

Open Educational Resources für den Hochschulbereich - Anschauliche Vektoranalysis für die Studieneingangsphase -

Larissa Hahn*, Simon Alvar Blau*, Patrick Höhn[^], Nina Merkert⁺, Pascal Klein*

*Georg-August-Universität Göttingen, Physik und ihre Didaktik, Friedrich-Hund-Platz 1, 37077 Göttingen,

[^]Georg-August-Universität Göttingen, Institut für Informatik, Goldschmidtstraße 7, 37077 Göttingen,

⁺Technische Universität Clausthal, Abteilung Computational Material Sciences/Engineering, Arnold-Sommerfeld-Straße 6, 38678 Clausthal-Zellerfeld

larissa.hahn@uni-goettingen.de

Kurzfassung

In der Vektoranalysis werden Konzepte der Vektorrechnung und der höherdimensionalen Analysis verknüpft, um die physikalisch-technische Welt mathematisch zu beschreiben. Damit stellt sie einen zentralen Bestandteil universitärer Lehre in der Studieneingangsphase physikalisch-technischer Studiengänge dar; den Studienanfänger:innen bereitet die Vektoranalysis jedoch nachweislich Schwierigkeiten. Vor diesem Hintergrund wurden im Rahmen der niedersächsischen Förderlinie „Förderung von OER an Niedersächsischen Hochschulen“ als Kooperation zwischen der Physikdidaktik der Universität Göttingen, der Abteilung Computational Material Sciences/Engineering der TU Clausthal und dem Simulationswissenschaftlichen Zentrum Clausthal-Göttingen innovative Lehr-/Lernmaterialien zu verschiedenen Konzepten der Vektoranalysis entwickelt. Dies umfasst die Konzeption digital-gestützter Lernumgebungen sowie wissenschaftsnaher Anwendungsbeispiele unter Berücksichtigung vielseitiger didaktischer Ansätze, wie multiplen Repräsentationen, Zeichenaktivitäten, Simulationen und eye movement modelling examples (EMME). In fünf Lernmodulen werden diese als flexibel einsetzbare Open Educational Resources (OER) auf der Plattform ‚twillo‘ für Studierende und Lehrende physikalisch-technischer Studiengänge bereitgestellt.

1. Einleitung

Im Zuge der Open Education Bewegung, welche eine Öffnung der Bildung für breite Bevölkerungsschichten zum Ziel hat, forcieren Politik und Hochschulen zunehmend die Entwicklung von Open Educational Resources (OER; BMBF, 2022). Diese frei verfügbaren Bildungsmaterialien stehen unter offener Lizenz und können uneingeschränkt geteilt und verändert werden (Deutsche UNESCO-Kommission, 2020). So besteht die Möglichkeit, die OER an spezifische Lehr- und Lernkontexte anzupassen und kollaborativ weiterzuentwickeln. Die Entwicklung von OER bietet sich für alle Themen und Inhalte an, die hochschulübergreifend in universitären Lehrveranstaltungen vermittelt werden.

Die Vektoranalysis ist ein solcher Lerngegenstand in der Studieneingangsphase physikalisch-technischer Studiengänge. Sie verknüpft Konzepte der Vektorrechnung und der höherdimensionalen Analysis, um physikalisch-technische Anwendungen, z. B. in der Elektrodynamik oder Festkörpermechanik, mathematisch zu beschreiben. Aus der immanenten fachlichen Relevanz (für einen Abriss vektoranalytischer Grundlagen siehe Anhang) folgt eine große Bedeutung eines fundierten Verständnisses der Vektoranalysis für physikalisch-technische Studiengänge. So fanden Burkholder et al. (2021) einen signifikanten Zusammenhang zwischen einer umfangreichen Vorbereitung der Vektorrechnung und der Leistung von

Studierenden in einem Einführungskurs zum Elektromagnetismus. Weitere Forschungsergebnisse zeigten jedoch, dass vor allem die für das physikalische Verständnis relevanten konzeptionellen Hintergründe Studierenden Schwierigkeiten bereiten (Singh & Marries, 2013). Da in der gängigen Praxis häufig formal-abstrakte, mathematische Erklärungsansätze genutzt werden, zeigt sich an dieser Stelle die Notwendigkeit innovativer Lehr-/Lernmaterialien zur Vektoranalysis. Über klassische Lehrmittel hinaus ermöglicht die freie Zugänglichkeit und Modifizierbarkeit solcher Materialien, dass diese sowohl Lehrenden Anhaltspunkte bei der Konzeption universitärer Lehrveranstaltungen liefern, als auch Studierende beim selbstgesteuerten Lernen, z. B. zur Wiederholung und Vertiefung von Vorlesungsinhalten, unterstützen können.

Vor diesem Hintergrund wird der aktuellen Linie zur Open Education folgend in diesem Beitrag die Entwicklung forschungsbasierter, multi-repräsentationaler Open Educational Resources (OER) zur Vektoranalysis vorgestellt, die auf der visuellen Interpretation der vektoriiellen Feldkonzepte beruhen, Zeichenaktivitäten, Simulationen und eye movement modelling examples (EMME) als fachdidaktische Methoden integrieren und aktuelle Anwendungen aus den Ingenieurwissenschaften aufgreifen.

2. Fachdidaktischer Hintergrund

In diesem Abschnitt werden die empirischen und theoretischen Grundlagen für die Entwicklung der OER

diskutiert. Zu diesem Zweck werden zunächst bisherige empirische Ergebnisse zu studentischen Lernschwierigkeiten sowie blickbasiertem Problemlöseverhalten im Umgang mit Vektorfeldern und vektoriellen Feldkonzepten zusammengefasst, um anschließend den Mehrwert multipler Repräsentationen, sowie weiterer didaktischer Methoden, konkret Zeichenaktivitäten, Simulationen und eye movement modelling examples (EMME), zu erläutern.

2.1. Lernschwierigkeiten und Blickverhalten im Umgang mit vektoranalytischen Konzepten

Der Repräsentationswechsel zwischen der graphischen Darstellung von Vektorfeldern als Vektorfelddiagramm und der algebraischen Beschreibung als Formel (Gl. 1 Anhang) bereitet Studierenden zahlreiche Probleme (Bollen et al., 2017). Neben typischen Schwierigkeiten im Umgang mit Vektoren, u. a. bezüglich der Verwendung von Einheitsvektoren beim Skalar- oder Vektorprodukt (Barniol & Zavala, 2014), bereitet Studierenden bei der Konstruktion eines Vektorfelddiagramms anhand eines algebraischen Formelausdrucks vor allem die Vektoraddition Schwierigkeiten (Bollen et al., 2017). Beim umgekehrten Repräsentationswechsel von der graphischen zur algebraischen Form stellt vor allem die Verwendung von Einheitsvektoren und die Differenzierung zwischen Komponenten und Koordinaten ein Problem dar (Bollen et al., 2017; Gire & Price, 2012).

Neben konzeptionellen Lücken im Umgang mit Vektorfeld-Repräsentationen sind vor allem Lernschwierigkeiten von (Physik-)Studierenden im Umgang mit vektoranalytischen Konzepten Gegenstand aktueller Untersuchungen. Diese ergaben zahlreiche Lücken bezüglich der konzeptionellen Erläuterung der Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes. So fanden Bollen et al. (2015) heraus, dass nur etwa 20% der Studienteilnehmenden bei der Frage nach einer Interpretation von „ $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ “ und „ $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ “ konzeptionell antworteten, die Mehrheit gab einen algebraischen Ausdruck an. Im Hinblick auf die graphische Darstellung von Vektorfeldern zeigten weitere Untersuchungen, dass Studierende Schwierigkeiten haben, zu beurteilen, ob ein Vektorfelddiagramm divergenz- bzw. rotationsfrei ist oder nicht (Ambrose, 2004; Bollen et al., 2015; Jung & Lee, 2012; Klein et al., 2018; 2019; Pepper et al., 2012; Singh & Maries, 2013). Außerdem finden sich bei Studierenden z. T. Vorstellungen über Divergenz und Rotation, die einer wörtlichen Übersetzung der Begriffe gleichkommen, z. B. Divergenz als ein „Auseinanderlaufen“ des Feldes (Baily et al., 2016; Bollen et al., 2016; Pepper et al., 2012) oder Rotation als „Biegung von Vektoren“ (Baily et al., 2016; Bollen et al., 2016; 2018; Jung & Lee, 2012). Weiterhin findet eine lose Assoziation der Divergenz mit Quellen und Senken statt, Rotation wird an der Richtungsänderung der Vektoren festgemacht, und sowohl Divergenz als auch Rotation werden als globale Eigenschaften eines Feldes aufgefasst (Baily et al., 2016; Bollen et al., 2018). Singh und Maries (2013)

summierten treffend, dass selbst Studierende mit Hochschulabschluss Schwierigkeiten mit den Konzepten der Divergenz und Rotation haben, obwohl sie wissen, wie diese für ein gegebenes Vektorfeld mathematisch berechnet werden. Mehrere Studien vertieften diese Forschungslinie und identifizierten zahlreiche Lernschwierigkeiten, die sich vor allem auf die Vektorkomponentenzerlegung und das Konzept der Kovariation zwischen Feldkomponenten und Koordinaten in den partiellen Ableitungen beziehen. So zeigte sich beispielsweise, dass Studierende die Änderung eines Vektorpfeils mit seinem Wert verwechselten (Pepper et al., 2012). Neben der Divergenz und Rotation von Vektorfeldern sind bei den Integralsätzen von Gauß und Stokes vor allem Weg-, Oberflächen- und Volumenintegrale zentral, welche in ihrer physikalisch-technischen Anwendung in den Ingenieurwissenschaften zumeist als Summe infinitesimaler Änderungen interpretiert werden. Hier fanden Pepper et al. (2012), dass Studierenden sowohl die Berechnung als auch die Interpretation dieser Integrale als Summe infinitesimaler Änderungen Probleme bereitete. Verschiedene Studien in physikalisch-technischen Kontexten gingen über die Untersuchung von mathematischen Problemlöseszenarien der Vektoranalysis hinaus. Sie zeigten, dass konzeptionelle Lücken bezüglich vektoranalytischer Inhalte zu einem unsachgemäßen Verständnis und Fehlern bei der Anwendung essentieller Prinzipien in physikalisch-technischen Anwendungsbereichen führen, z. B. in Bezug auf die Maxwell'schen Gleichungen des Elektromagnetismus (Bollen et al., 2015; 2016), das Gauß'sche Gesetz (Li & Singh, 2017) oder bei konservativen (Kraft-)Feldern (Ambrose, 2004; Jung & Lee, 2012).

Die beschriebenen Schwierigkeiten bezüglich des Repräsentationswechsels vom Vektorfelddiagramm zur Formel sowie der Interpretation vektorieller Feldkonzepte anhand von Vektorfelddiagrammen konnten durch Analysen der Blickdaten von Studierenden mittels Eye-Tracking validiert werden (Hahn & Klein 2023a; 2023b; Klein et al., 2018; 2019; 2021). Diese ermöglichten außerdem die Identifikation und Charakterisierung zielführender visueller Verhaltensweisen und Prozeduren im Umgang mit dem Diagramm. So zeigten Studierende, die Vektorfelddiagramm und Formel korrekt zuordneten oder die Divergenz eines Vektorfeldes korrekt bestimmten, ein charakteristisches Blickverhalten auf dem Vektorfelddiagramm. Dieses spiegelt exekutive Handlungen der Wahrnehmung wider und kann mit der zeilen- und spaltenweisen Evaluation der Feldkomponenten entlang der kartesischen Koordinatenrichtungen assoziiert werden (Hahn & Klein, 2023a; 2023b; Klein et al., 2018; 2019; 2021).

2.2. Multiple Repräsentationen, Zeichenaktivitäten, Simulationen und eye movement modelling examples als fachdidaktische Methoden

Ein Überblick von Smith (2014) über verschiedene physikalische Lehrbücher verdeutlicht, dass die

Divergenz und der Integralsatz von Gauß in einführenden Texten zur Physik in der Regel als mathematischer Ausdruck gegeben allerdings nicht oder nur unzureichend qualitativ erläutert werden. Auch in weiterführenden Physiklehrbüchern findet kaum eine geometrische Erläuterung oder Diskussion vektorieller Feldkonzepte und Integralsätze statt (Smith, 2014). Vor dem Hintergrund der beschriebenen empirischen Forschungsbefunde zu studentischen Lernschwierigkeiten und blickbasiertem Problemlöseverhalten im Kontext von Vektorfeldern empfehlen zahlreiche Autor:innen daher gezielte Interventionen, die einen visuellen Umgang mit Vektorfelddiagrammen und die Kovariation von Komponenten und Koordinaten adressieren und fokussieren. Dies unterstützt den grundsätzlichen didaktischen Konsens zum Einsatz multipler visueller Repräsentationen, deren Verwendung mit dem Wissenserwerb in Verbindung steht und denen positive Auswirkungen auf die kognitiven Prozesse von Lernenden zugeschrieben werden (Niemi et al., 2012; Rau, 2017). Dafür bedarf es jedoch entsprechender Repräsentationskompetenzen, die auf einem Verständnis davon beruhen, wie einzelne Repräsentationen Informationen darstellen und wie sie miteinander in Verbindung stehen (Ainsworth, 2006).

Mit Blick auf die Schwierigkeiten von Studierenden bezüglich der Evaluation vektorieller Feldkonzepte anhand von Vektorfelddiagrammen entwickelten Klein et al. (2018) textbasierte Anweisungen zur visuellen Interpretation der Divergenz, die sich zum einen auf die differentielle Definition anhand der Kovariation von Komponenten und Koordinaten (Gl. 2 Anhang) und zum anderen auf die integrale Repräsentation über den Fluss durch eine Randfläche im Sinne des Gauß'schen Integralsatzes (Gl. 4 Anhang) beziehen. In einer experimentellen Folgestudie wurde die Instruktion der differentiellen Strategie zusätzlich durch Hinweise zur Komponentenerlegung unterstützt und anschließend auf die Rotation eines Vektorfeldes übertragen (Klein et al., 2019; Gl. 3 Anhang). Empirische Untersuchungen zur Performanz der Studierenden ergaben einen quantitativ gemessenen Zuwachs des konzeptionellen Verständnisses infolge der Interventionen. In anschließenden Interviews äußerten die Proband:innen als Problemquelle vor allem die Komponentenerlegung (Klein et al., 2018), weshalb zwei experimentelle Folgestudien Zeichenaktivitäten zur Unterstützung der visuellen Interpretation der Divergenz involvierten (Hahn & Klein, 2021; 2022a; 2023a). Hier zeigte sich neben positiven Lerneffekten, dass die Skizzierung der Feldkomponenten die wahrgenommene kognitive Belastung durch die Anwendung der visuellen Strategie zur Beurteilung der Kovariation signifikant reduzieren konnte (Hahn & Klein, 2022a; 2023a). Auf Basis dieser Ergebnisse wurden multi-repräsentationale Lernaufgaben zur Vektoranalyse, d. h. zu Divergenz, Rotation, den Integralsätzen von Gauß und Stokes, entwickelt (Hahn & Klein, 2022b) und in Übungen

eines Kurses zum Elektromagnetismus im zweiten Studiensemester implementiert (Hahn & Klein, 2023c).

Neben der Unterstützung instruktionsbasierten Lernens durch Zeichenaktivitäten zeigten mehrere Arbeiten zudem den Mehrwert des Zeichnens beim Lernen mit Simulationen (Kohnle et al., 2020; Wu & Rau, 2018). So können Zeichenaktivitäten während der Nutzung von Simulationen eine Vertiefung des Verständnisses der dargestellten Repräsentation unterstützen und gelten daher als vielversprechender Ansatz beim (multi-repräsentationalen) Lernen in den Naturwissenschaften (Ainsworth et al., 2011; Kohnle et al., 2020; Wu & Rau, 2018). Dies unterstützt die Forderung von Bollen et al. (2016) nach modernen, digital-gestützten Unterrichtsszenarien, da der traditionelle Unterricht nicht ausreicht, um ein vollständiges Verständnis von Differentialoperatoren zu ermöglichen. Ein zudem im Zusammenhang mit multi-repräsentationalen Instruktionen häufig thematisierter Ansatz sind eye movement modelling examples (EMME), bei denen die visuelle Vorgehensweise anhand der Blickbewegungen eines:iner Experten:in veranschaulicht und somit gezielt gelenkt wird (Jarodzka et al. 2013). Ergebnisse einer Wirksamkeitsstudie von Jarodzka et al. (2013) zeigten ein zielgerichtetes visuelles Verhalten sowie eine verbesserte Interpretation relevanter Informationen infolge einer EMME-Intervention. Aufgrund der visuell-räumlichen Anforderungen des Lerngegenstandes eignet sich insbesondere der Kontext der Vektoranalyse für eine solche Intervention (Hahn & Klein, 2023b; Klein et al., 2021).

3. Praktische Anwendungen von Vektorfeldern

In den Ingenieurwissenschaften gibt es viele Bereiche, in denen Skalar- und Vektorfelder eine bedeutende Rolle spielen. Im Folgenden werden exemplarische Anwendungen der Vektoranalyse in verschiedenen praktischen Gebieten vorgestellt und auf bestehende Simulationen und Programme verwiesen.

3.1. Elektromagnetismus

In der modernen Technik gibt es viele Anwendungsbeispiele des Elektromagnetismus, von denen einige auf Vektorfelder zurückgreifen. Typische Beispiele hierfür sind der lineare Teilchenbeschleuniger nach Widerøe, der Elektro-Staubabscheider und der elektrische Generator, die auch in den OER aufgegriffen werden (siehe Kap. 4.2.2). Weitere Anwendungen des Elektromagnetismus sind Partikelfilter in Raumsonden und in magnetisch-induktiven Durchflusssensoren. Grundlage aller Anwendungen sind dabei die Maxwell'schen Gleichungen, die die wesentlichen Zusammenhänge und Eigenschaften elektrischer und magnetischer Felder zusammenfassen. Zu deren Bestimmung existieren einige kommerzielle und Open Source Simulationsprogramme. Implementierungen der Methode finden sich in den kommerziellen Programmen ANSYS Maxwell und COMSOL

Multiphysics bzw. im Open Source Code FEMM (Benkel et al., 2020). Letzteres wird in den hier behandelten Modulen zum Nachvollziehen ausgewählter Beispiele genutzt (<https://www.femm.info/wiki/Examples>).

3.2. Strömungsmechanik

Die Strömungsmechanik als Teilbereich der Mechanik beschäftigt sich mit dem Verhalten von Fluiden. Mathematisch lässt sich das Strömungsverhalten mit der Boltzmann'schen Transportgleichung beschreiben, die mit der Lattice-Boltzmann-Methode numerisch gelöst werden kann. In Situationen mit einer kleinen freien Weglänge kann die Gleichung in die Navier-Stokes-Gleichungen aus der Kontinuumsmechanik überführt werden. Dazu werden die mathematischen Grundlagen wie Vektorfelder, Divergenz und Rotation, die Operatoren Nabla und Laplace sowie der Satz von Gauß benötigt (z. B. für das Reynolds-Transporttheorem). Aufgrund der verteilten Charakteristik der betrachteten Variablen werden diese als Skalar- und Vektorfelder behandelt. Zu deren Bestimmung existiert eine Vielzahl kommerzieller und Open Source Simulationsprogramme. Unter den kommerziellen Programmen sind vor allem ANSYS Fluent, ANSYS CFX, COMSOL und STAR-CCM+ verbreitet. Im Open Source Umfeld wird vor allem OpenFOAM verwendet (Alobaid et al., 2022). Für einfache anschauliche Simulationen im Rahmen von OER kann auch die 2D-Software Energy2d von Charles Xie (2012) verwendet werden.

3.3. Festkörpermechanik

Ein weiteres wichtiges Anwendungsgebiet von Skalar- und Vektorfeldern ist die Mechanik von Festkörpern. Diese kann in Statik, Festigkeitslehre und Dynamik unterteilt werden. Im Rahmen der erstellten OER-Materialien wird auf mechanische Spannungen in der Festigkeitslehre, Dynamik und das Gravitationsfeld eingegangen. Mechanische Spannungen und Verformungen sind zentrale Größen zur Auslegung von Maschinenelementen im Maschinenbau. Da Kräfte durch Intensitäten und Richtungen charakterisiert werden, ist das Verständnis der Vektorrechnung für die Technische Mechanik relevant. Im Allgemeinen werden die verschiedenen Spannungen im Spannungstensor zusammengefasst. In der Ingenieurspraxis werden mechanische Probleme mithilfe der Finiten Elemente Methode (FEM) gelöst. Bekannte Implementierungen dieser Methode sind die kommerziellen Programme ANSYS, Abacus, NASTRAN und die Open Source Programme Elmer FEM, FEMM, CalculiX und FreeFEM (Goubej et al., 2021). Ein nicht-digitales Äquivalent ist die Spannungsoptik, die es ermöglicht, Spannungen in Bauteilen direkt sichtbar zu machen.

3.4. Populationsdynamik

Die Dynamik von miteinander interagierenden Populationen ist ein einfaches Beispiel für nicht-lineare gekoppelte Differentialgleichungen. Die Lotka-Volterra-

Gleichungen bestehen aus zwei Differentialgleichungen erster Ordnung für ein System von zwei konkurrierenden Spezies. Dabei kann eine Spezies als Räuber und die andere als Beute betrachtet werden. Entsprechend ist das Modell auch als Räuber-Beute-Modell bekannt. Darüber hinaus sind allerdings auch komplexere Modelle mit mehr als zwei Spezies und einer detaillierten Betrachtung der beteiligten Spezies möglich. Ein Beispiel hierfür ist die Bibliothek `population.js` des Concord-Consortiums (Horwitz et al., 2013). Im Rahmen der in Abschnitt 4.2.3 vorgestellten Simulation wird ein vereinfachtes Modell verwendet, das auf den Lotka-Volterra-Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} &= -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1)\end{aligned}$$

basiert. Die rechte Seite der Differentialgleichungen kann als Vektorfeld betrachtet werden; ihre Lösungen sind Kurven, deren Tangentenvektor in jedem Punkt dem vom Vektorfeld vorgegebenen Vektor entspricht.

4. Open Educational Resources: Materialentwicklung und ausgewählte Beispiele

Auf Grundlage bisheriger empirischer Ergebnisse zu studentischen Schwierigkeiten und Strategien, vor dem Hintergrund der vorgestellten fachdidaktischen Ansätze und unter Verwendung bereits vorhandener Materialien und Simulationsprogramme werden im Folgenden die Entwicklung und Struktur der OER erläutert. Ausgewählte Aufgaben und Materialien werden anschließend exemplarisch vorgestellt. Alle OER befinden sich in der Sammlung „Vektoranalysis in Physik und Technik“ auf dem ‚twillio‘-Portal (<https://www.twillio.de/education/sharing/components/collections?id=92d9de67-67c4-4272-a443-0ec33eec34a7&viewType=1>). Sie sind in editierbarem Format hinterlegt und zu den Simulationen und Web-Anwendungen ist der Quellcode für individuelle Anpassungen einsehbar.

4.1. Materialentwicklung

Die entwickelten OER sind in fünf Module gegliedert, deren Inhalte sukzessive aufeinander aufbauen. Im ersten Modul wird in die Historie von Vektorfeldern eingeführt. Das zweite Modul thematisiert verschiedene Repräsentationsformen von Vektorfeldern, vor allem als Vektorfelddiagramm, sowie den Wechsel zwischen den Formen. Im dritten Modul werden die differentiellen Definitionen von Divergenz und Rotation behandelt. Hierbei wird die Kovariation von Komponenten und Koordinaten fokussiert, indem vor den eigentlichen Feldkonzepten zunächst partielle Ableitungen thematisiert werden. Das nachfolgende Modul adressiert die integrale Definition der Feldkonzepte. Hier werden zunächst Weg- und Oberflächenintegrale behandelt, um anschließend differentiale und integrale Herangehensweisen in den Integralsätzen von Gauß und Stokes zu verbinden. Im letzten Modul wird das erworbene Wissen auf praktische

Beispiele aus den Ingenieurwissenschaften angewendet.

Die multi-repräsentationalen OER basieren im Wesentlichen auf den beschriebenen Vorarbeiten und entwickelten Lehr-/Lernmaterialien zur Vektoranalysis, insbesondere der Divergenz (Hahn & Klein, 2022b; 2023a). Diese wurden überarbeitet, durch Erklärungen, EMME, Kurzvideos, Konzeptfragen, (rechenbasierte) Übungsaufgaben und Simulationen ergänzt und als OER aufbereitet. Innerhalb der einzelnen Module greifen dabei viele verschiedene fachdidaktische Methoden und Ansätze ineinander mit dem Ziel, vielseitige Zugänge zur Vektoranalysis zu ermöglichen. Dabei bilden das dritte und vierte Modul den Kern der Lerneinheit, indem sie eine visuelle Interpretation von Divergenz und Rotation mithilfe der spalten- und zeilenweisen Evaluation der Feldkomponenten sowie von Weg- und Oberflächenintegralen anhand zweidimensionaler Vektorfelddiagramme instruieren. Diese wird durch entsprechende Zeichenaktivitäten unterstützt, wie z. B. das Einzeichnen der Feldkomponenten oder die Skizzierung der Projektion von Feldkomponenten auf die Normalen an eine Testfläche. Der ergänzende Einsatz von Simulationen, EMME und Videos dient einer Visualisierung der Prozeduren und Beziehungen zwischen verschiedenen Teilkonzepten, z. B. der Verbindung von differentieller und integraler Definition in den Integralsätzen. Die Verknüpfung digitaler Tools mit weiteren Methoden erfolgt hierbei z. B. durch Abzeichnen aus der Simulation, oder indem Ergebnisse mithilfe der Simulation überprüft werden. Darüber hinaus enthalten die Module Konzeptfragen und Übungsaufgaben zur Vertiefung und Routinisierung des Gelernten. Das fünfte Modul integriert abschließend eine Anwendung auf konkrete Beispiele aus den Ingenieurwissenschaften anhand bereits bestehender sowie zusätzlich entwickelter Simulationen und WebApps.

4.2. Ausgewählte Beispiele

Digital-gestützte Visualisierungen sind ein wesentlicher Bestandteil der entwickelten OER. In diesem Abschnitt werden daher drei entwickelte Simulationen und ihre Integration in die entsprechenden Module kurz vorgestellt.

4.2.1. Vektorfeld-Simulation v3ctor

Zur Visualisierung der zentralen vektoranalytischen Konzepte der OER, d.h. Feldkomponentenzerlegung, partielle Ableitungen, Weg- und Oberflächenintegrale, involvieren das zweite, dritte und vierte Modul verschiedene Features der Vektorfeld-Simulation v3ctor (Abb.1). Mit Blick auf die vorgestellten theoretischen Hintergründe greift die Simulation empirische Erkenntnisse über die Schwierigkeiten von Lernenden im Kontext der Vektoranalysis auf und nutzt interaktive und dynamische Features zur Unterstützung der visuellen Interpretation der vektoriiellen Feldkonzepte und Integralsätze. Konkret visualisiert die Simulation zweidimensionale Vektorfelder und ihre Feldkomponentenzerlegung, unterstützt eine

punktweise Auswertung von Divergenz und Rotation und ermöglicht das Einzeichnen von Rechtecken zur Bestimmung von Weg- und Oberflächenintegralen (Abb.1). Die Integration von v3ctor in die beschriebenen Module erfolgt dabei anhand konkreter Arbeitsaufträge, beispielsweise auf folgende Weise:

Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{C}(x, y)$ mit $\vec{C}(x, y) = xy\hat{e}_x + \hat{e}_y$. Beurteilen Sie für jeden der vier Quadranten, wie sich die Feldkomponenten der Vektoren entlang der x - bzw. y -Richtung verändern und schließen Sie daraus, ob die Divergenz innerhalb der Quadranten jeweils positiv, negativ oder Null ist. Überprüfen und begründen Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer Rechnung. [Drittes Modul zur Divergenz und Rotation]

Nutzen Sie die Simulation, um den Fluss von $\vec{C}(x, y)$ durch den Rand eines Quadrates der Kantenlänge 1 zu bestimmen. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Wert mit der linken Seite des Satzes von Gauß übereinstimmt. [Viertes Modul zum Satz von Gauß und Stokes]

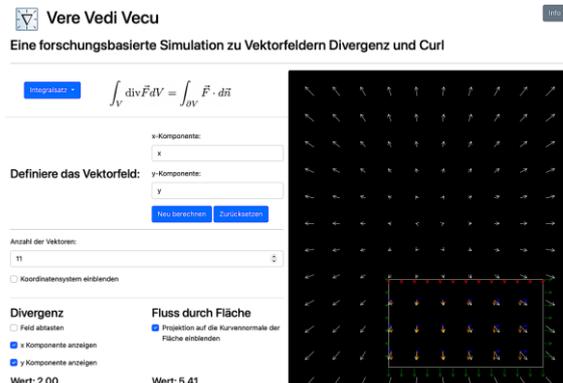


Abb.1: Benutzeroberfläche der Simulation v3ctor (<https://wwwuser.gwdg.de/physik.didaktik/v3ctor.html>).

4.2.2. Generator-Simulation

Wie bereits beschrieben, spielen Vektorfelder in der Elektrotechnik eine wichtige Rolle. Im Rahmen des vierten Moduls wird dieses Anwendungsfeld anhand des Beispiels eines Generators mit einer interaktiven Generator-WebApp (Abb.2) thematisiert. Die Simulation visualisiert die Induktion in einem Generator in Abhängigkeit von der Feldstärke des Magnetfelds, der Drehzahl des Rotors und des Lastwiderstands. Die Benutzeroberfläche erlaubt eine Anpassung der relevanten Größen, wobei der zeitliche Verlauf von Spannung und Stromstärke im nebenstehenden Diagramm dargestellt wird. Für fortgeschrittene Lernende kann auch auf das Rotor-Motion-Tutorial von FEMM verwiesen werden, das detailliertere numerischen Berechnungen erlaubt (<https://www.femm.info/wiki/RotorMotion>).

Eine exemplarische Aufgabenstellung im Modul lautet:

Wiederholen Sie die physikalischen Grundlagen des Elektromagnetismus und der Induktion. Berechnen Sie die zeitlichen Verläufe der Spannung

und Stromstärke von Hand für die unten genannten Werte und skizzieren Sie die berechneten Spannungs- und Stromstärkeverläufe:

- Feldstärke: 0.1 mT, 2 mT
- RPM: 0, 20, 100
- Lastwiderstand: 1 k Ω , 10 k Ω

Machen Sie sich mit der Generator-WebApp vertraut und testen Sie alle Features. Verändern Sie nun Feldstärke, Drehzahl und Lastwiderstand in der Simulation und beobachten Sie den Einfluss auf Spannung und Stromstärke. Erläutern Sie anhand einer geeigneten Skizze der Rotation im Magnetfeld die Verläufe von Spannung und Stromstärke.

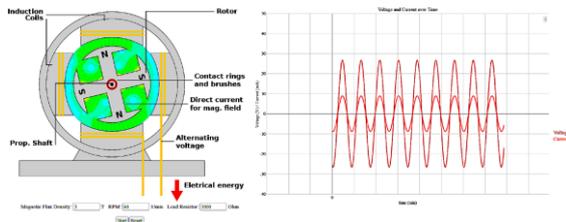


Abb.2: Benutzeroberfläche der Generator-WebApp (<https://oer.simzentrum.de/generator.html>). Modifiziert nach <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Generator.svg> (Creativ Commons CC0).

4.2.3. Populationsdynamik-Simulation

Die Anwendung von Vektorfeldern in der Populationsdynamik wird mithilfe einer Populationsdynamik-WebApp visualisiert (<https://oer.simzentrum.de/rabbit-evolution.html>), die numerische Lösungen der Lotka-Volterra-Gleichungen für zwei konkurrierende Spezies veranschaulicht. Dabei wird zum einen die voneinander abhängige Veränderung der beiden Spezies (linkes Diagramm) und zum anderen die sich zeitlich verändernde Population beider Spezies in Abhängigkeit der Zeit (rechtes Diagramm) graphisch dargestellt. Je nach gewählten Anfangswerten (initiale Populationsgrößen, Fressrate, Fortpflanzungsraten und Sterberate) können dabei geschlossene Verläufe um veränderliche Fixpunkte beobachtet werden.

Durch gezielte Manipulation der verschiedenen Einflussgrößen in der Populationsdynamik-WebApp kann deren Einfluss auf die Populationsentwicklung systematisch untersucht werden. Ein entsprechender Arbeitsauftrag im Modul lautet beispielsweise:

Wiederholen Sie die Grundlagen der Lotka-Volterra-Gleichungen. Machen Sie sich anschließend mit der Populationsdynamik-WebApp vertraut und testen Sie alle Features. Verändern Sie die verschiedenen Einflussgrößen ausgehend von den voreingestellten Werten und beobachten Sie ihren Einfluss auf die angezeigten Graphen. Diese stellen neben dem eigentlichen Verlauf das dem Verlauf zugrundeliegende Vektorfeld dar. Leiten Sie aus der Simulation Regeln für die zeitlichen Mittelwerte und die zeitliche Veränderung der Populationsgrößen ab.

5. Fazit und Ausblick

Die entwickelten OER werden bereits in universitären Lehrveranstaltungen zur numerischen Strömungsmechanik (TU Clausthal) und zum Elektromagnetismus (Universität Göttingen) eingesetzt. Darüber hinaus werden diese kontinuierlich erweitert, optimiert und ihre Wirksamkeit, z. B. bezüglich des Mehrwerts von eye movement modelling examples für den Lernkontext der Vektoranalysis, in empirischen (Implementations-)Studien untersucht. Alle Überarbeitungen und Ergebnisse fließen in die OER ein, deren aktuelle Version jederzeit auf dem ‚twillo‘-Portal frei zur Verfügung steht, geteilt und verändert werden kann.

6. Literatur

- Ainsworth, Shaaron (2006): DeFT: A conceptual framework for learning with multiple representations. In: *Learning and Instruction*, 16(3), 183-198, <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.03.001>
- Ainsworth, Shaaron; Prain, Vaughan; Tytler, Russell (2011): Drawing to learn in science. In: *Science*, 333(6046), 1096-1097, <https://doi.org/10.1126/science.1204153>
- Alobaid, Falah; Almohammed, Naser; Farid, Mas-soud M.; May, Jan; Rößger, Philip; Richter, Andreas; Epple, Bernd (2022): Progress in CFD simulations of fluidized beds for chemical and energy process engineering. In: *Progress in Energy and Combustion Science*, 91, 100930, <https://doi.org/10.1016/j.peccs.2021.100930>
- Ambrose, Bradley S. (2004): Investigating student understanding in intermediate mechanics: Identifying the need for a tutorial approach to instruction. In: *American Journal of Physics*, 72, 453-459, <https://doi.org/10.1119/1.1648684>
- Baily, Charles; Bollen, Laurens; Pattie, Andrew; Van Kampen, Paul; De Cock, Mieke (2016): Student thinking about the divergence and curl in mathematics and physics contexts. In: *Proceedings of the Physics Education Research Conference 2016*, College Park, MD (AIP, New York, 2016), S. 51-54, <https://doi.org/10.1119/perc.2015.pr.008>
- Barniol, Pablo; Zavala, Genaro (2014): Test of understanding of vectors: A reliable multiple-choice vector concept test. In: *Physical Review Special Topics – Physics Education Research*, 10(1), 010121, <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.10.010121>
- Benkel, Tara; Lao, Mayraluna; Liu, Yingzhen; Pardo, Enric; Wolfstädter, Simon; Reis, Thomas; Grilli, Francesco (2020): T-A-formulation to model electrical machines with HTS coated conductor coils. In: *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 30(6), 1-7, <https://doi.org/10.1109/TASC.2020.2968950>

- BMBF (Hrsg.) (2022): OER-Strategie. Freie Bildungsmaterialien für die Entwicklung digitaler Bildung. URL: https://www.bmbf.de/SharedDocs/Publikationen/de/bmbf/3/691288_OER-Strategie.pdf?__blob=publicationFile&v=4
- Bollen, Laurens; Van Kampen, Paul; Baily, Charles; De Cock, Mieke (2016): Qualitative investigation into students' use of divergence and curl in electromagnetism. In: *Physical Review Physics Education Research*, 12(2), 020134, <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.020134>
- Bollen, Laurens; Van Kampen, Paul; Baily, Charles; De Cock, Mieke (2017): Student difficulties regarding symbolic and graphical representations of vector fields. In: *Physical Review Physics Education Research*, 13(2), 020109, <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020109>
- Bollen, Laurens; Van Kampen, Paul; De Cock, Mieke (2015): Students' difficulties with vector calculus in electrodynamics. In: *Physical Review Special Topics – Physics Education Research* 11(2), 020129, <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.11.020129>
- Bollen, Laurens; Van Kampen, Paul; De Cock, Mieke (2018): Development, implementation, and assessment of a guided-inquiry teaching-learning sequence on vector calculus in electrodynamics. In: *Physical Review Physics Education Research*, 14(2), 020115, <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.020115>
- Burkholder, Eric; Murillo-Gonzalez, Gabriel; Wieman, Carl (2021): Importance of math prerequisites for performance in introductory physics. In: *Physical Review Physics Education Research*, 17(1), 010108, <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.17.010108>
- Deutsche UNESCO-Kommission (Hrsg.) (2020): Open Science – Perspektiven aus Deutschland auf die Erarbeitung der geplanten Empfehlung der UNESCO. URL: https://www.unesco.de/sites/default/files/2020-06/Open_Science_Perspektiven_aus_Deutschland_auf_UNESCO-Empfehlung_2020.pdf
- Gire, Elizabeth; Price, Edward (2012): Graphical representations of vector functions in upper-division E&M. In: *AIP Conference Proceedings*, 1413(1), S. 27-30, <https://doi.org/10.1063/1.3679985>
- Goubej, Martin; Königsmarková, Jana; Kampinga, Ronald; Nieuwenkamp, Jakko; Paquay, Stéphane (2021): Employing finite element analysis and robust control concepts in mechatronic system design-flexible manipulator case study. In: *Applied Sciences*, 11(8), 3689, <https://doi.org/10.3390/app11083689>
- Hahn, Larissa; Klein, Pascal (2021): Multiple Repräsentationen als fachdidaktischer Zugang zum Satz von Gauß-Qualitative Zugänge zur Interpretation der Divergenz von Vektorfeldern. In: *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung, 1*, S. 95-100, URL: <https://ojs.dpg-physik.de/index.php/phydid-b/article/view/1151>
- Hahn, Larissa; Klein, Pascal (2022a): Kognitive Entlastung durch Zeichenaktivitäten? Eine empirische Untersuchung im Kontext der Vektoranalyse. In: *Unsicherheit als Element von naturwissenschaftsbezogenen Bildungsprozessen, Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, virtuelle Jahrestagung 2021*, S. 384-387, URL: https://www.gdcp-ev.de/wp-content/tb2022/TB2022_384_Hahn.pdf
- Hahn, Larissa; Klein, Pascal (2022b): Vektorielle Feldkonzepte verstehen durch Zeichnen? Erste Wirksamkeitsuntersuchungen. In: *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung, 1*, S. 119-126, URL: <https://ojs.dpg-physik.de/index.php/phydid-b/article/view/1259/1485>
- Hahn, Larissa; Klein, Pascal (2023a): Analysis of eye movements to study drawing in the context of vector fields. In: *Frontiers in Education*, 8, 1162281, <https://doi.org/10.3389/educ.2023.1162281>
- Hahn, Larissa; Klein, Pascal (in Druck): Clustering eye-movement data uncovers students' strategies for coordinating equations and diagrams of vector fields. Accepted in: *Educational Studies in Mathematics*, doi: 10.1007/s10649-023-10243-y
- Hahn, Larissa; Klein, Pascal (2023c): The impact of multiple representations on students' understanding of vector field concepts: Implementation of simulations and sketching activities into lecture-based recitations in undergraduate physics. In: *Frontiers in Psychology*, 13, 1012787, <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.1012787>
- Horwitz, Paul; McIntyre, Cynthia A.; Lord, Trudilene L.; O'Dwyer, Laura M.; Staudt, Carolyn (2013): Teaching 'evolution readiness' to fourth graders. In: *Evolution: Education and Outreach*, 6, 1-12, <https://doi.org/10.1186/1936-6434-6-21>
- Jarodzka, Halszka; Van Gog, Tamara; Dorr, Michael; Scheiter, Katharina; Gerjets, Peter (2013): Learning to see: Guiding students' attention via a model's eye movements fosters learning. In: *Learning and Instruction*, 25, 62-70, <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2012.11.004>
- Jung, Kyesam; Lee, Gyounggho (2012): Developing a tutorial to address student difficulties in learning curl: A link between qualitative and mathematical reasoning. In: *Canadian Journal of Physics*,

- 90(6), 565-572, <https://doi.org/10.1139/p2012-054>
- Klein, Pascal; Hahn, Larissa; Kuhn, Jochen (2021): Einfluss visueller Hilfen und räumlicher Fähigkeiten auf die graphische Interpretation von Vektorfeldern: Eine Eye-Tracking-Untersuchung. In: *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 27, 181–201, <https://doi.org/10.1007/s40573-021-00133-2>
- Klein, Pascal; Viiri, Jouni; Kuhn, Jochen (2019): Visual cues improve students' understanding of divergence and curl: Evidence from eye movements during reading and problem solving. In: *Physical Review Physics Education Research*, 15(1), 010126, <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.010126>
- Klein, Pascal; Viiri, Jouni; Mozaffari, Saleh; Dengel, Andreas; Kuhn, Jochen (2018): Instruction-based clinical eye-tracking study on the visual interpretation of divergence: How do students look at vector field plots? In: *Physical Review Physics Education Research*, 14(1), 010116, <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.010116>
- Kohnle, Antje; Ainsworth, Shaaron; Passante, Gina (2020): Sketching to support visual learning with interactive tutorials. In: *Physical Review Physics Education Research*, 16(2), 020139, <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.020139>
- Li, Jing; Singh, Chandralekha (2017): Investigating and improving introductory physics students' understanding of symmetry and Gauss's law. In: *European Journal of Physics*, 39(1), 015702, <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa8d55>
- Nieminen, Pasi; Savinainen, Antti; Viiri, Jouni (2012): Relations between representational consistency, conceptual understanding of the force concept, and scientific reasoning. In: *Physical Review Special Topics – Physics Education Research*, 8(1), 010123, <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.8.010123>
- Pepper, Rachel; Chasteen, Stephanie; Pollock, Steven; Perkins, Katherine (2012): Observations on student difficulties with mathematics in upper-division electricity and magnetism. In: *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 8(1), 010111, <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.8.010111>
- Rau, Martina (2017): Conditions for the effectiveness of multiple visual representations in enhancing STEM learning. In: *Educational Psychology Review*, 29(4), 717-761, <https://doi.org/10.1007/s10648-016-9365-3>
- Singh, Chandralekha; Maries, Alexandru (2013): Core graduate courses: A missed learning opportunity? In: *AIP Conference Proceedings*, 1513, S. 382-385, <https://doi.org/10.1063/1.4789732>
- Smith, Emily (2014): *Student & textbook presentation of divergence*. Master's thesis (Corvallis, OR: Oregon State University), Url: https://ir.library.oregonstate.edu/concern/graduate_thesis_or_dissertations/s7526h05k
- Wu, Sally P.; Rau, Martina A. (2018): Effectiveness and efficiency of adding drawing prompts to an interactive educational technology when learning with visual representations. In: *Learning and Instruction*, 55, 93–104, <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2017.09.010>
- Xie, Charles (2012): Interactive heat transfer simulations for everyone. In: *The Physics Teacher*, 50(4), 237-240, <https://doi.org/10.1119/1.3694080>

Anhang

Ebene Vektorfelder im \mathbb{R}^2 werden typischerweise algebraisch durch die Komponentenzersetzung

$$\vec{v}(x, y, z = 0) = v_x(x, y)\hat{e}_x + v_y(x, y)\hat{e}_y \quad \{1\}$$

(x -Komponente v_x , y -Komponente v_y , kartesische Einheitsvektoren \hat{e}_x und \hat{e}_y) oder graphisch mithilfe von Pfeilen, dargestellt, welche Richtung und Betrag des Feldes in jedem Punkt repräsentieren. Für die physikalisch-technische Anwendung sind besonders die Eigenschaften des Feldes relevant. So gibt die Divergenz eines ebenen Vektorfeldes $\vec{v}(x, y, z = 0)$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y \quad \{2\}$$

in ihrer differentiellen Definition über die partiellen Ableitungen $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial y$ Aufschluss über die Quellen und Senken von \vec{v} und seine Rotation

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x \right) \hat{e}_z \quad \{3\}$$

indiziert seine Wirbelstärke. In ihrer Anwendung werden häufig die integralen Definitionen der vektoriellen Feldkonzepte verwendet, die sich aus den Integralsätzen von Gauß,

$$\int_V \operatorname{div} \vec{v} dV = \oint_{\partial V} \vec{v} \cdot d\vec{n} \quad \{4\}$$

(für ein Volumen V mit der Oberfläche ∂V , dem Volumenelement dV und dem Flächendifferential $d\vec{n}$), und Stokes,

$$\int_A \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{n} = \oint_{\partial A} \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad \{5\}$$

(für eine Fläche A mit der Randkurve ∂A , dem Flächendifferential $d\vec{n}$ und dem vektoriellen Wegelement $d\vec{l}$), ergeben. Der Gauß'sche Integralsatz stellt hierbei eine Relation zwischen der Divergenz eines Vektorfeldes und dem Fluss durch eine Randfläche her, während der Stokes'sche Integralsatz die Rotation eines Vektorfeldes mit der Zirkulation entlang einer Randkurve verbindet. Diese Sätze und die daraus resultierenden Zusammenhänge fassen die wesentlichen Eigenschaften von Vektorfeldern zusammen.