, Vaughan; Tytler, Russell (2011): Drawing to learn in science. In: *Science*, 333(6046), 1096–1097, <https://doi.org/10.1126/science.1204153>
- Ambrose, Bradley S. (2004): Investigating student understanding in intermediate mechanics: Identifying the need for a tutorial approach to instruction. In: *American Journal of Physics*, 72, 453–459, <https://doi.org/10.1119/1.1648684>
- Baily, Charles; Astolfi, Cecilia (2014): Student reasoning about the divergence of a vector field. In: *Proceedings of the Physics Education Research Conference 2014*, Minneapolis, MN (AIP, New York, 2014), S. 31–44, <https://doi.org/10.1119/perc.2014.pr.004>
- Bollen, Laurens; Van Kampen, Paul; Baily, Charles; De Cock, Mieke (2016): Qualitative investigation into students' use of divergence and curl in electromagnetism. In: *Physical Review Physics Education Research*, 12(2), 020134, <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.020134>
- Bollen, Laurens; Van Kampen, Paul; Baily, Charles; De Cock, Mieke (2017): Student difficulties regarding symbolic and graphical representations of vector fields. In: *Physical Review Physics Education Research*, 13(2), 020109, <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020109>
- Bollen, Laurens; Van Kampen, Paul; De Cock, Mieke (2015): Students' difficulties with vector calculus in electrodynamics. In: *Physical Review Special Topics – Physics Education Research* 11(2), 020129,

- <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.11.020129>
- Burkholder, Eric; Murillo-Gonzalez, Gabriel; Wierman, Carl (2021): Importance of math prerequisites for performance in introductory physics. In: *Physical Review Physics Education Research*, 17(1), 010108, <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.17.010108>
- De Jong, Ton (2011): Instruction based on computer simulations. In: R. E. Mayer & P. A. Alexander (Hrsg.), *Handbook of Research on Learning and Instruction* (London: Routledge). S. 446–466.
- Dray, Tevian; Manogue, Corinne A. (1999): The vector calculus gap: Mathematics \neq physics. In: *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 9(1), 21–28, <https://doi.org/10.1080/10511979908965913>
- Gire, Elizabeth; Price, Edward (2012): Graphical representations of vector functions in upper-division E&M. In: *AIP Conference Proceedings*, 1413(1), S. 27–30, <https://doi.org/10.1063/1.3679985>
- Hahn, Larissa (2024): *Vektorfeldkonzepte in der Studieneingangsphase Physik. Über die Wirkung multi-repräsentationaler Lehr-Lern-Materialien und die Rolle der visuellen Aufmerksamkeit*. Dissertation (Göttingen: Universität Göttingen), Url: <https://ediss.uni-goettingen.de/handle/11858/15212>
- Hahn, Larissa; Blaue, Simon, A.; Klein, Pascal (2024): A research-informed graphical tool to visually approach Gauss' and Stokes' theorems in vector calculus. In: *European Journal of Physics*, 45, 025706, <https://doi.org/10.1088/1361-6404/ad2390>
- Hahn, Larissa; Klein, Pascal (2021): Multiple Repräsentationen als fachdidaktischer Zugang zum Satz von Gauß-Qualitative Zugänge zur Interpretation der Divergenz von Vektorfeldern. In: *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung, 1*, S. 95–100, Url: <https://ojs.dpg-physik.de/index.php/phydid-b/article/view/1151>
- Hahn, Larissa; Klein, Pascal (2022a): Kognitive Entlastung durch Zeichenaktivitäten? Eine empirische Untersuchung im Kontext der Vektoranalyse. In: *Unsicherheit als Element von naturwissenschaftsbezogenen Bildungsprozessen, Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, virtuelle Jahrestagung 2021*, S. 384–387, Url: https://www.gdcp-ev.de/wp-content/tb2022/TB2022_384_Hahn.pdf
- Hahn, Larissa; Klein, Pascal (2022b): Vektorielle Feldkonzepte verstehen durch Zeichnen? Erste Wirksamkeitsuntersuchungen. In: *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung, 1*, S. 119–126, Url: <https://ojs.dpg-physik.de/index.php/phydid-b/article/view/1259/1485>
- Hahn, Larissa; Klein, Pascal (2023a): Analysis of eye movements to study drawing in the context of vector fields. In: *Frontiers in Education*, 8, 1162281, <https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1162281>
- Hahn, Larissa; Klein, Pascal (2023b): The impact of multiple representations on students' understanding of vector field concepts: Implementation of simulations and sketching activities into lecture-based recitations in undergraduate physics. In: *Frontiers in Psychology*, 13, 1012787, <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.1012787>
- Hahn, Larissa; Klein, Pascal (2025): The impact of multiple representations on students' understanding of vector field concepts: Implementation of simulations and sketching activities into lecture-based recitations in undergraduate physics. In: *Frontiers in Psychology*, 16, 1544764, <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2025.1544764>
- Huffman, James A.; Vignal, Michael; Wilcox, Bethany R. (2020): Investigating upper-division students' interpretations of the Divergence Theorem. In: *Proceedings of the Physics Education Research Conference 2020*, Virtual (AIP, New York, 2020), S. 222–227, <https://doi.org/10.1119/perc.2020.pr.Huffman>
- Jones, Steven R. (2020): Scalar and vector line integrals: A conceptual analysis and an initial investigation of student understanding. In: *The Journal of Mathematical Behavior*, 59, 100801, <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100801>
- Jung, Kyesam; Lee, Gyoungcho (2012): Developing a tutorial to address student difficulties in learning curl: A link between qualitative and mathematical reasoning. In: *Canadian Journal of Physics*, 90(6), 565–572, <https://doi.org/10.1139/p2012-054>
- Klein, Pascal; Viiri, Jouni; Kuhn, Jochen (2019): Visual cues improve students' understanding of divergence and curl: Evidence from eye movements during reading and problem solving. In: *Physical Review Physics Education Research*, 15(1), 010126, <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.010126>
- Klein, Pascal; Viiri, Jouni; Mozaffari, Saleh; Dengel, Andreas; Kuhn, Jochen (2018): Instruction-based clinical eye-tracking study on the visual interpretation of divergence: How do students look at vector field plots? In: *Physical Review Physics Education Research*, 14(1), 010116, <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.010116>
- Kohnle, Antje; Ainsworth, Shaaron; Passante, Gina (2020): Sketching to support visual learning with interactive tutorials. In: *Physical Review Physics Education Research*, 16(2), 020139, <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.020139>

- Li, Jing; Singh, Chandralekha (2017): Investigating and improving introductory physics students' understanding of symmetry and Gauss's law. In: *European Journal of Physics*, 39(1), 015702, <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa8d55>
- Nieminen, Pasi; Savinainen, Antti; Viiri, Jouni (2012): Relations between representational consistency, conceptual understanding of the force concept, and scientific reasoning. In: *Physical Review Special Topics – Physics Education Research*, 8(1), 010123, <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.8.010123>
- Pepper, Rachel; Chasteen, Stephanie; Pollock, Steven; Perkins, Katherine (2012): Observations on student difficulties with mathematics in upper-division electricity and magnetism. In: *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 8(1), 010111, <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.8.010111>
- Rabe, Christian; Drews, Vincent; Hahn, Larissa; Klein, Pascal (2022): Einsatz von multiplen Repräsentationsformen zur qualitativen Beschreibung realer Phänomene der Fluidodynamik. In: *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung, 1*, S. 71–77, Url: <https://ojs.dpg-physik.de/index.php/phydid-b/article/view/1269/1491>
- Rau, Martina (2017): Conditions for the effectiveness of multiple visual representations in enhancing STEM learning. In: *Educational Psychology Review*, 29(4), 717–761, <https://doi.org/10.1007/s10648-016-9365-3>
- Schermerhorn, Benjamin P.; Thompson, John R. (2019): Physics students' construction of differential length vectors in an unconventional spherical coordinate system. In: *Physical Review Physics Education Research*, 15(1), 010111, <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.010111>
- Singh, Chandralekha; Maries, Alexandru (2013): Core graduate courses: A missed learning opportunity? In: *AIP Conference Proceedings*, 1513, S. 382–385, <https://doi.org/10.1063/1.4789732>
- Wallace, Colin S.; Chasteen, Stephanie V. (2010): Upper-division students' difficulties with Ampère's law. In: *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 6(2), 020115, <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.6.020115>
- Wieman, Carl E.; Adams, Wendy K.; Loeblein, Trish; Perkins, Katherine (2010): Teaching physics using PhET simulations In: *The Physics Teacher*, 48(4), 225–227, <https://doi.org/10.1119/1.3361987>
- Wu, Hsin-Kai; Krajcik, Joseph S.; Soloway, Elliot (2001): Promoting understanding of chemical representations: Students' use of a visualization tool in the classroom. In: *Journal of Research in Science Teaching*, 38(7), 821–842, <https://doi.org/10.1002/tea.1033>
- Wu, Sally P.; Rau, Martina A. (2018): Effectiveness and efficiency of adding drawing prompts to an interactive educational technology when learning with visual representations. In: *Learning and Instruction*, 55, 93–104, <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2017.09.010>

Anhang

Ebene Vektorfelder im \mathbb{R}^2 werden typischerweise durch die Komponentenzerlegung

$$\vec{v}(x, y, z = 0) = v_x(x, y)\vec{e}_x + v_y(x, y)\vec{e}_y \quad \{1\}$$

(x -Komponente v_x , y -Komponente v_y , kartesische Einheitsvektoren \vec{e}_x und \vec{e}_y) oder graphisch mithilfe von Pfeilen, dargestellt, welche Richtung und Betrag des Feldes in jedem Punkt repräsentieren. Für die physikalisch-technische Anwendung sind besonders die Eigenschaften des Feldes relevant. So gibt die Divergenz eines ebenen Vektorfeldes $\vec{v}(x, y, z = 0)$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y \quad \{2\}$$

in ihrer differentiellen Definition über die partiellen Ableitungen $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial y$ Aufschluss über die Quellen und Senken von \vec{v} und seine Rotation

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x \right) \vec{e}_z \quad \{3\}$$

indiziert die Wirbelstärke von \vec{v} . In ihrer Anwendung in drei Dimensionen werden häufig die integralen Definitionen der vektoriellen Feldkonzepte verwendet, die sich aus den Integralsätzen von Gauß,

$$\iiint_V dV \operatorname{div} \vec{v} = \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{v} \quad \{4\}$$

(für ein Volumen V mit der Oberfläche ∂V , dem Volumendifferential dV und dem vektoriellen Flächendifferential $d\vec{A}$), und Stokes,

$$\iint_A d\vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{v} = \oint_{\partial A} d\vec{l} \cdot \vec{v} \quad \{5\}$$

(für eine Fläche A mit der Randkurve ∂A , dem Flächendifferential $d\vec{A}$ und dem vektoriellen Wegelement $d\vec{l}$), ergeben. Der Gauß'sche Integralsatz verbindet dabei die Divergenz eines Vektorfeldes und den Fluss durch eine Randfläche, während der Stokes'sche Integralsatz eine Relation zwischen der Rotation eines Vektorfeldes und der Zirkulation entlang einer Randkurve herstellt. In diesen Sätzen und den daraus resultierenden Zusammenhängen werden die wesentlichen Eigenschaften von Vektorfeldern zusammengefasst.