

## Zur Rolle mathematischer Repräsentationen für das Verständnis quantenphysikalischer Prinzipien

Moritz Förster\*, Gesche Pospiech\*

\*Technische Universität Dresden, Professur für Didaktik der Physik  
[moritz.foerster@tu-dresden.de](mailto:moritz.foerster@tu-dresden.de), [gesche.pospiech@tu-dresden.de](mailto:gesche.pospiech@tu-dresden.de)

### Kurzfassung

Mathematische Strukturen sind wesentlicher Bestandteil der Beschreibung von Quantenphysik. Nicht zuletzt wird die Quantentheorie als eine der wichtigsten physikalischen Theorien überhaupt bezeichnet und Mathematik als wesentlich für ein konzeptionelles Verständnis angesehen. Dementsprechend scheint es plausibel, dass mathematische Beschreibungen schon in der Schule zu einem Verständnis quantenphysikalischer Konzepte beitragen können, weshalb es erstrebenswert ist, den Einfluss mathematischer Beschreibungen auf das Verständnis im Kontext der Schule umfassend zu untersuchen.

In einer qualitativen Laborstudie werden die Akzeptanz gegenüber einer mathematisch formalen Beschreibung sowie die Rolle mathematischer Repräsentationen für das Verständnis quantenphysikalischer Prinzipien untersucht. Dabei werden in einem ersten Schritt Lehramtsstudierende und Lehrkräfte befragt, worauf in einem zweiten Schritt die Befragung von Lernenden der Sekundarstufe II folgen soll. Ergebnisse der Befragung von Lehramtsstudierenden werden hier vorgestellt.

### 1. Motivation und theoretischer Rahmen

Die Forschung und Entwicklung in Gebieten, welche sich quantenphysikalische Eigenschaften zu Nutze machen, haben in den vergangenen Jahrzehnten weitreichende Fortschritte erzielt. Insbesondere moderne Quantentechnologien erleben mit der „Zweiten Quantenrevolution“ einen Aufschwung und bekommen auch eine größer werdende ökonomische Relevanz (Pospiech, 2021). Betrachtet man diese Entwicklungen, so wird deutlich, dass die Frage nach einer adäquaten Behandlung moderner Quantenphysik schon in der Schule immer weiter an Bedeutung gewinnt.

#### 1.1. Moderne Ansätze zur Behandlung von Quantenphysik in der Schule

In den vergangenen Jahren finden sich in der didaktischen Entwicklungs- und Forschungsarbeit diverse Ansätze zur Behandlung moderner Quantenphysik in der Schule, in welchen neben dem Einbezug aktueller Entwicklungen auch insbesondere nahegelegt wird, auf eine historische Einführung der Quantenphysik zu verzichten (z. B. Bitzenbauer, 2020; Müller, 2016).

In den Fokus rücken dabei solche Zugänge, die sich auf die Einführung von Quantenphysik über Zwei-Zustands-Systeme konzentrieren, also solchen quantenphysikalischen Systemen, welche nach einem quantenphysikalischen Messprozess nur zwei mögliche Ergebnisse aufweisen. Hierzu wurden in den vergangenen Jahren diverse Beiträge veröffentlicht (z. B. Dür & Heusler, 2012; Micheli & Stefanel, 2021;

Sadaghiani & Munteanu, 2015). Entscheidend ist, dass solche Zugänge aus didaktischer Sicht maßgeblich aus zwei Gründen Potential zur Einführung von Quantenphysik in der Schule bieten.

##### 1) Aktualität der Thematik

Quantenphysikalische Zwei-Zustands-Systeme sind als Qubits insbesondere für die Quanteninformatik relevant. Damit ermöglicht ihre Behandlung in besonderer Weise die Einbeziehung technologischer sowie gesellschaftlich relevanter Kontexte, wodurch ein wesentlicher Beitrag zur Allgemeinbildung ermöglicht wird.

Insbesondere kann bei Lernenden somit ein Bewusstsein über derzeitige Entwicklungen und deren Relevanz erzeugt und nicht zuletzt auch fächerübergreifend unterrichtet werden (Pospiech, 2021). Darüber hinaus könnte auch die mediale Präsenz der Quanteninformatik und des Quantum Computings zu einem hohen Interesse bei Lernenden und der Motivation führen, sich mit der Thematik beschäftigen zu wollen.

##### 2) Inhaltlich-didaktische Potentiale

Die Einführung der Quantenphysik über Zwei-Zustands-Systeme bringt inhaltliche Potentiale in dreierlei Hinsicht mit sich.

Zunächst bietet sie die Möglichkeit der Behandlung wesentlicher und grundlegender Prinzipien der Quantenphysik, wie dem Superpositionsprinzip sowie dem quantenphysikalischen Messprozess, der Unbestimmtheit und der Verschränkung (Dür & Heusler, 2012; Pospiech, 2021).

Des Weiteren werden Lernschwierigkeiten in der Unterscheidung beziehungsweise Abgrenzung von Quantenphysik und klassischer Physik umgangen. Insbesondere ist die Diskussion von Wellen- und Teilcheneigenschaften sowie die Problematik der Behandlung eines Welle-Teilchen-Dualismus (z. B. Bitzenbauer, 2020) nicht notwendig. Dies ermöglicht einen inhaltlichen Fokus auf die Behandlung der genannten und in Abbildung 1 zusammengefassten Prinzipien.

|                               |                             |
|-------------------------------|-----------------------------|
| Prinzip I<br>Superposition    | Prinzip II<br>Messprozess   |
| Prinzip III<br>Unbestimmtheit | Prinzip IV<br>Verschränkung |

**Abb. 1:** Grundlegende Prinzipien der Quantenphysik.

Nicht zuletzt bietet sich außerdem die Gelegenheit, die Rolle der Mathematisierung der Quantenphysik explizit zu thematisieren. Die mathematische Beschreibung von quantenphysikalischen Zwei-Zustands-Systemen ist insofern einfach, als dass sich diese durch zweidimensionale Vektorräume beschreiben lassen. Insbesondere wird zur Behandlung dieser Systeme keine Quantenphysik im Ortsraum benötigt, sodass keine Behandlung von Wellenfunktionen notwendig ist (Pospiech, 2021). Dies ermöglicht in einfacher Form eine mathematische Behandlung der Inhalte auch in der Sekundarstufe II.

## 1.2. Mathematische Beschreibungen in der Quantenphysik

Betrachtet man den Stellenwert, welchen eine mathematisch formale Behandlung von Physik gerade in der Quantenphysik hat, sowie die Tatsache, dass in der Fachphysik mathematische Strukturen der Quantenphysik inhärent sind, lässt sich die Mathematik als wesentlicher Teil des konzeptionellen Verständnisses ansehen (Pospiech et al., 2021).

Entsprechend scheint es plausibel, dass auch Lernenden der Sekundarstufe II ein mathematischer Formalismus, insbesondere unter Betrachtung von Zwei-Zustands-Systemen, helfen kann, ein tiefergehendes, konzeptionelles Verständnis von Quantenphysik aufzubauen.

Pospiech et al. (2021) heben die Rolle der Mathematik für die Schul-Quantenphysik hervor und beschreiben insbesondere, welche Chancen und Möglichkeiten eine mathematisch formale Behandlung von Quantenphysik auch in der Schule bieten kann. Die Autor:innen betonen, dass durch mathematische Betrachtungen qualitative Ergebnisse sowie physikalische Konzepte und Prozesse konsistent interpretiert sowie Vorhersagen getroffen werden können. Darüber hinaus können mathematische Beschreibungen den Aufbau mentaler Modelle ergänzen.

Nicht zuletzt scheint es vielversprechend, mittels mathematischer Ansätze nicht-klassische Denkweisen zu fördern und einen Wechsel hin zu quantenphysikalischen Denkweisen zu ermöglichen, da den

grundlegenden Prinzipien eine enge Verknüpfung von Mathematik und Physik innewohnt.

Diesen theoretischen Überlegungen, welche die Beforschung des Beitrags einer mathematisch formalen Behandlung der Physik von quantenphysikalischen Zwei-Zustands-Systemen in der Schule plausibel erscheinen lassen, steht gegenüber, dass die Thematik zumindest in Hinblick auf die Schule empirisch relativ unerforscht ist. Zwar gibt es verschiedene Arbeiten, welche aus theoretischen didaktischen Überlegungen heraus Konzepte zur mathematisch formalen Behandlung von Quantenphysik in der Schule beschreiben (z. B. Dür & Heusler, 2012; Pospiech, 2004) oder bereits in kleinem Rahmen evaluierte Unterrichtsgänge (Michellini & Stefanel, 2021), allerdings sind empirische Untersuchungen nur vereinzelt anzutreffen.

Empirische Forschung zur Rolle der Mathematik für ein quantenphysikalisches Verständnis lässt sich dagegen vor allem im Hochschulbereich finden (Singh & Marshman, 2015).

## 2. Zielsetzung und Forschungsgegenstand

Anknüpfend an die dargestellten Überlegungen zur Mathematisierung soll der Beitrag einer mathematisch formalen Beschreibung von Quantenphysik zum Verständnis quantenphysikalischer Konzepte untersucht werden, in Hinblick auf ein für die Sekundarstufe II geeignetes Niveau. Dabei wird die Polarisierung von Einzelphotonen als Zwei-Zustands-System genutzt und ein reduzierter Dirac-Formalismus verwendet.

Zur Beschreibung quantenphysikalischer Zwei-Zustands-Systeme kann eine Vielzahl mathematischer Repräsentationen Verwendung finden. Daher soll der Fokus neben einer mathematischen Beschreibung im Allgemeinen auf die Nutzung zweier Repräsentationen im Speziellen gelegt werden. Konkret wird die Ket-Notation als algebraische Repräsentation sowie die Bloch-Kugel als graphische Repräsentation untersucht.

Zusammenfassend steht dementsprechend die Untersuchung des Beitrags mathematischer Repräsentationen für das Verständnis grundlegender quantenphysikalischer Prinzipien in Hinblick auf die Schule im Zentrum der Forschung.

Dabei soll untersucht werden, welche Rolle mathematische Beschreibungen für das Verständnis von Schüler:innen spielen können. Weiterhin soll der untersuchte Personenkreis auch auf Lehrkräfte und Lehramtsstudierende erweitert werden. Von Interesse ist dabei neben der Frage, welche Rolle die Mathematik in der Lehrkräfteaus- und weiterbildung zur Quantenphysik spielen kann, auch, wie Schulpraktiker:innen den Einsatz eines reduzierten Dirac-Formalismus in der Schule einschätzen.

### 3. Studiendesign

Im Rahmen einer qualitativen Laborstudie werden leitfaden- und materialgestützte Interviews durchgeführt, um explorativ Einblicke in Einstellungen gegenüber den Inhalten zu bekommen, sowie zu untersuchen, inwiefern Lehramtsstudierende, Lehrkräfte und Schüler:innen die Inhalte verstehen und welche Lernschwierigkeiten auftreten. Der Studienablauf ist in Abbildung 2 dargestellt.



**Abb. 2:** Studiendesign mit abgeschlossenen und geplanten Befragungen.

Nachdem im Februar 2023 eine Pilotstudie mit  $N=5$  Studierenden durchgeführt wurde, in welcher Materialien und Erhebungsinstrumente erprobt sowie erste Explorationen vorgenommen wurden, erfolgt seit Sommer 2023 die Datenerhebung der Hauptstudie in mehreren Etappen.

Im Zeitraum von Juli bis September 2023 erfolgte die Durchführung von Befragungen mit insgesamt  $N=15$  Studierenden. Erhebungen mit Lehrkräften, welche auf einen ähnlichen Stichprobenumfang abzielen, sind bereits teilweise erfolgt.

In einem nächsten Schritt werden die Materialien für Lernende der Sekundarstufe II angepasst und weitere Interviews geführt.

### 4. Studierendenbefragung

Im Folgenden wird sich auf die Darlegung der Studierendenbefragung konzentriert. Es werden neben konkreten Forschungsfragen die Erhebungsmethodik sowie das Vorgehen und die Methodik der Datenauswertung dargestellt.

#### 4.1. Forschungsfragen

Aufbauend auf den bisherigen Überlegungen werden folgende Forschungsfragen gestellt.

- FF1: Wie schätzen Studierende die mathematisch formale Beschreibung von Quantenphysik im Rahmen der Teaching Experiments ein und akzeptieren sie diese?
- FF2: Welche Schwierigkeiten und Probleme treten beim Umgang mit der mathematisch formalen Beschreibung von Quantenphysik auf?

FF1 zielt auf die Untersuchung von Einstellungen gegenüber den Inhalten ab. Es soll die Frage beantwortet werden, inwiefern die Inhalte als sinnvoll und schlüssig erachtet und wie die mathematischen Beschreibungen für das eigene Verständnis eingeschätzt werden. Demgegenüber soll die Beantwortung von FF2 Aufschluss über konkrete Lernschwierigkeiten geben.

#### 4.2. Methodik der Datenerhebung

Zur Beantwortung der Forschungsfragen, insbesondere unter Berücksichtigung der geringen vorhandenen empirischen Ergebnisse innerhalb der fokussierten Zielgruppe, ist ein exploratives Vorgehen erforderlich. Wie in Kapitel 3 beschrieben, wurde eine qualitative Laborstudie mit Studierenden durchgeführt. Ziel war es, unter möglichst kontrollierten Bedingungen Lernprozesse und -schwierigkeiten zu erfassen sowie differenziert Einblicke in Einstellungen gegenüber einer mathematisch formalen Beschreibung von Quantenphysik zu bekommen. Dieses Vorgehen ermöglichte insbesondere, Handlungen und Denkweisen während der Bearbeitung von Aufgaben zum mathematischen Formalismus detailliert zu untersuchen (von Aufschnaiter, 2014).

Konkret wurden sogenannte Teaching Experiments, im deutschsprachigen Raum auch als „Akzeptanzbefragungen“ bezeichnet, durchgeführt. In dieser, ursprünglich von Jung (1992) vorgeschlagenen und kontinuierlich weiterentwickelten Methode, wurden leitfaden- und materialgestützte Einzelinterviews geführt. Hierbei wurde nach gegebenen fachlichen Erklärungen jeweils untersucht, inwiefern die Inhalte eingeschätzt und akzeptiert sowie verstanden wurden (z. B. Wiesner & Wodzinski 1996, Burde 2018, Bitzenbauer 2020).

Die Teaching Experiments folgten dabei der in Abbildung 3 dargestellten, fest vorgegebenen Struktur. Zunächst erfolgte eine Abfrage des Fachsemesters und des zweiten Studienfachs. Weiterhin erfolgte eine Abfrage des Vorwissens, in welcher erhoben wurde, inwiefern grundlegende, für das Teaching Experiment relevante Begriffe bereits bekannt waren. Hauptteil der Teaching Experiments bildete eine insgesamt sechsmalige, zyklische Abfolge von fünf Phasen in Anlehnung an Burde (2018):

1. Instruktion: Zunächst wird jeweils ein fachlicher Input gegeben und es erfolgt die Erklärung der Inhalte.
2. Akzeptanzabfrage: Es erfolgt die Abfrage der Akzeptanz der Inhalte und die befragten Personen geben eine Einschätzung zu den Inhalten.
3. Paraphrasierung: Die interviewte Person wird gebeten, basierend auf zwei bis drei Leitfragen, die Inhalte mit eigenen Worten wiederzugeben.
4. Transfer: Die interviewte Person muss ihr Wissen in ein oder zwei kurzen Aufgaben anwenden.
5. Reflexion: Die interviewte Person kann weitere Anmerkungen machen und Fragen stellen.

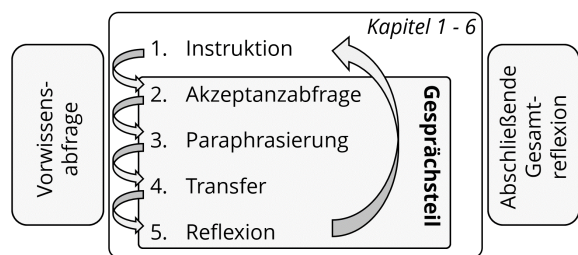


Abb. 3: Aufbau eines Interviews (Teaching Experiment).

Am Ende der Teaching Experiments schloss sich eine abschließende Gesamtreflexion an, in welcher sich noch einmal mit der Einheit insgesamt auseinandergesetzt werden sollte.

### 4.3. Inhaltliche Dimension der Teaching Experiments

Im Mittelpunkt der Teaching Experiments stand die Behandlung der grundlegenden Prinzipien der Quantenphysik (Abb. 1) sowie deren mathematisch formale Beschreibung mittels Ket-Notation und Bloch-Kugel. Entsprechend waren die in Abbildung 4 dargestellten sechs Kapitel strukturiert.

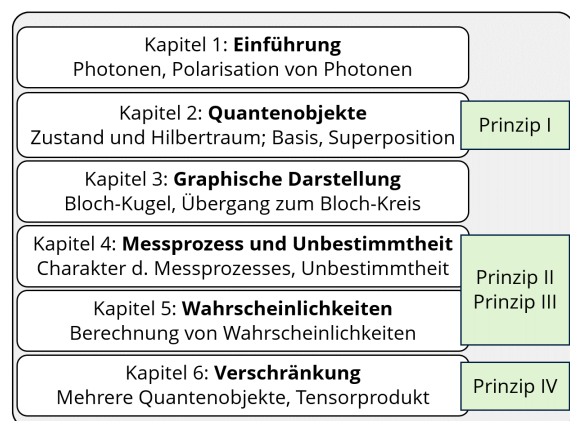


Abb. 4: Überblick über die Kapitel und Inhalte der Interviews.

Nach einem einführenden Kapitel 1 über die Polarisation von Photonen, in welchem Einzelphotonenexperimente an Polarisationsfiltern und am polarisierenden Strahlteilerwürfel vorgestellt wurden, folgte Kapitel 2, in welchem die Beschreibung von Quantenobjekten formalisiert wurde. Hier wurden die vektorielle Beschreibung von Zuständen sowie die zentralen Begriffe „Basis“ und „Superposition“ eingeführt. Im Mittelpunkt stand außerdem die Notation von Zuständen mittels Ket-Notation. Es folgte insbesondere eine Einführung der Notation von Superpositionszuständen mittels Addition von Basiszuständen.

In Kapitel 3 folgte die Behandlung der Darstellung von Zuständen an der Bloch-Kugel. Weiterhin wurde der Übergang zum Bloch-Kreis bei Betrachtung linearer Polarisationszustände thematisiert.

Kapitel 4 und Kapitel 5 behandelten den quantenphysikalischen Messprozess sowie die Unbestimmtheit. Hierbei wurde zunächst die Physik von Messprozess und Unbestimmtheit behandelt sowie die

Veranschaulichung dieser Prinzipien am Bloch-Kreis erläutert (Dür & Heusler, 2012), bevor dann die Berechnung konkreter Wahrscheinlichkeiten mittels der Betragsquadrate der Vorfaktoren beschrieben wurde.

Den Abschluss bildete Kapitel 6 zu Zuständen mehrerer Quantenobjekte, in welchem insbesondere die mathematische Beschreibung mittels Tensorprodukt sowie die Verschränkung im Mittelpunkt standen.

### 4.4. Methodik der Datenauswertung

Die Interviews wurden als Audiodatei aufgezeichnet und im Anschluss transkribiert und anonymisiert. Die für die Transkription verwendeten Regeln orientierten sich an den Systemen von Kuckartz (2022) beziehungsweise Dresing und Pehl (2018), wobei ergänzend dazu Regeln zur Transkription mathematischer Ausdrücke auf Geyer (2019) basierten. Die Anonymisierung der Daten erfolgte nach Meyermann und Porzelt (2014).

Im Mittelpunkt der Datenauswertung standen zwei Methoden der qualitativen Inhaltsanalyse.

#### 1) Bildung skalierender Kategorien

In einem ersten Schritt wurde eine skalierende Strukturierung nach Mayring (2010) vorgenommen, analog zum in Burde (2018) oder Bitzenbauer (2020) beschriebenen Vorgehen. Ziel dieser Bildung skalierender Kategorien war dabei die Einschätzung der Antworten von Akzeptanzabfrage, Paraphrasierung und Transfer auf einer dreistufigen Ordinalskala. Hierbei wurden in den jeweiligen Phasen die in Tabelle 1 dargestellten Kategorien unterschieden. Die jeweils beste Kategorie wurde mit (+) codiert, die mittlere Kategorie mit (0) sowie die Schlechteste mit (-).

Tab. 1: Kategorienbezeichnungen (vgl. Burde, 2018; Bitzenbauer, 2020).

| Akzeptanzabfrage             | Paraphrasierung                   | Transfer                 |
|------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|
| Vollständige Akzeptanz (+)   | Gelungene Paraphrasierung (+)     | Gute Lösung (+)          |
| Eingeschränkte Akzeptanz (0) | Befriedigende Paraphrasierung (0) | Befriedigende Lösung (0) |
| Keine Akzeptanz (-)          | Mangelhafte Paraphrasierung (-)   | Mangelhafte Lösung (-)   |

Die Bildung der Kategorien erfolgte deduktiv. Es wurde ein skalierendes beziehungsweise evaluatives Kategoriensystem entwickelt (Kuckartz, 2022), in welchem für alle Kategorien jeweils Definitionen, Ankerbeispiele sowie Codierregeln und Bemerkungen beschrieben werden.

#### 2) Bildung inhaltlich strukturierender Kategorien

Während die skalierende Strukturierung zunächst einen Überblick über Akzeptanz und Verständnis der

jeweiligen Kapitel sowie der Beantwortung der jeweiligen Fragen beziehungsweise Aufgaben liefern, stand das konkrete Erfassen der Einschätzungen zu den Inhalten sowie von Lernschwierigkeiten und Problemen im Mittelpunkt der Datenauswertung.

Deshalb wurde im zweiten Schritt eine inhaltlich strukturierende qualitative Inhaltsanalyse durchgeführt (Kuckartz, 2022). Es fand hierbei eine deduktiv-induktive Kategorienbildung statt. Nachdem zunächst deduktiv die Oberkategorien „Einschätzung der Inhalte“ und „Schwierigkeiten und Probleme“ in jedem Kapitel gebildet wurden, erfolgte induktiv die Bildung von Subkategorien. Weiterhin wurde auch die abschließende Gesamtreflexion mittels deduktiv-induktiver inhaltlich strukturierender qualitativer Inhaltsanalyse ausgewertet.

### 5. Erste Ergebnisse der Studierendenbefragung

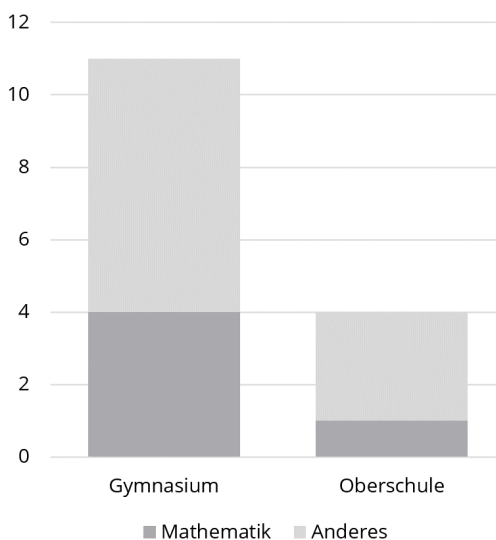
Die Studierendenbefragung wurde im Zeitraum von Juli bis September 2023 durchgeführt. Im Folgenden werden erste wesentliche Ergebnisse dargelegt.

#### 5.1. Beschreibung der Stichprobe

Im Rahmen der Studierendenbefragung wurden  $N=15$  Lehramtsstudierende in der Regel aus dem vierten Fachsemester interviewt. Diese Studierenden hatten noch keine Lehrveranstaltung zur theoretischen Quantenphysik besucht, sodass die eingeführte mathematisch formale Beschreibung mittels reduziertem Dirac-Formalismus zumindest unter Berücksichtigung des Vorwissens aus dem Physikstudium neu war.

Die Dauer der Interviews lag zwischen etwa 130 bis 170 Minuten mit einer mittleren Dauer von 150 Minuten. Nach Beendigung von Kapitel 4 wurde jeweils eine kurze Pause von etwa 10 bis 15 Minuten eingelegt.

Insgesamt wurden  $N=11$  Studierende des gymnasialen Lehramts und  $N=4$  Oberschullehramtsstudierende befragt (siehe Abb. 5).



**Abb. 5:** Zahl der befragten Studierenden, geordnet nach Schulart und zweitem Unterrichtsfach.

### 5.2. Skalierende Strukturierung

Die Ergebnisse der skalierenden Strukturierung der Akzeptanzabfrage sowie von Paraphrasierung und Transfer wurden tabellarisch, nach Befragten und Kapitel gelistet, aufgestellt (Burde 2018).

Die Ergebnisse der skalierenden Strukturierung von Paraphrasierung und Transfer geben Aufschlüsse über das Gelingen und die Schwierigkeiten bei einzelnen Fragen beziehungsweise Aufgaben, weshalb die Diskussion eine umfassende Beschreibung der jeweils gestellten Fragen sowie zu lösenden Aufgaben erfordert und hier nicht beschrieben werden soll.

Im Gegensatz dazu liefert das Ergebnis der skalierenden Strukturierung der Akzeptanzabfrage einen Überblick über die Einschätzung der jeweiligen Kapitel und ist Tabelle 2 dargestellt. Zeilenweise sind dabei die befragten Personen gelistet und spaltenweise die Akzeptanzabfragen der Kapitel 1 bis 6.

**Tab. 2:** Ergebnis der Akzeptanzabfrage.

|       | A 1 | A 2 | A 3 | A 4 | A 5 | A 6 |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Stu01 | +   | 0   | +   | 0   | 0   | +   |
| Stu02 | +   | +   | 0   | +   | +   | +   |
| Stu03 | +   | +   | +   | 0   | +   | +   |
| Stu04 | 0   | +   | +   | +   | +   | +   |
| Stu05 | +   | +   | 0   | 0   | +   | 0   |
| Stu06 | +   | +   | +   | +   | +   | +   |
| Stu07 | +   | +   | +   | +   | +   | +   |
| Stu08 | 0   | 0   | 0   | +   | +   | +   |
| Stu09 | +   | 0   | 0   | 0   | 0   | +   |
| Stu10 | +   | +   | 0   | -   | +   | +   |
| Stu11 | +   | +   | +   | +   | +   | 0   |
| Stu12 | +   | +   | 0   | +   | +   | +   |
| Stu13 | +   | +   | +   | +   | +   | 0   |
| Stu14 | +   | +   | 0   | +   | +   | +   |
| Stu15 | +   | +   | +   | +   | +   | +   |

Im Ergebnis lässt sich erkennen, dass sowohl Kapitel 1 und Kapitel 2 als auch die Kapitel 4 bis 6 im Mittel von den Studierenden gut akzeptiert wurden und lediglich vereinzelte Studierende eingeschränkte Akzeptanz oder in einem Fall gar keine Akzeptanz zeigten.

Insbesondere muss dabei bemerkt werden, dass Kapitel 2, in welchem die Einführung des reduzierten Dirac-Formalismus und der Ket-Notation erfolgt, mit lediglich drei Fällen von eingeschränkter Akzeptanz, von den Studierenden gut akzeptiert und positiv eingeschätzt wird. Gestützt wird dies durch Ergebnisse der inhaltlich strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse.

Auffällig ist allerdings, dass in Kapitel 3 knapp die Hälfte der Studierenden lediglich eingeschränkte Akzeptanz zeigen. Hier zeigt sich in der inhaltlich strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse, dass die Einführung der Bloch-Kugel, welche in Kapitel 3 erfolgt, von Studierenden kritisch gesehen wird und Schwierigkeiten bereitet.

### 5.3. Inhaltlich strukturierende qualitative Inhaltsanalyse

Während die durchgeführte skalierende Strukturierung zunächst einen Überblick über Akzeptanz und Hinweise auf das Verständnis innerhalb der einzelnen Kapitel liefert und zeigt, innerhalb welcher Kapitel und Aufgaben besonders wenige oder auffällig viele Schwierigkeiten auftreten, bildet die inhaltlich strukturierende qualitative Inhaltsanalyse den Kern der Datenauswertung.

Im Folgenden sind wesentliche Ergebnisse der Studierendenbefragung in Bezug auf Einschätzungen der Inhalte mit Schwerpunkt auf mathematisch formale Beschreibungen sowie den mathematischen Repräsentationen und aufgetretene Lernschwierigkeiten und Probleme dargestellt.

#### 5.3.1. Reduzierter Formalismus und Vektorbeschreibung von Zuständen

Die skalierende Strukturierung der Akzeptanzabfrage in Kapitel 2 macht deutlich, dass die Einführung der vektoriellen Beschreibung von Zuständen sowie die Einführung wesentlicher Konzepte und Begriffe wie Basis oder Superposition grundlegend akzeptiert und positiv bewertet werden. Deutlich wird dies auch in den Ergebnissen der inhaltlich strukturierenden Inhaltsanalyse, welche zeigen, dass keine Schwierigkeiten und Probleme gehäuft oder bei einer Vielzahl der Studierenden auftreten.

Fünf Studierende gaben explizit an, dass sie die Mathematik leicht fanden.

*Also ich fand die Erklärung gut nachvollziehbar, dadurch, dass auch wieder Anschauungsmaterial dabei war. Ich fand es schlüssig, logisch, verständlich. Und die mathematischen Beschreibungen waren ja bisher auch recht simpel. Also gut verständlich. (Stu03, Pos. 60)*

Insbesondere die Beschreibung von Polarisationszuständen mittels Vektoren wurde von Studierenden explizit als positiv für das eigene Verständnis hervorgehoben. Interessant ist dabei, dass mehrfach geometrische Interpretationen im zweidimensionalen Koordinatensystem auftauchen und Studierende selbstständig eine geometrische Vorstellung entwickeln. Dass diese geometrische Vorstellung für viele Studierende hilfreich ist, zeigen verschiedene Aussagen, von welchen im Folgenden stellvertretend zwei vorgestellt werden.

*Also in sich finde ich es gut, das mit der Vektorbeschreibung der Photonen. Kann man sich ja irgendwie vorstellen, dass da was Räumliches mit reinkommt. Ich denke, dass das relativ schlüssig und verständlich ist. (Stu04, Pos. 77)*

*[...] Die mathematischen Beschreibungen fand ich hilfreich, muss ich sagen. [...] Also als du darauf zurückgegriffen hast, dass man sich das als Vektoren vorstellen kann, finde ich, hat man so eine bildliche Vorstellung im Kopf, was dann*

*auch mit der Addition von diesen Zuständen [...] man sich so herleiten kann im Kopf. [...] [Es] war diese Vektorvorstellung, die ganz praktisch war. (Stu05, Pos. 62-64)*

Kleinere Probleme traten vereinzelt beim Umgang mit Beträgen von komplexen Zahlen auf. Zwei Studierende zeigten Schwierigkeiten beim Umgang mit dem Begriff der Basis im Zusammenhang mit dem Superpositionsprinzip.

#### 5.3.2. Ket-Notation

Neben der vektoriellen Beschreibung an sich, wird auch die Ket-Notation als algebraische Repräsentation gut akzeptiert. Studierende zeigen keine Probleme darin auf, diese Schreibweise als Konvention aufzufassen und zu akzeptieren.

Insbesondere in der abschließenden Gesamtreflexion wird der Vorteil der Ket-Notation in der kompakten und kurzen Schreibweise angemerkt. Hierbei wird allerdings nicht nur die Rolle der Mathematik als Sprache hervorgehoben, sondern auch, dass mittels Ket-Notation Eigenschaften physikalischer Systeme erfasst und Aussagen über den Ausgang von Experimenten und mögliche Messergebnisse vorhergesagt werden können.

*Also jetzt, wo ich das kenne, ist es glaube ich sehr hilfreich für das Verständnis. [...] Und die Ket-Notation / Man kann halt dann entsprechend die Basen aufstellen und die ist für das nachvollziehen von quantenmechanischen Experimenten glaube ich sehr, sehr wichtig und für das eigene Verständnis. (Stu04, Pos. 271)*

Mehrfach wird der Vorteil der Ket-Notation dann gesehen, wenn Zustände mehrerer Quantenobjekte betrachtet werden und Entscheidungen darüber gefällt werden sollen, welche Systeme verschränkt oder nicht verschränkt sind. Hier zeigt sich der Vorteil einer kompakten Notation der Zustände darin, insbesondere Verschränkung zu beschreiben. Auf die Frage, inwiefern die Erklärungen zu Zuständen mehrerer Quantenobjekte und der Verschränkung in Kapitel 6 verstanden wurden, antwortete Stu04 beispielsweise Folgendes:

*Also das fand ich nachvollziehbar, aber ich glaube auch nur durch die mathematischen Beschreibungen, weil ich mir das nur mathematisch irgendwie mit Kontext füllen kann. Weil so an sich der Verschränkungsbegriff rein, wenn man es jetzt mit dem Experiment erklärt, glaube ich, für mich keinen Sinn ergeben würde. Deswegen ist, glaube ich, hier die mathematische Beschreibung sehr wichtig, dass man dann eben sieht, okay, wenn [...] das so vorliegt, dann ist das da als Zustand verschränkt beziehungsweise dann nicht verschränkt. Ich glaube, so ist das dann besser nachvollziehbar tatsächlich durch die mathematischen Beschreibungen, als wenn ich das jetzt irgendwie ohne mache, weil ich ohne die mathematischen Beschreibungen halt auch nicht*

*wüsste, wie sich das ins System dann einfügt. (Stu04, Pos. 236-237)*

Weiterhin wird von einigen Studierenden ein Vorteil der Ket-Notation darin gesehen, schnell Wahrscheinlichkeiten zu erfassen und Messprozesse quantitativ zu beschreiben:

*Ich glaube, die Ket-Notation ist dann eher hilfreich, wenn ich wirklich dann die Wahrscheinlichkeiten berechnen will. (Stu04, Pos. 273)*

### 5.3.3. Bloch-Kugel und Bloch-Kreis

Bereits in der skalierenden Strukturierung zeigt sich, dass sich die Akzeptanz gegenüber der Bloch-Kugel als durchwachsen herausstellt. Dies äußert sich nicht nur in konkreten Verständnisproblemen, sondern auch in der grundlegenden Einschätzung der Darstellung von Polarisationszuständen an der Bloch-Kugel als abstrakt und kompliziert.

*[...] Es ist, glaube ich, auch ein bisschen anspruchsvoller geworden. Einfach auch schon alleine, wenn man sich vorstellen muss, dass das auf einer Kugel liegt. Das ist schon mal ein bisschen von der Vorstellung her schwieriger. [...] Das müsste man sich auch öfter mal vielleicht nachvollziehen. (Stu06, Pos. 75-76)*

Dennoch muss festgehalten werden, dass durchaus auch Studierende interviewt wurden, welche explizitangaben, keine Schwierigkeiten mit der Repräsentation von Zuständen an der Bloch-Kugel zu haben.

Bemerkt werden muss allerdings, dass die Visualisierungen zu Messprozess und Unbestimmtheit am Bloch-Kreis, welche Kerninhalt von Kapitel 4 sind, deutlich positiver eingeschätzt werden. Die Visualisierung des Messprozesses am Bloch-Kreis nach Dür & Heusler (2012) und die damit einhergehende Möglichkeit, Ausgänge von Experimenten anschaulich zu beschreiben, wird von acht Studierenden explizit als positiv für das Verständnis hervorgehoben.

*Also ich fand die Beschreibung über den Bloch-Kreis eigentlich echt schön, weil es war halt einfach nachvollziehbarer mit Bild. [...] Ich habe das gesehen und es war intuitiv so [...]. Also das fand ich wirklich sehr schön. (Stu06, Pos. 110)*

Person Stu10 gab an, dass sie die mathematischen Beschreibungen einleuchtender fand als die qualitativen Erklärungen zu Eigenschaften des quantenphysikalischen Messprozesses zu Beginn von Kapitel 4. Hierbei bezieht sie sich auf die die grafische Erklärung des Messprozesses am Bloch-Kreis.

*[...] Aber wiederum fand ich die mathematischen Beschreibungen besser, [...] da habe ich das so ein bisschen dann noch verstanden, anhand der Bloch-Kugel. (Stu10, Pos. 209)*

Es lässt sich erkennen, dass die Bloch-Kugel dann als positiv für das eigene Verständnis empfunden wird, wenn die Arbeit mit ihr über ein bloßes Darstellen von Zuständen hinaus geht und mit ihr bezüglich

Messprozess und Unbestimmtheit argumentiert und gearbeitet wird.

### 5.4. Zusammenfassung

Zusammenfassend lässt sich herausstellen, dass innerhalb der durchgeführten Teaching Experiments sowohl der reduzierte Formalismus allgemein, als auch die Ket-Notation im Speziellen akzeptiert und als positiv eingeschätzt werden.

Neben dem Vorteil einer kompakten Notation von Zuständen wird der Vorteil der Ket-Notation von Studierenden vor allem darin gesehen, mögliche Ausgänge von Messprozessen und insbesondere Messergebnisse sowohl qualitativ besser zu erfassen als auch quantitativ zu beschreiben.

Hinsichtlich der Akzeptanz der Bloch-Kugel zeichnet sich ein durchwachsenes Bild. Während die Bloch-Kugel selbst mit der Darstellung von Zuständen als komplex und schwierig eingeschätzt wird, deutet sich eine Änderung hinsichtlich Akzeptanz und Verständnis an, wenn sich zum einen auf den Bloch-Kreis beschränkt und zum anderen Messprozesse visualisiert werden. Die Bloch-Kugel wird oftmals dann als positiv für das Verständnis eingeschätzt, wenn mit ihr gearbeitet und der quantenphysikalische Messprozess oder die Unbestimmtheit behandelt werden.

### 6. Ausblick

Die hier beschriebene Methodik der Datenauswertung bildet die Grundlage für weiterführende Analysen. In weiteren Schritten soll die Analyse von in den Fragen der Paraphrasierungen und Aufgaben des Transfers genutzten Ressourcen und stattfindenden Lösungsprozessen erfolgen. Hierbei soll insbesondere untersucht werden, auf welche mathematischen Beschreibungen und Repräsentationen in eigenen Erklärungen der Studierenden zurückgegriffen wird. Außerdem sollen weiterhin Fallanalysen durchgeführt werden, um zu untersuchen, inwiefern sich Akzeptanz und Verständnis gegenüber den Inhalten innerhalb eines Interviews ändern.

Die Teaching Experiments, welche mit Lehrkräften durchgeführt wurden, sollen mit einem analogen Vorgehen ausgewertet werden, um im nächsten Schritt einen Vergleich der Ergebnisse von Lehramtsstudierenden und Lehrkräften durchführen zu können. Insbesondere soll hierbei untersucht werden, welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede es hinsichtlich der Einschätzung der Inhalte gibt und inwiefern ähnliche Lernschwierigkeiten auftreten. Des Weiteren ist von Interesse, inwiefern Lehrkräfte die Inhalte in Hinblick auf eine mögliche Behandlung in der Schule einschätzen.

In einem weiteren Schritt werden die Materialien und Erhebungsinstrumente noch einmal überarbeitet und für die Sekundarstufe II adaptiert, sodass die Teaching Experiments mit Schüler:innen durchgeführt werden können. Eine erste Pilotierung mit Lernenden der gymnasialen Oberstufe fand bereits statt.

## 7. Literatur

- Aufschnaiter, C. von. (2014). Laborstudien zur Untersuchung von Lernprozessen. In D. Krüger, I. Parchmann & H. Schecker (Hrsg.), *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung* (S. 81–105). Springer Spektrum.
- Bitzenbauer, P. (2020). Quantenoptik an Schulen: Studie im Mixed-Methods Design zur Evaluation des Erlanger Unterrichtskonzepts zur Quantenoptik. *Studien zum Physik- und Chemielernen*: Bd. 303. Logos Verlag.
- Burde, J.-P. (2018). Konzeption und Evaluation eines Unterrichtskonzepts zu einfachen Stromkreisen auf Basis des Elektronengasmodells. *Studien zum Physik- und Chemielernen*: Bd. 259. Logos Verlag.  
<https://doi.org/10.30819/4726>
- Dür, W. & Heusler, S. (2012). Was man vom einzelnen Qubit über Quantenphysik lernen kann. *PhyDid A - Physik und Didaktik in Schule und Hochschule*, 1–16.
- Jung, W. (1992). Probing Acceptance: A Technique for Investigating Learning Difficulties. In IPN: Bd. 131. *Research in physics learning: Theoretical issues and empirical studies; proceedings of an International Workshop held at the University of Bremen, March 4-8, 1991* (S. 278–295).
- Kuckartz, U. & Rädiker, S. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse: Methoden, Praxis, Computerunterstützung: Grundlagentexte Methoden* (5. Auflage). Grundlagentexte Methoden. Beltz Juventa.
- Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (11. Neuausgabe). Beltz Pädagogik. Beltz.
- Meyermann, A. & Porzelt, M. (2014). Hinweise zur Anonymisierung qualitativer Daten. Version 1.1. Leibniz-Institut für Bildungsforschung und Bildungsinformation
- Michelini, M. & Stefanel, A. (2021). A path to build basic Quantum Mechanics ideas in the context of light polarization and learning outcomes of secondary students. *Journal of Physics: Conference Series*, 1929(1).  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1929/1/012052>
- Müller, R. (2016). Die Quantenphysik im Spannungsfeld zwischen Fachlichkeit, empirischer Forschung und Schulpraxis. In C. Maurer (Hrsg.), *Gesellschaft der Didaktik der Chemie und Physik: Bd. 36. Authentizität und Lernen - das Fach in der Fachdidaktik* (Bd. 36, 13-24). Universität Regensburg.
- Pospiech, G. (2004). *Moderne Quantenphysik im Unterricht: Ein Lehrgang*. Logos Verlag.
- Pospiech, G. (2021). Die zweite Quantenrevolution: Quanteninformatik im Physikunterricht. In J. Grebe-Ellis & H. Grötzebauch (Vorsitz), *Virtuelle DPG-Frühjahrstagung 2021*. Symposium im Rahmen der Tagung von DPG.  
<http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/1158/1244>
- Pospiech, G., Merzel, A., Zuccarini, G., Weissman, E., Katz, N., Galili, I., Santi, L. & Michelini, M. (2021). The Role of Mathematics in Teaching Quantum Physics at High School. In B. Jarosievitz & C. Sükösd (Hrsg.), *Challenges in Physics Education. Teaching-Learning Contemporary Physics* (S. 47–70). Springer International Publishing.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-030-78720-2\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-78720-2_4)
- Sadaghiani, H. R. & Munteanu, J. (2015). Spin First instructional approach to teaching quantum mechanics in sophomore level modern physics courses. *2015 Physics Education Research Conference Proceedings*, 287–290.
- Singh, C. & Marshman, E. (2015). Review of student difficulties in upper-level quantum mechanics. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 11(2).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.11.020117>
- Wiesner, H. & Wodzinski, R. (1996). Akzeptanzbefragungen als Methode zur Untersuchung von Lernschwierigkeiten. In R. Duit & C. von Rhöneck (Hrsg.), *Lernen in den Naturwissenschaften* (S. 250–274). IPN.