

Analyse von Gravitationsinstabilitäten bei Sternen mithilfe einer Modellsequenz

Lina Jarck*, Hans-Otto Carmesin **,***

*Gymnasium Athenaeum, Harsefelder Str. 40, 21680 Stade

**Studienseminar Stade, Bahnhof Str. 5, 21682 Stade

*** Universität Bremen, Fachbereich 1, 28334 Bremen

lina.jarck@athenetz.de; hans-otto.carmesin@athenetz.de

Kurzfassung

In dieser Forschungsarbeit haben wir uns mit der Untersuchung von Gravitationsinstabilitäten bei Sternen beschäftigt. Dazu verwendeten wir eine progressive Sequenz von Modellen, teils mit variabler Dichte. Auch bieten die Modelle Möglichkeiten der Überprüfung und des Vergleichs. Zusätzlich optimieren wir unsere letztjährige Untersuchung. Um diesen Ansatz zu validieren, erstellen wir zunächst ein Modell, das die variable Dichte der Sonne als Funktion des Radius ermittelt. Da diese Funktion bekannt ist, lässt sich die Herangehensweise optimal überprüfen. Zur weiteren Progression und Überprüfung unserer Methode erstellen wir ein Modell mit variabler Dichte für einen Weißen Zwerg, bei dem die Chandrasekhar-Grenze unsere Ergebnisse bestätigt. Weiterführend modellieren wir die variable Dichte eines Neutronensterns im gekürzten Raum und vergleiche die Ergebnisse mit einem selbst erstellten Zustandsdiagramm. Das Diagramm zeigt Übergangszustände zwischen einem Neutronenstern, Schwarzen Loch und in verschiedene Schichte mit Quark-Gluon-Plasma, abhängig von Radius und Masse des Sterns.

Abstract

In this research paper, we focused on the investigation of gravitational instabilities in stars. For this purpose, we used a progressive sequence of models, some with variable density. The models also provide opportunities for verification and comparison. Additionally, we optimized our study from last year. To validate this approach, we first created a model that determines the variable density of the Sun as a function of radius. Since this function is well-known, the approach can be optimally verified. To further progress and verify our method, we created a model with variable density for a white dwarf, where the Chandrasekhar limit confirms our results. Subsequently, we modeled the variable density of a neutron star in a reduced space and compared the results with a self-constructed state diagram. The diagram shows transitional states between a neutron star, black hole, and various layers with quark-gluon plasma, depending on the radius and mass of the star.

1. Einleitung

In Sternen finden spannende physikalische Prozesse statt: Sterne erzeugen viele Atome verschiedener chemischer Elemente. In Sternen kann so hoher Druck entstehen, dass die Atome in Weißen Zwergsternen zu entarteter Materie werden. Wenn die Masse eines solchen Sterns die Chandrasekhar-

Masse M_{Ch} übersteigt, dann kann er kollabieren und zu einem Neutronenstern werden. Falls dessen Masse weiter zunimmt, kommt es zu Raumdehnungen, und oberhalb eines weiteren kritischen Wertes M_c kommt es zu einer weiteren Gravitationsinstabilität, und in der Folge zu einem Quark-Gluon-Plasma oder sogar zu einem Schwarzen Loch.

Diese Gravitationsinstabilitäten haben wir letztes Jahr bereits mithilfe eines Sternmodells untersucht, bei dem wir vereinfachend im ganzen Stern die gleiche Dichte angenommen haben. Tatsächlich sind aber der Druck und somit auch die Dichte der Materie im Stern umso größer, je näher die Materie am Zentrum ist. Das vereinfachte Programm hatte den Nutzen, dass man schichtenweise den Stern berechnen könnte, bis wir einen Gravitationsdruck erhalten haben, den wir mit dem von uns berechneten nach außen wirkendem Druck (beim Weißen Zwerg den Fermi-Druck) normalisieren konnten, indem wir die Masse des

Sternes verändern. Die Masse, bei der die beiden Drucke gleich groß sind, ist der Beginn der Kollabierung eines Sterns.

In unserem aktuellen Forschungsprojekt untersuchen wir daher allgemeinere Sternmodelle, bei denen diese Abhängigkeit der Dichte vom Zentrum zusätzlich ermittelt und berücksichtigt wird. Dabei leiten wir grundsätzlich die gleichen Gravitationsinstabilitäten her, wie mit dem vereinfachten Modell. Dadurch bestätigen wir unser Modell des Vorjahres durch unser neues fundamentaleres Modell. Darüber hinaus ermitteln wir die genauen Instabilitäten und stellen sie in einem Phasendiagramm dar. Zusätzlich ermitteln wir die unterschiedlichen Zustände der Materie im Stern, abhängig vom Abstand zum Zentrum. So erhalten wir besonders fundierte Erkenntnisse über den Stern, über die Umwandlungen der Materie im Stern, über Raumdehnungen, über Gravitationsinstabilitäten, über den dabei auftretenden Aufbau und darüber, wie diese spannenden Veränderungen von der Masse und vom Radius des Sterns abhängen.

2. Vorgehensweise und Ziel

- a) Das Forschungsprojekt „Analyse von Gravitationsinstabilitäten bei Sternen mithilfe einer Modellsequenz“ verfolgt das übergeordnete Ziel, die

Gravitationsinstabilitäten in unterschiedlichen Sternmodellen zu untersuchen und zu verstehen. Dabei steht die Entwicklung und Anwendung einer progressiven Modellsequenz mit variabler Dichte im Fokus. Hierbei haben wir folgende Vorgehensweise:

- b) Modellierung der variablen Dichte der Sonne: Initial wird ein Modell erstellt, das die variable Dichte der Sonne in Abhängigkeit vom Radius ermittelt. Diese bekannte Funktion dient als Ausgangspunkt und ermöglicht die optimale Überprüfung der angewandten Methodik.
- c) Weiterentwicklung und Überprüfung anhand eines Weißen Zwerges: Zur Progression und Überprüfung der Methodik wird ein Modell mit variabler Dichte für einen Weißen Zwerg erstellt. Die Ergebnisse werden mit der Chandrasekhar-Grenze verglichen, um die Validität des Ansatzes zu bestätigen.
- d) Modellierung eines Neutronensterns mit variabler Dichte: Ein weiteres Modell mit variabler Dichte wird für einen Neutronenstern erstellt. Die Ergebnisse werden in einem eigens erstellten Phasendiagramm analysiert, das die Übergangszustände zwischen Neutronenstern, Schwarzen Loch und einem Stern aus Quark-Gluon-Plasma in Abhängigkeit vom Radius und der Masse zeigt.
- e) Weiterentwicklung des Modells aus dem Vorjahr: Der Fokus liegt auf der Verbesserung des Modells aus dem Vorjahr, das sich mit dem Kollaps von Sternen beschäftigt. Hierbei wird insbesondere die Variable der Dichteverhältnisse innerhalb der Sterne berücksichtigt.
- f) Schlussfolgerungen und Erkenntnisgewinn: Durch die progressive Modellsequenz mit variabler Dichte sollen nicht nur hochwertigere Ergebnisse erzielt, sondern auch neue Erkenntnisse über Gravitationsinstabilitäten in verschiedenen Sternen gewonnen werden.

Das Projekt strebt an, durch die Weiterentwicklung und Anpassung der Modelle an die variablen Dichteverhältnisse innerhalb der Sterne einen vertieften Einblick in die zugrunde liegenden physikalischen Prozesse zu erhalten.

3. Hintergrund und theoretische Grundlagen

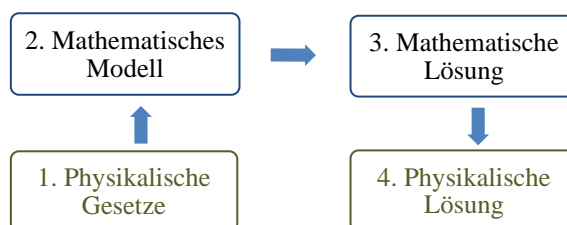
In unserem Forschungsprojekt des letzten Jahres haben wir Modelle entwickelt, um zu berechnen, wie groß die Masse eines Weißen Zwerges sein muss, um sich in einen Neutronenstern zu verwandeln. Von diesem Punkt aus haben wir ein weiteres Modell erstellt, das den Übergang vom Neutronenstern zu einem Schwarzen Loch oder einem Quark-Gluon-Plasma-Stern beschreibt. Diese Modelle sind so konzipiert, dass sie schichtweise vorgehen, um den lokalen Gravitationsdruck zu analysieren.

Bei diesem Ansatz berücksichtigen wir den Druck des Gases, der zum Beispiel beim Weißen Zwerg durch den Elektronendruck entsteht und dem

Gravitationsdruck standhält, bis der Stern kollabiert. Unsere Berechnungsmethode beinhaltet das Bestimmen des entgegengewirkenden Gasdrucks, bekannt als Fermi-Druck, nachdem wir den Gravitationsdruck ermittelt haben. Dann variieren wir die Masse so lange, bis die Drücke genau gleich groß sind, was darauf hinweist, dass der Stern instabil wird. Dabei spielt die Dichte eine entscheidende Rolle, da sie sich je nach Schicht ändert.

Durch die Berücksichtigung dieser Variation in unserem ersten Modell sind die Ergebnisse nun besser. Beim Weißen Zwerg ist dieses Manko noch akzeptabel, da es bereits eine präzise Masse gibt, die angibt, ab wann er instabil wird; diese Masse wird als Chandrasekhar-Masse bezeichnet. Im Fall des Neutronensterns gibt es jedoch noch weniger Klarheit über eine solche genaue Masse. Aus diesem Grund beabsichtigen wir im Verlauf dieses Projekts, entsprechende Werte zu bestimmen, um dazu beizutragen, diese Lücke zu schließen.

Mathematische Ebene



Physikalische Ebene

Abb. 1: Das Flussdiagramm stellt unsere Vorgehensweise graphisch dar und wird in diesem Aufsatz mehrfach bei der Erarbeitung der Modelle durchlaufen in dem Sonnenmodell (4.2), den Sternmodellen mit Quantengasen (4.3) und den Sternmodellen mit Quantengasen und Raumkrümmung, zum Beispiel für Neutronensterne und Quark-Gluon-Sterne (4.4).

4. Methoden

Wir beschreiben unser Vorgehen mit einem Flussdiagramm zur mathematischen Modellbildung, siehe Abb. (1).

Ziffer 1 - Physikalische Gesetze bezieht sich auf die von uns herangezogenen Grundlagen, siehe Carmesin (2004).

Ziffer 2 – Das mathematische Modell wird auf der mathematischen Ebene, die in Punkt 4.1.1 verwendeten Gleichungen beinhaltet. In diesem mathematischen Prozess werden wir ξ und ϕ ermitteln. Die Herleitung dieser Gleichungen sind in Carmesin (2004) dargestellt.

Ziffer 3 - Die mathematische Lösung kann aus den Gleichungen mit Hilfe des Eulerschen Polygonzugverfahrens, siehe Carmesin u.a. (2018) ermittelt werden. Daraus kann die Berechnung der Nullstelle von ξ erreicht werden, welche Voraussetzung für die physikalische Rückübersetzung als reale Lösung ist.

Ziffer 4 – Die Physikalische Lösung entspricht der realen Lösung. Diese wird erreicht durch das Durchlaufen des mathematischen Lösungsprozesses der verwendeten physikalischen Gesetze und kann als physikalische Rückübersetzung verstanden werden. Wir stellen diese in Punkt 4.1.2 Druck und Dichte dar. Flussdiagramm zur mathematischen Modellbildung:

4.1. Polytrope Sternmodelle

Im ersten Schritt legen wir einen Wert für ξ fest, der einfach die schrittweise Erhöhung des ξ -Werts angibt. Da dieser nicht genau definiert werden muss, reicht es ihn einfach klein zu halten, um Genauigkeit zu gewährleisten. In unserem Modell beträgt dieser Wert daher 0,01.

Graphische Auflösung der Lane-Emden-Gleichung:

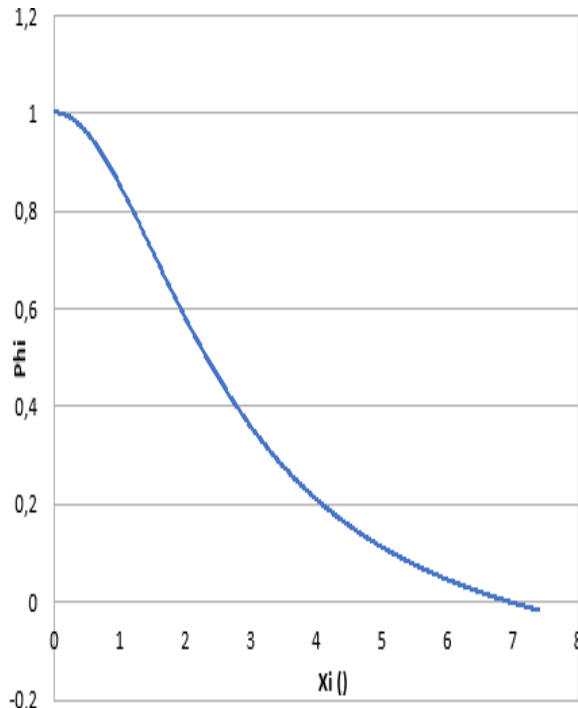


Abb. 2: Darstellung der Funktion Φ abhängig von ξ , Bestimmung des Faktors a mithilfe der Nullstelle. (Auf der x-Achse ist ξ in beliebig kleinen Algorithmen dargestellt; auf der y-Achse ist Φ dargestellt).

Als nächstes definieren wir eine Variable, die einen wesentlichen Unterschied zwischen anderen Objekten und der von uns betrachteten Sonne ausmacht. Die Variable, als n definiert.

4.1.1. Eulersches Polygonzugverfahren

Das hier beschriebene Lösungsverfahren ist nachzulesen in Carmesin u.a. (2018, Seite 56 bis 58).

Wir legen vorzeitige Werte für Φ' und Φ'' fest, die durch das Modell begründet sind. Φ entspricht zunächst 1, und Φ' ist zunächst 0. Dann geben wir die Iteration an:

$$\Phi'(\xi + d\xi) = \Phi'(\xi) + \Phi''(\xi) \cdot d\xi \quad \{1\}$$

$$\Phi = \Phi + \Phi' \cdot d\xi \quad \{2\}$$

Φ'' wird dann mit folgender Formel bestimmt:

$$\Phi''(\xi) = -\Phi^n(\xi) - 2/\xi \cdot \Phi'(\xi) \quad \{3\}$$

Daraus entsteht ein Graph, auf dem auf der

Hochachse Φ und auf der Querachse ξ dargestellt wird. Damit können wir nun die Parameter a und später die Masse bei der Nullstelle ablesen. Nun können wir einen Graphen erstellen, der anzeigt bei welchem Radius welche Dichte herrscht.

4.1.2. Druck und Dichte

Zur Übersetzung der mathematischen Lösung in die physikalische Lösung gehen wir von der Tatsache aus, dass die Nullstelle (ξ_0) von ξ , dem Sternradius R entspricht. Daher ist

$$\frac{dr}{d\xi} = \frac{R}{\xi_0} = a \quad \{4\}$$

$$dr = d\xi \cdot \frac{R}{\xi_0} \quad \{5\}$$

Zur Berechnung von ρ_c (Rho c) verwenden wir folgende Gleichung siehe Carmesin (2004).

Die Masse M kann durch die Variablen in der

Tabellenkalkulation dargestellt werden:

$$M = 4\pi \int_0^R r^2 \rho dr = 4\pi \rho_c a^3 \cdot I \quad \{6\}$$

Dabei kürzt I das Integral ab

$$I = \int_0^{\xi(r)} \xi^2 \phi^n d\xi \quad \{7\}$$

Daraus lässt sich das Integral I ermitteln:

$$I = -[\xi^2 \cdot d\phi/d\xi]_R = 2,0 \quad \{8\}$$

Beim Einsetzen ergab dies:

$$M = 8\pi \rho_c a^3 \quad \{9\}$$

Nach ρ_c umgestellt:

$$\rho_c = M/(8\pi a^3) \quad \{10\}$$

Diese Berechnungen wenden wir auf das Sonnenmodell an. Bei dem Weißen Zwerg kommen noch Quantengase und beim Neutronenstern die Raumkrümmung dazu. Dann wird für ρ_c als erstes eine Schätzung abgegeben, bevor es zur Berechnung kommt. Nach der Berechnung wird dieser Wert angepasst bis die Schätzung äquivalent zur Berechnung steht. An dieser Stelle ist das Programm noch nicht voll automatisch, könnte allerdings durch einen simplen Algorithmus ersetzt werden. Die Gleichsetzung des Programmes, um beispielsweise das Phasendiagramm zu erstellen ist nicht besonders anspruchsvoll, weswegen wir auf eine Anpassung durch einen Algorithmus verzichten haben. Um nun ein neues Modell zu erstellen, brauchen wir auch noch weitere Informationen. So ist es nun wichtig eine Konstante zu bestimmen, mit der wir die Druckwerte bestimmen können. Diese Konstante nennen wir K und diese wird aus der Auflösung des Parameter a entnommen. Daraus erfolgt folgende Formel, die in Spalte J1 dargestellt ist:

$$K = \frac{a^2 \cdot \rho_c^{1-1/n}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{4\pi G} \quad \{11\}$$

G in Spalte J2 repräsentiert die Gravitationskonstante, die konstant den Wert

$$G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \quad \{12\}$$

hat. In der Spalte I wird ein Testlauf in Form einer Auflösung eines Integrals durchgespielt, entscheidend ist dabei nur der letzte Wert, der in der Tabellenkalkulation ermittelt wird.

Dieses Modell gleicht im Wesentlichen dem Sonnenmodell. Ein Unterschied besteht in den hinzugefügten Spalten K bis P, ab der vierten Zeile.

In diesem Abschnitt berechnen wir, wie zuvor angekündigt, die beiden verschiedenen aufeinander wirkenden Drücke, um eine Masse zu bestimmen, bei der der Zustand der Kollabierung eintritt. Zunächst haben wir in Formel {11} die Konstante K bestimmt.

Mit diesem Wert können wir nun in Spalte K den Gasdruck bestimmen. Dies geschieht mit folgender Formel:

$$P(Gas) = K \cdot \rho^Y \tag{13}$$

Für die Berechnung des P_c - Werts des Drucks können wir eine ähnliche Formel verwenden. Der Unterschied ist, dass dieser Wert den Druckwert von der äußeren Schicht des Sterns angibt. Dafür werden jeweils nur das erste Rho verwendet und Gamma.

$$P_c = K \cdot \rho^Y \tag{14}$$

Aus Formel {13} und {14} erstellen wir ein Graph, siehe Abb. (3). Dieser gibt auf der y-Achse die jeweilige Teilung der Drücke an und auf der x-Achse den Druck durch den Radius.

In der Spalte N berechnen wir die Dichte in Abhängigkeit vom einzelnen Radius. Dafür verwenden wir folgende Formel:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{4}{3}\pi \cdot G \cdot \rho^2 r \tag{15}$$

Im nächsten Schritt ermitteln wir den entgegenwirkenden Druck, den Gravitationsdruck. Dieser wird in den Tabellenspalten von unten nach oben berechnet, da als Berechnungsgrundlage der Wert aus der darunterliegenden Spalte herangezogen wird.

$$P_{grav.}(r + dr) = P_{grav.}(r) + \frac{dp}{dr} \cdot dr \tag{16}$$

Zur Ermittlung des Zeitpunktes, wann die jeweiligen Drücke gleich groß sind und somit zur Kollabierung des Sterns führt, werden wir die Drücke teilen. Diese Masse wird in Spalte P5 erreicht, wenn der Wert 1 ist.

Dichteverlauf der Sonne:

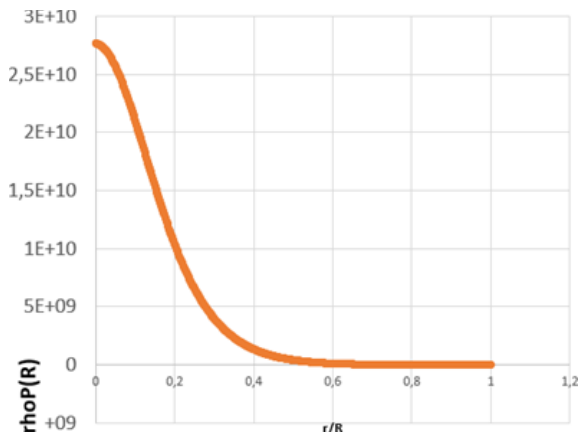


Abb. 3: Grafische Darstellung des Dichteverlaufes abhängig vom Abstand r zum Zentrum und vom Radius R der Sonne: Lösung der Lane-Emden-Gleichung mit dem Eulerschen Polygonzug-Verfahren (auf der x-Achse 0 im Zentrum und 1 ganz außen; auf der y-Achse die Dichte angegeben in kg/m^3).

4.2. Sonnenmodell

4.2.1. Relevanz

Wir erstellen verschiedene Modelle, angefangen mit einem Modell zur Bestimmung der Variabilität der Dichte der Sonne. Dazu verwenden wir polytrope Sternmodelle, siehe Chandrasekhar (1983), Kippenhahn und Weigert (1994), Carmesin (2004). Wir erstellen das Modell zuerst für die Sonne, diese ein Stern ist, der bereits gründlich untersucht wurde und dementsprechend viele Testergebnisse aufweisen kann, siehe Kippenhahn und Weigert (1994). Die Werte der variablen Dichte der Sonne sind bereits bekannt und wir können so unser Modell überprüfen.

Aufbau des Modells als tabellarische Darstellung:

	A	B	C	D	E	F
1	R	1,100E+07 dxi		0,01 h_quer		1,05E-34
2	dr	14,864,86 n		3,00 q=		1,9E+11
3		y		1,3333333333 h		6,63E-34
4	A	xi	rho	r	r/R	Phi
5	1	0,01	1,8955E+11		0	0
6	2	0,02	1,8949E+11	14,864,86	0,001351	0,3999
7	3	0,03	1,89E+11	29,729,73	0,002703	0,3998
8	4	0,04	1,89E+11	44,594,59	0,004054	0,399667
	G	H	I	J	K	L
a=	1,587E+06	K=	1,142E+10	P(Grav.)=	1,89548E+11	Test 2=
Masse=	1,32E+31	G=	6,67E-11	P(Gas.)=	1,243E+25	pc
				Test=	6,558E+13	
	Phi'	Phi''	Z	P(Gas.)=	pc	p(pc(Gas.)
	0	-1	0	6,33	1,243E+25	1,243E+25
	-0,01	0,0003	0		1,243E+25	9,996E-01
	-0,01	-0,33293	0		1,242E+25	9,992E-01
	-0,01333	-0,33268	0		1,241E+25	9,987E-01

Abb. 4: Modellaufbau von der Sonne und Dichte-Berechnung.

4.2.2. Konkrete Parameter

Das relativistische Elektronengas bei der Sonne ist $n = 3$ und dies ist von Objekt zu Objekt unterschiedlich. Für die folgenden Berechnungen benötigen wir die Radien der Objekte. Die Sonne hat einen Literaturwert von 696.000.000 m.

Anschließend geben wir eine Spalte A an, in der wir die kommenden Schichten auflisten. Im nächsten Schritt teilen wir den Radius (R) durch die Anzahl der Schichten, um einen Wert zu erhalten (dr), der den Durchmesser einer Schicht angibt. Diesen Wert stellen wir in der nächsten Spalte dar, indem er sich sukzessive aufaddiert.

Danach geben wir den ξ -Wert, wie zuvor beschrieben, in Spalte B an. Im Anschluss berechnen wir einen Wert für die Dichte im Zentrum ρ , der 76800 kg entspricht.

4.2.3. Validierung und Ergebnisse

Daraus lässt sich ableiten, dass im Zentrum der Sonne über 50 Prozent der Dichte konzentriert ist, im Vergleich zu einem geringeren Dichtewert im äußeren Bereich. Diese Verteilung vermittelt nicht nur Einblicke in die inneren Strukturen der Sonne, sondern demonstriert auch die Effektivität dieses Modells. Die erfolgreiche Anwendung dieses Ansatzes eröffnet die Möglichkeit, ähnliche Untersuchungen auf andere astrophysikalische Modelle auszudehnen. Dies könnte zu neuen Erkenntnissen und vertieftem Verständnis verschiedener Himmelskörper führen.

4.3. Weißer Zwerg-Modell

4.3.1. Voruntersuchung für den Weißen Zwerg

Aus diesem Grund entwickeln wir durch gezielte Anpassungen am Sonnenmodell ein neues Modell für einen Weißen Zwerg.

4.3.1.1. Quantengase

Die Quantengase sind wesentliche Merkmale des Weißen Zwergs, daher ist eine Überarbeitung der vorherigen Version notwendig. Quantengase entstehen bei zunehmendem Druck, unter welchem die Atome kaputt gehen.

In Carmesin u.a. (2020, S. 252) ist die Energie eines Quants angegeben, welche im relativistischen Quantengas ist:

$$E_1 = \hbar c (3\pi^2)^{1/3} \left(\frac{N}{L^3}\right)^{1/3} \quad \{17\}$$

Um die Energie für N-Teilchen zu bekommen, multiplizieren wir nun mit N. Für das Volumen des Quantengases gilt, siehe Carmesin u.a. (2020, S. 246 und 252):

$$L^3 = V \quad \{18\}$$

Das impliziert:

$$E_N = E_1 \cdot N = \hbar c (3\pi^2)^{1/3} \cdot \frac{N^{4/3}}{V^{1/3}} \quad \{19\}$$

Um den Druck zu erhalten, multiplizieren wir mit $\frac{1}{V}$

$$P_F = \frac{E_N}{V} = \hbar c (3\pi^2)^{1/3} \cdot \left(\frac{N}{V}\right)^{4/3} \quad \{20\}$$

Um die Masse in dieser Formel einzufügen, betrachten wir N. Dies entspricht dann:

$$N \cdot m_p = M$$

Dabei ist m_p die Masse eines einzelnen Protons.

$$N = \frac{M}{m_p} \quad \{21\}$$

Im Rahmen einer näherungsweisen Herleitung der Chandrasekhar-Masse verwenden wir folgende Näherungsformel:

$$V \approx R^3 \quad \{22\}$$

Damit wird aus Gleichung {20} folgende Gleichung:

$$P_F = \frac{E_N}{V} = \hbar c (3\pi^2)^{1/3} \cdot \left(\frac{M}{m_p R^3}\right)^{4/3} \quad \{23\}$$

Damit leiten wir die Formel für den Gravitationsdruck her:

$$F_G = \frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{r^2} \quad \{24\}$$

Die Fläche einer Kugel entspricht:

$$A = 4\pi \cdot r^2 \quad \{25\}$$

Da der Druck die Kraft pro Fläche ist, setzen wir diese zusammen, verwenden wir $M_1 = M_2 = M$ und erhalten folgende Formel:

$$P_{Grav} \approx \frac{GM^2}{R^4} \quad \{26\}$$

Wenn der Gravitationsdruck P_{Grav} den Druck des Quantengases P_F erreicht, dann entsteht im Stern eine Gravitationsinstabilität. Dabei gilt also:

$$\frac{GM^2}{R^4} \approx \hbar c \frac{M^{4/3}}{R^3} \cdot m_p^{-4/3} \quad \{27\}$$

Danach stellen wir die Formel um, so dass wir

$$R^4 \cdot M^{-4/3} \cdot \frac{1}{G} \quad \{28\}$$

multiplizieren:

$$M^{2/3} \approx \hbar c \frac{1}{G} m_p^{-4/3} \approx \left(\frac{\hbar c}{G}\right) \cdot \frac{1}{m_p^{4/3}} \quad \{29\}$$

Auf die Gleichung wenden wir die Potenz $\uparrow 3/2$ an:

$$M \approx \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{m_p^2} \quad \{30\}$$

Bei der Berechnung mit Quanteneffekten benötigen wir noch einige zusätzliche Werte. Mit dem Wert h, der Planck-Konstanten, berechnen wir \hbar :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad \{31\}$$

Danach benötigen wir noch einen Wert für m_1 , der sich durch eine Multiplikation von m_p , mit einer Konstanten μ ergibt. Dabei ist μ die mittlere Anzahl der Nukleonen pro Elektron.

Dieser Wert liegt zwischen 1 und 3 und kann bei verschiedenen Sternen verschiedene Werte annehmen.

Daraus können wir nun den geänderten K-Wert berechnen:

$$K = \hbar \cdot c \cdot (3\pi^2)^{1/3} \cdot m_1^{-4/3} \quad \{32\}$$

Wir leiten diesen Term für K her:

Wir nutzen Gleichung {20}, indem wir mit $m_1^{4/3}$ erweitern:

$$P_F = \hbar c (3\pi^2)^{1/3} \cdot \left(\frac{N \cdot m_1}{V}\right)^{4/3} \cdot m_1^{-4/3} \quad \{33\}$$

Wir identifizieren den Quotienten mit der Dichte:

$$P_F = \hbar c (3\pi^2)^{1/3} \cdot \rho^{4/3} \cdot m_1^{-4/3} \quad \{34\}$$

Wir nutzen Gleichung {13}, wobei der Gasdruck gleich dem Druck im Quantengas ist:

$$P(Gas) = P_F = K \cdot \rho^\gamma$$

Dies ergibt $\gamma = \frac{4}{3}$:

$$K \cdot \rho^{4/3} = \hbar c (3\pi^2)^{1/3} \cdot \rho^{4/3} \cdot m_1^{-4/3} \quad \{35\}$$

Wir teilen die Gleichung durch $\rho^{4/3}$:

$$K = \hbar \cdot c \cdot (3\pi^2)^{1/3} \cdot m_1^{-4/3} \quad \{36\}$$

Damit haben wir Gleichung {32} hergeleitet.

Daraus ergibt sich, wie in der graphischen Abbildung 5 zu sehen ist, die Erkenntnis, dass $\mu^2 \cdot M$ eine Konstante ist.

4.3.1.2. Ergebnisse

Durch diese beiden Modelle lassen sich in beiden Fällen wichtige Erkenntnisse gewinnen. Im ersten Modell ist der Faktor μ nicht berücksichtigt, weshalb das Ergebnis der Masse nicht direkt die Masse selbst ist und auch nicht direkt mit der Chandrasekhar-Masse verglichen werden kann, sondern mit M, siehe Chandrasekhar (1931). Dabei ist M die Masse der Gravitationsinstabilität.

Um M nun überprüfen zu können, an welchem Punkt die Chandrasekhar-Masse erreicht wird, können wir feststellen, dass M geteilt durch μ^2 gleich der Chandrasekhar-Masse ist. Es entsteht eine Potenzfunktion, und dadurch kann abgeleitet werden, dass M etwa bei einem Faktor von $11 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ liegt:

$$M_{Ch} = Q \cdot 10^{30} \text{ kg} = \frac{Q}{2} \cdot M_{\odot} = \frac{Q}{2} \cdot \text{Sonnenmassen} \quad \{37\}$$

$$M_{Instabilität} = \mu^2 \cdot M_{Ch} \quad \{38\}$$

Bei Chandrasekhar (1983) ist $Q = 11$, bei uns ist aufgrund einer Näherung $Q = 170$, siehe Abb. (7). Dies entspricht der Tatsache, dass die Gravitationsinstabilität bei 1,4 Sonnenmassen auftritt, bei $\mu = 1,98$. Der Vorteil bei diesem Ergebnis ist, dass es für alle Wert von μ gilt.

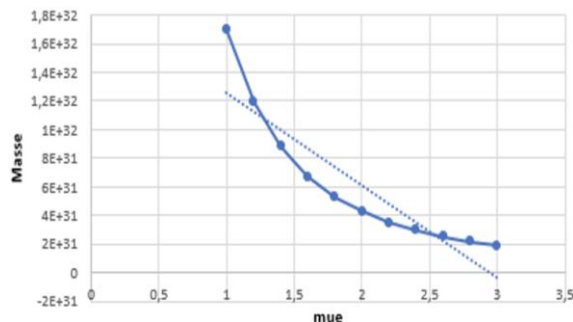


Abb. 5: Darstellung der Masse der Gravitationsinstabilität $M_{Instabilität}$ abhängig von μ .

4.3.2. Weißer Zwerg mit variierbarer Dichte

Excel-Tabelle:

A	B	C	D	E	F	
R	1,100E+07 dxi		0,01		a=	
dr	14.864,86 n		3,00 q=	1,088E+11	Mas	
		y	1,333333333			
A	xi	rho	r	r/R	Phi	Phi'
5	1	0,01	1,088E+11	0	0	1
6	2	0,02	1,0858E+11	14.864,86	0,00135135	0,9999
7	3	0,03	1,0853E+11	29.729,73	0,0027027	0,99980003
8	4	0,04	1,0849E+11	44.594,59	0,00405405	0,99966677

F	G	H	I	J	K	L
a=	1,587E+06 K=		1,202E+10 P(Grav.)=		1,0859E	
1,088E+11	Masse=	1,1E+31 G=	6,672E-11 P(Gas.)=		6,22E	
			Test=		5,73E	
Phi	Phi'	Phi''	Z		P(Gas.)=	pc
0	1	0	-1	0	6,93	6,228E+24
135	0,9999	-0,01	0,00029997	0		6,228E+24
7027	0,99980003	-0,009997	-0,3329335	0		6,223E+24
3405	0,99966677	-0,0133263	-0,3326839	0		6,2197E+24

Abb. 6: Modellaufbau vom Weißen Zwerg ohne Quanteneffekte

4.4. Neutronenstern Modell

4.4.1. Neutronenstern mit variierbarer Dichte

Unser Ziel ist es, ein Phasendiagramm mit variabler Dichte zu erstellen. Dafür erstellen wir zunächst ein Modell für einen Neutronenstern mit variabler Dichte. Die Vorgehensweise ist angelehnt an die Modellentwicklung für die Sonne und den Weißen Zwerg. Allerdings erfordert die Modellierung eines Neutronensterns einige spezifische Anpassungen und Hinzufügungen, die die Erstellung des Modells komplexer gestalten lässt.

Ein besonderes Merkmal in diesem Fall ist, dass bei einem Neutronenstern eine Raumkrümmung aufgrund eines Schwarzschildradius vorhanden ist. Die Einbeziehung des Schwarzschildradius führt zu Veränderungen einiger weiterer Parameter und lässt die Erstellung eines Modells mit variabler Dichte komplexer werden.

4.4.2. Raumkrümmung mit Quantengas und polytropen Sternmodellen und Polygonzug

Um die Änderungen im Modell zu berücksichtigen, gehen wir schrittweise vor. Zunächst verwenden wir das vorherige Modell des Weißen Zwergs mit der Berücksichtigung von Quanteneffekten bei K. In der Abbildung 7 haben wir alle Änderungen markiert, um diese erweiterten Werte hervorzuheben. Der erste Schritt ist die Erstellung von vier neuen Spalten, die die Raumkrümmung einbeziehen.

Aufbau des Modells und Graphen als Tabelle:

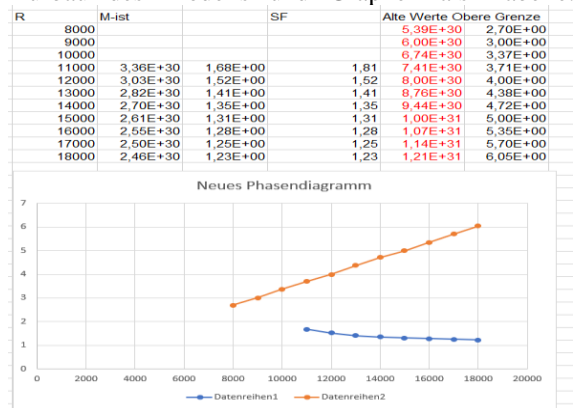


Abb. 7: Neues Phasendiagramm mit variierbarer Dichte und Raumkrümmung

Die erste neue Spalte ist dL. Der Faktor dx_i wird in der Simulation durch Epsilon E geteilt, weil dr zu dL wird, siehe Burisch (2022, S. 484-489). Unser berechnetes Phasendiagramm stimmt gut mit den Beobachtungen überein, siehe Margalit und Metzger (2017); Miller u.a. (2021).

In der dL -Spalte wird der Faktor dr mit der Abhängigkeit der Raumkrümmung so verändert, dass der Radius bewusst angepasst wird. Dies geschieht, indem wir den ursprünglichen dr -Wert durch den ϵ_E -Wert teilen. Dabei wird der ϵ Wert erstellt, indem wir folgende Formel verwenden:

$$\epsilon_E = \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} \quad \{40\}$$

Der Schwarzschildradius wird berechnet mit folgender Formel:

$$r = R_S = \frac{2GM}{c} \quad \{41\}$$

$$R_S = \frac{2Gm_r}{c^2} \quad \{42\}$$

$$m_r(\xi + d\xi) = m_r(\xi) + dm_r(\xi) \quad \{43\}$$

Der dm -Wert gibt die Masse pro aktuelle Schicht an und wird mit folgender Formel berechnet:

$$dm_r = 4\pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot dL \quad \{44\}$$

$$\text{mit } dL = \frac{dr}{\epsilon_E} \quad \{45\}$$

Wir erhalten die Größe dL , die wir durch Umstellen der Masse pro aktueller Schicht erhalten haben. Dieser Wert gibt Aufschluss über die Radius-Veränderung des Sterns in Bezug auf die Raumkrümmung. Bestimmt wird dieser Wert mit dem Teil-Radius und dem Epsilon Wert, der bei keiner Raumkrümmung 1 ist, somit keine Änderungen hervorhebt und bei Raumkrümmung abhängig von der Intensivität der Krümmung langsam abnimmt entlang der Schichten.

Dabei erhalten wir ein Modell, das genauen Aufschluss und Berücksichtigung der Raumkrümmung anzeigt.

Der m_r Wert ist die Masse innerhalb des Radius r , die für die Berechnung des Schwarzschildradius entscheidend ist:

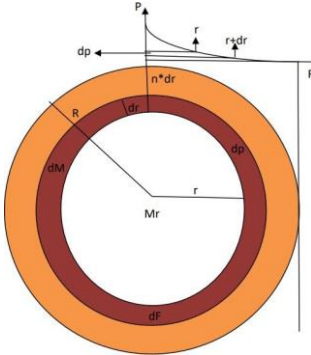


Abb. 8: Graphische Darstellung der Modellberechnung von Druckverhältnissen in einem Stern

4.4.3. Erstellung des physikalischen Phasendiagramm

Nach Fertigstellung des Modells mit variabler Dichte, welches Verbesserungen in den Quanten-Effekten und der Raumkrümmung integriert, haben wir ein passendes Phasendiagramm erstellt. Als ersten Schritt haben wir die obere Grenze berechnet.

Diese gibt an, dass alles, was definitiv einen größeren Sonnenfaktor als die Linie mit dem entsprechenden Radius aufweist, auf jeden Fall ein vollständiges Schwarzes Loch ist.

Um diesen bestimmten Zustand sicher feststellen zu können, ist es erforderlich sicherzustellen, dass der gesamte Stern sowohl von außen als auch von innen so weit zerfallen ist. Wenn $E = 0$ ist entsteht ein Schwarzes Loch. Wenn $P_{Grav} > P_F$ ist, dann zerstört die Gravitation die Neutronen. Diese Zerfälle werden im Modell konstant dokumentiert sein. Eine Solche Gravitationsinstabilität wurde bereits von Tolman (1939) oder Oppenheimer und Volkhoff (1939) untersucht.

Diese Bedingungen lassen sich bereits durch einfache Überlegungen mit der Schwarzschild-Metrik ableiten, so dass wir dafür bereits eine bestimmende Formel erhalten haben. Wir erkennen dabei, dass der Wert außerhalb des Schwarzen Loches liegt, wenn r größer als der Schwarzschild-Radius ist. Wir bestimmen den Grenzfall mit der Formel:

$$r = R_s = \frac{2GM}{c} \quad \{46\}$$

Aufgelöst bedeutet das:

$$M = \frac{r \cdot c}{2G} \quad \{47\}$$

und:

$$R \cdot c^2 / 2G \cdot 1/S_m \quad \{48\}$$

Das ergibt wieder Gleichung {12}. Um nochmal zusätzlich diese Formel zu überprüfen und sicher zu stellen, dass die Herleitung von der Schwarzschildmetrik korrekt ist, haben wir das Ganze noch mal manuell gemacht und genau dieselben Werte ablesen können. Dafür beachten wir, dass konstant vom

Anfang bis zu Ende des Sternradius eine Fehlermeldung schon beim Epsilon-Wert herausgegeben wird. Diese Masse wird als obere Grenze mit steigendem Radius immer größer und bildet den orangefarbenen Graph, siehe Abb. (9).

Die Untergrenze gibt dabei an, dass alles Darunterliegende auf jeden Fall ein Neutronenstern ist und noch keine Neutronen in einer Schicht kaputt gegangen sind. Zur Berechnung des realen Sonnenfaktors beachten wir die Stabilitätsgrenze. Das Kriterium dafür ist, dass der auswärtswirkende Druck dividiert durch den Gravitationsdruck 1 ergibt.

4.4.3.1. Evaluation des Neutronenstern-Modells mit variabler Dichte durch Testdurchläufe

Zur Sicherstellung der Zuverlässigkeit und Präzision des Modells haben wir Testdurchläufe durchgeführt. Insbesondere bei dem für uns relevanten Modell des Neutronensterns mit variabler Dichte haben wir im ersten Testverfahren sichergestellt, dass bei Verwendung geringer Dichte und physikalischer Dichte unter Berücksichtigung der Angaben eines Neutronensterns, keine signifikanten Änderungen auftreten sollten, da in diesem Fall keine Raumkrümmung vorhanden ist.

Im zweiten Test haben wir das Modell auf den Neutronenstern angewendet und überprüft, ob sich die Datenwerte verändern. Bei einer Veränderung haben wir in einem weiteren Schritt die zugrundeliegenden Ursachen eruiert. Dieses erforderte bei jedem Modell erneut einige Testdurchläufe, um sicherzustellen, dass die Ergebnisse konsistent und nachvollziehbar sind. Dadurch konnten potenzielle Fehlerquellen identifiziert werden und dieses sicherte die Qualität unserer gestellten Anforderungen an die Modelle. Für weitere Testdurchläufe haben wir auch Neutronensterne mit konstanter Dichte simuliert und das Phasendiagramm Abbildung 9 gewonnen.

5. Ergebnisse und Zielerreichung

Zunächst ist es gelungen ein verbessertes Modell zur Berechnung variabler Dichteverhältnisse innerhalb von Sternen zu entwickeln. Hierbei flossen Erkenntnisse aus vorherigen Modellen ein, insbesondere hinsichtlich der Kollabierung von Sternen. Die Modellierung der Sonne erwies sich als äußerst erfolgreich. Durch die präzise Darstellung der Dichteverteilung konnte ein tiefer Einblick in die inneren Strukturen der Sonne gewonnen werden.

Die Anpassung des Modells für Weiße Zwerge ergibt erfolgreich Instabilitätsfaktoren und die Chandrasekhar-Masse. Die Validierung und der Vergleich der Ergebnisse mit bekannten Testdaten bestätigen die Effektivität der Modelle für diese Sterne. Eine bedeutende Errungenschaft ist die Erstellung eines Phasendiagramms, das den Übergang zwischen Neutronensternen und Schwarzen Löchern verdeutlicht. Wir haben kritische Radien für die Stabilität von Neutronensternen bestimmt und ein Modell mit konstanter Dichte ermöglicht tiefere Einblicke in diese astrophysikalischen Phänomene.

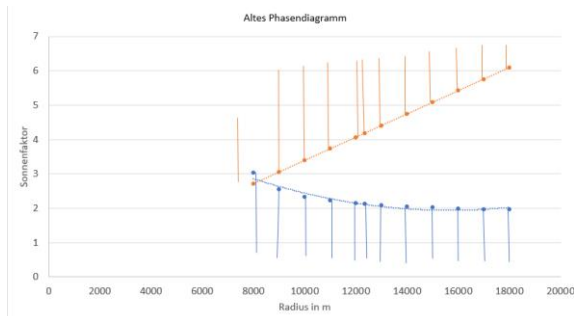


Abb. 9: Graphische Darstellung des Phasendiagramms mit konstanter Dichte

Das komplexe Modell für Neutronensterne mit variabler Dichte, welches sowohl Quanteneffekte als auch Raumkrümmung berücksichtigt, wurde erfolgreich entwickelt. Ein erweitertes Phasendiagramm mit neuen Parametern ermöglicht eine detailliertere Untersuchung dieser faszinierenden Himmelskörper. Die Verfeinerung des Modells konnte erfolgreich umgesetzt werden und somit die für uns wesentliche Zielerreichung. Die Modellierung der Sonne, die Anpassung für Weiße Zwerge und die Untersuchung von Neutronensternen, sowohl mit als auch ohne variable Dichte, tragen maßgeblich zu einem vertieften Verständnis der Gravitationsinstabilitäten verschiedener Sterne bei. Diese Forschungsergebnisse bieten bedeutsame Einsichten zur Weiterentwicklung unseres Wissens im Bereich der Astrophysik.

6. Ergebnisdiskussion

Im Phasendiagramm des Neutronensterns mit variabler Dichte haben wir festgestellt, dass der Druck im Verlauf des Radius erkennbar wird. Es zeigt sich, dass die Neutronen allmählich zerfallen, je weiter man sich vom äußeren Rand zum Inneren bewegt.

Eine unerwartete Erkenntnis ist, dass die Neutronen am Ende des Radius durch die Gravitation und den entgegenwirkenden Fermi-Druck zerfallen sind. Dabei entsteht der Eindruck, als ob sich die Neutronen bei näherer Betrachtung nach innen wieder zusammenfügen, bevor sie schließlich im Kern erneut auseinandergehen.

An diesem Entwicklungsstand haben wir festgestellt, dass die Neutronen am äußersten Radius tatsächlich zerfallen und sich später daraus möglicherweise Quarks bilden. Schon von außen ist sichtbar, dass der Neutronenstern zerstört ist, jedoch bildet sich darunter möglicherweise noch eine Schicht aus Quarks. Dafür ursächlich ist, wie in Spalte N zu sehen, dass das Ganze sich in drei Teile mit weniger Masse aufspaltet. Durch diese Erkenntnisse wird dasselbe Volumen zusätzlich möglicherweise mit einer Schicht aus Quark-Plasma und Gluonen gefüllt.

Es ist möglich das Phasendiagramm weiter zu optimieren, indem man diese Quarkschichten genauer berücksichtigt, berechnet und genauer anzeigt. Dadurch könnten präzise prozentuale Angaben mit einer zusätzlichen Gleichung eingefügt werden, um den Anteil der Quarks an der Schichtdicke genau zu berechnen. Eine Gravitationsinstabilität bei Neutronensternen

wurde bereits durch Oppenheimer, Volkhoff (1939) nachgewiesen.

7. Fazit und Ausblick

Grundlegende Inhalte zu diesem Thema wurden in einem Kurs zur Quantengravitation im Rahmen einer Jugend forscht AG unterrichtet. Der Kurs findet wöchentlich als Doppelstunde zusätzlich zur eigentlichen Jugend forscht AG statt.

In einer Doppelstunde wurde das Grundkonzept zum schwarzen Loch entsprechend dem Konzept des Entdeckers Michell (1784) entwickelt. Dazu wurde die Fluchtgeschwindigkeit im Gravitationsfeld einer Masse mit der Lichtgeschwindigkeit gleichgesetzt und nach dem Radius, also dem Schwarzschild Radius, aufgelöst. Dabei wird das grundlegende Konzept einer Gravitationsinstabilität entwickelt. Das Konzept ist universell, da keine Besonderheiten der Materie wichtig werden.

In einer zweiten Doppelstunde werden die Zeitdilatation und die relativistische Energie in der speziellen Relativitätstheorie hergeleitet, s. Burisch u. a. (2022, S. 472-483). Das ist grundlegend für die Herleitung der Raumkrümmung, welche wiederum wesentlich für das vertiefte Verständnis des schwarzen Loches ist.

In einer dritten Doppelstunde wird die Raumkrümmung in der Nähe einer Masse hergeleitet, s. Burisch u. a. (2022, 484-489). Das ist wesentlich für das vertiefte Verständnis des schwarzen Loches.

In einer vierten Doppelstunde wird die Druckverteilung innerhalb der Sonne für ein Modell mit konstanter Dichte ermittelt, s. Carmesin (2004). Hierbei entdecken die Schüler*innen, wie in einem Planeten der Druck mit der Tiefe zunimmt. Auch entwickeln sie die Kompetenz, dies mit einer Tabellenkalkulation als Computereperiment zu berechnen.

In den Doppelstunden 5-6 wird die Druckverteilung innerhalb der Sonne für ein Modell mit variabler Dichte behandelt, s. Carmesin (2004). Hierzu wird die Theorie polytroper Gaskugeln entwickelt und numerisch gelöst, s. Kippenhahn und Weigert (1994), Carmesin (2004). Dazu wird die Tabellenkalkulation der zweiten Doppelstunde erweitert. Hierbei erkennen und diskutieren die Lernenden, wie ein bestehendes Modell verfeinert werden kann und welche zusätzlichen Erkenntnisse das bietet.

In einer siebten Doppelstunde lernen die Schüler*innen experimentell an einer Elektronenbeugungsröhre die Welleneigenschaft von Elektronen kennen. Dies stellt eine Basis für das grundlegende Verständnis entarteter Materie dar.

In einer achten Doppelstunde wird das Elektronengas behandelt und die Fermi-Energie hergeleitet, s. Carmesin u. a. (2020, S. 246-247).

Als lebensweltliche Anwendung werden damit das Bändermodell sowie Nichtleiter, Halbleiter und Leiter behandelt. Das erzeugt ein vertieftes Verständnis von Elektronengasen, Fermi-Energie und entarteter Materie, sowie experimentelle Überprüfungen am

Beispiel von NTC – Widerständen und anderen Halbleiterbauteilen, s. Burisch u. a. (2022, S. 452-457).

In einer neunten Doppelstunde werden der Beta-Zerfall, seine Umkehrung und die Entstehung von Neutronensternen sowie entsprechende Beobachtungen behandelt. Das ist grundlegend zur Untersuchung von Gravitationsinstabilitäten in den Spätphasen der Sternentwicklung.

In einer zehnten Doppelstunde wird mithilfe der Druckverteilung innerhalb eines Sterns und der Fermi-Energie für das Sternmodell mit konstanter Dichte die Gravitationsinstabilität sowie ein Näherungswert für die Chandrasekhar – Masse hergeleitet, s. Carmesin (2004). Hierbei entdecken die Schüler*innen das Gleichgewichtskonzept der Gravitationsinstabilitäten bei den Spätphasen der Sternentwicklung.

In einer elften Doppelstunde wird das Modell der zehnten Doppelstunde auf Neutronen erweitert, wobei auch die Raumkrümmung berücksichtigt wird. Mit diesem Modell wird im Rahmen eines Jugend forscht-Projekts ein Radius – Masse Diagramm mit Übergängen von Neutronensternen zu möglichen Quark – Gluon – Sternen und weiter zu schwarzen Löchern entwickelt. Mit diesem Projekt erzielte Lina Jarck 2023 den ersten Platz im Regionalwettbewerb und den zweiten Platz im Landeswettbewerb.

In einer zwölften Doppelstunde wird geplant, wie das Modell der elften Doppelstunde auf variable Dichte erweitert werden kann. Mit diesem Modell wird im Rahmen eines Jugend forscht-Projekts ein Radius – Masse Diagramm mit Übergängen von Neutronensternen zu möglichen Quark – Gluon – Sternen und weiter zu schwarzen Löchern entwickelt. Mit diesem Projekt erzielte Lina Jarck 2024 den zweiten Platz im Regionalwettbewerb.

Insgesamt entwickeln die Lernenden bei diesem Thema verbreiterte und vertiefte Kompetenzen in den grundlegenden Bereichen Gravitation, Relativitätstheorie und Quantenphysik, s. Carmesin (2024). Zudem entwickeln die Schüler*innen bei dem Thema verbreiterte und vertiefte Kompetenzen in den Bereichen Sternentwicklung, Quantengase, Fermi-Energie, Thermodynamik und statistische Physik, Phasenübergänge, Instabilitäten, Halbleiter sowie Modelbildung, Computereperimente, Problemlösen und exaktes vernetztes Denken. Die Erfahrung zeigt, dass die Schüler*innen bei dieser breiten und vertieften kognitiven Aktivierung stets sehr motiviert und produktiv teilgenommen haben. Auch nutzten sie viele Gelegenheiten zur Selbstkompetenzerfahrung. Das Thema eignet sich daher hervorragend für die Begabtenförderung.

Das Thema wird in zwölf Schritten durch grundlegende Konzepte und progressiv aufeinander aufbauenden Modellentwicklungen erschlossen, s. Abb. (1). Das Konzept kann direkt im Unterricht eingesetzt werden. Zudem kann es zur Grundlegung von Schülerforschungsprojekten eingesetzt werden.

Die Untersuchung des Phasendiagramms eines Neutronensterns mit variabler Dichte hat wichtige Erkenntnisse über den Verlauf von Druck, Neutronenzerfall und der Bildung von Quarks offenbart. Die Beobachtung, dass die Neutronen allmählich zerfallen, während man sich vom äußeren Rand zum Inneren bewegt, wurde durch die Einflüsse von Gravitation und Fermi-Druck erklärt. Überraschenderweise scheint es jedoch, dass die Neutronen im mittleren Bereich zerfallen sind, während sie im inneren Bereich einer verringerten Raumkrümmung ausgesetzt sind.

Die Erkenntnis, dass das gleiche Volumen möglicherweise mit einer Schicht aus Quark-Plasma und Gluonen gefüllt wird, öffnet Möglichkeiten für die zukünftige Optimierung des Phasendiagramms. Eine genauere Berücksichtigung und Darstellung der Quarkschichten könnten durch präzise prozentuale Angaben mittels einer zusätzlichen Gleichung ermöglicht werden. Dies würde eine detailliertere Analyse der Quark-Anteile in Bezug auf die Schichtdicke ermöglichen.

Weiterführend kann zukünftig eine detaillierte Modellierung und Simulation erstellt werden, um die Wechselwirkungen und Dynamiken innerhalb der Quarkschichten genauer zu verstehen. Durch die Integration weiterer Parameter und Daten könnte das Phasendiagramm weiter verfeinert werden, um präzisere Vorhersagen und Erklärungen für das Verhalten von Neutronensternen zu liefern. Dies könnte auch zu tieferen Einblicken in die Struktur und Entwicklung dieser astronomischen Objekte führen und potenziell neue Erkenntnisse über die fundamentalen Kräfte und Materiezustände im Universum bieten.

8. Literatur

- Burisch, C. u. a. (2022): *Universum Physik Gesamtband SII*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- Carmesin, H.-O. (2004). *Sternmodelle*. In Nordmeier, V. and Oberländer, A., Editors, Tagungs-CD *Fachdidaktik Physik*, ISBN 3-86541-066-9, Berlin. Deutsche Physikalische Gesellschaft, Deutsche Physikalische Gesellschaft.
- Carmesin, H.-O. u. a. (2020): *Universum Physik Qualifikationsphase*. Niedersachsen. Berlin: Cornelsen Verlag.
- Carmesin, Hans-Otto (2024). *How Volume Portions Form and Found Light, Gravity and Quanta*. Berlin: Verlag Dr. Köster.
- Chandrasekhar, S. (1931). *The Highly Collapsed Configurations of a Stellar Mass*. Royal Astronomical Society, pp. 456- 466.
- Chandrasekhar, S. (1983). *On Stars, their Evolution and their Stability*. Nobel Lecture, pp. 142- 164.
- Kippenhahn, R. und Weigert, A. (1994) *Stellar Structure and Evolution*. Berlin: Springer Verlag.
- Margalit, B. and Metzger, B.D. (2017). *Constraining the Maximum Mass of Neutron Stars from Multi-messenger Observations of GW170817*. *The Astrophysical Journal Letters*.

- Michell, John (1784); On the means of discovering the distance, magnitude, etc. of the fixed stars in consequence of the diminution of the velocity of their light, in case such a diminution should be found to take place in any of them, and such other data should be procured from observations, as would be farther necessary for that purpose. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 74, pp. 35-57.
- Miller, M.C. a.u. (2021). The Radius of PSR J0740+6620 from NICER and XMM-Newton Data. *The Astrophysical Journal Letters*.
- Oppenheimer, J.R. and Volkoff, G.M. (1939). On Massive Neutron Cores. *Physikal Review*, Volume 55, pp. 374- 381.
- Tolman, Richard C. (1939). Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid. *Physical Review*, Volume 5 5, pp. 364- 373.

Danksagung

Wir möchten gerne unsere aufrichtige Dankbarkeit gegenüber Inga von Barga ausdrücken, die unsere Arbeit mit ihrer herausragenden Fähigkeit zur Korrektur und hilfreichen Formulierungen unterstützt hat. Ihre kritischen Einsichten und ihr Engagement haben maßgeblich dazu beigetragen, die Qualität unserer Arbeit zu verbessern.