

Topologische Modelle für Ununterscheidbarkeit und Verschränkung

Stefan Heusler, Malte S. Ubben

*Institut für Didaktik der Physik, Wilhelm-Klemm-Str. 10, 48149 Münster
e-mail: stefanheusler@uni-muenster.de

Kurzfassung

In diesem Beitrag stellen wir ein topologisches Modell für Quantenverschränkung vor. Das Modell kann auch ohne Kenntnis der mathematischen Hintergründe genutzt werden, um das Konzept der Ununterscheidbarkeit und des Zufalls in der Quantenphysik erfahrbar zu machen. Unser Ansatz basiert auf der geometrischen Deutung der Topologie eines einzelnen, sowie eines Paares von Qubits im Hilbertraum. Wesentlich ist hierbei das sogenannte Hopf-Mapping vom Hilbert-Raum auf die Bloch-Kugel, und eine Verallgemeinerung des sogenannten Dirac'schen Gürteltricks.

1. Einleitung

Durch die aktuelle sogenannte zweite Quantenrevolution werden Themen wie die Quantenverschränkung immer mehr aus einer anwendungsbezogenen Perspektive heraus diskutiert. Durch diese Entwicklung entsteht auch die Notwendigkeit, für die Ausbildung auf unterschiedlichen Niveaus geeignete Modellierung von Quantenverschränkung zu entwickeln und zu evaluieren. In diesem Beitrag stellen wir ein topologisches Modell für Ununterscheidbarkeit und Verschränkung vor, welches auch ohne Kenntnisse der zugrundeliegenden Mathematik genutzt werden kann und somit möglicherweise auch für die Schule geeignet erscheint. Eine Evaluation dieser Hypothese steht aber noch aus. Das Modell beruht auf bekannten mathematischen Modellen aus der Knotentheorie zur Geometrie im Hilbertraum [1], sowie einer Verallgemeinerung des Dirac'schen Gürteltricks [2-4]. Für technische Einzelheiten verweisen wir auf diese Publikationen, sowie auf [5]. In Kapitel 2 führen wir eine topologische Interpretation von Quaternionen ein, wenden diese in Kapitel 3 auf Qubits an, und verallgemeinern in Kapitel 4 auf ein Paar verschränkter Qubits. In Kapitel 5 diskutieren wir Grenzen des Modells und geben in Kapitel 6 einen Ausblick.

2. Kreuzprodukt der Quaternionen?

Quaternionen als Verallgemeinerung von komplexen Zahlen wurden unabhängig voneinander von Rodrigues (1840) und Hamilton (1843) entdeckt. Die drei Quaternionen (I, J, K) genügen folgender Algebra:

$$IJ = K, JK = I, KI = J \\ I^2 = J^2 = K^2 = -1$$

Eine topologische Deutung der Quaternionen – völlig unabhängig von der Anwendung in der

Quantenphysik – als Drehung um 180° , wie in Abbildung 1 zu sehen, ist seit langem in der Mathematik bekannt [1]. Leider geriet der Gebrauch von Quaternionen ab ca. 1880 mehr und mehr in den Hintergrund, da sich das in vielen Aspekten äquivalente Rechnen mit Skalar- und Kreuzprodukten in der Physik durchsetzte, u.a. durch den Einfluss von Heaviside und Gibbs. Aus heutiger Sicht ist dies durchaus bedauerlich, denn würden in den mathematischen Grundvorlesungen heute – ähnlich wie bis Mitte des 19. Jhd. üblich – Quaternionen eingeführt, wäre der Weg zu einer topologischen Deutung der Quantenphysik sehr viel leichter: In der Sprache der Quantenphysik sind Quaternionen Spin-Flip-Operatoren.

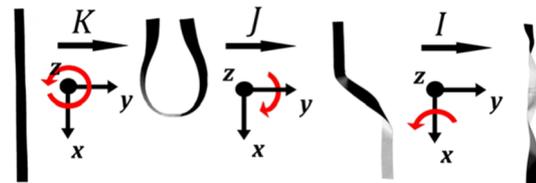


Abb.1: Anwendung eines Quaternionen bewirkt eine Drehung um 180° in x , y , bzw. z -Richtung.

3. Spin 1/2

Die Drehung der Wellenfunktion eines Spin- $1/2$ -Zustands um 360° bzw. die zweimalige Anwendung desselben Spin-Flip-Operators (z.B. I) führt einem Vorzeichenwechsel. Erst nach 720° ist der Ausgangszustand wieder erreicht, $I^4 = +1$, siehe Abbildung 2. Topologisch äquivalent hierzu ist die Beschreibung einer 720° -Drehung auf einem Möbius-Band, da bei einem Möbiusband auf der Oberfläche ebenfalls erst nach einer Zurücklegung von 720° der Ausgangspunkt wieder erreicht wird.

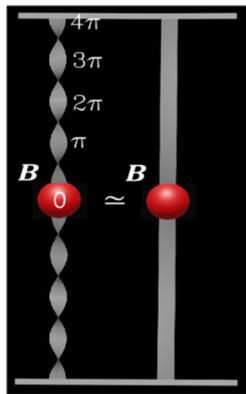


Abb.2: Eine Drehung um 720° ist äquivalent zu keiner Drehung. Dies ist die Kernaussage des sogenannten Dirac'schen Gürteltricks.

Betrachtet man nur dem Rand des Möbius-Bandes, ergibt das sich in Abbildung 3 gezeigte Modell für die Drehung eines einzelnen Qubits. Anstatt das Qubit zu drehen, könnte man auch sagen, dass der Betrachter sich zweimal um das Qubit im Hilbertraum dreht, und so einen Eindruck von dessen Topologie gewinnt. Ein Möbius-Band kann rechts- oder links getwistet sein. In der Sprache von Quantenzahlen entspricht dies $s = \pm 1/2$.

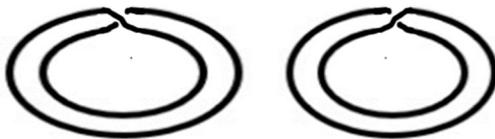


Abb.3: Der Rand eines links- (L) bzw. rechts- (R) getwisteten Möbiusbandes.

4. Modell eines verschränkten Zustands

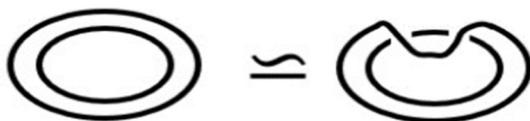


Abb.4: Topologisches Modell eines verschränkten Zustandes als Unknoten.

Wir betrachten in diesem Beitrag als Beispiel den verschränkten Bell-Zustand

$$|\Psi^+\rangle \sim (|RL\rangle + |LR\rangle)$$

Die Überlagerung von Rechts- und Linkstvist übersetzt sich topologisch in einen Unknoten, der allerdings virtuell einen Rechts- und Linkstvist enthält. In Abbildung 5 zeigen wir in (1) und (2) den Unknoten in diesen zwei topologisch äquivalenten Konfigurationen (die 720° -Drehung aus Abbildung 2 ist

topologisch äquivalent zum Übergang (1)→(2)). Solche Verdrehungen von Phasen ohne Änderung der Topologie und somit von beobachtbaren Größen ist auch als Eichprinzip bekannt, was eine Säule des Standardmodells der Elementarteilchenphysik ist.

Wie kommen wir nun vom verschränkten Zustand zu lokal messbaren Teilchen? Jede Messung bewirkt eine Änderung der Topologie: Wie in Abbildung 3 gezeigt, werden Rechts- und Linkstvist voneinander getrennt, und es entstehen einzelne rechts- und linksgetwistete Spin $1/2$ -Zustände.

Vor der Messung gibt es weder einen rechts- noch einen linksgetwisteten Zustand - beide sind ununterscheidbar und zu einem Unknoten verschmolzen.,

Nach der Messung messen die Detektoren A und B (Alice und Bob) beide jeweils einen Spin $1/2$ -Zustand, wie in Abbildung 3 gezeigt. Es ist offensichtlich, dass zwischen beiden eine starke Korrelation besteht: Wenn Alice L misst, misst Bob R, oder umgekehrt. Wer welchen Zustand bekommt, ist eine Zuschreibung bzw. eine Unterscheidung, die zufällig sein muss, denn erst durch solch eine Zuschreibung entstehen diese beiden Möglichkeiten [4].

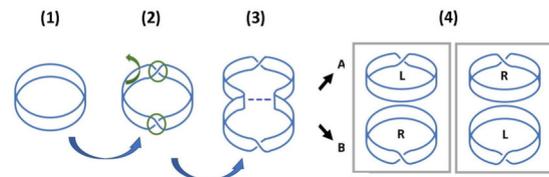


Abb.5: Ein topologisches Modell für Verschränkung und Quantenzufall

Diese Grundidee kann in vielen weiteren interessante Anwendungen genutzt werden, z.B. bei Auswahlregeln [2], bei Kontextualität und als ein topologisches Argument gegen Viele-Welten-Theorien [3].

5. Grenzen des Modells

Wir haben in diesem Beitrag bewusst auf technische Einzelheiten verzichtet, da diese für ein qualitatives Verständnis keinerlei Bedeutung haben. In diesem Abschnitt wollen wir allerdings einige „Risiken und Nebenwirkungen“ des in Abbildung 5 vorgestellten Modells aus physikalisch-mathematischer, sowie aus didaktischer Sicht diskutieren.

Mathematisch-Physikalisch:

- Die komplexen Amplituden (α, β) eines einzelnen Qubits beschreiben geometrisch eine dreidimensionale Kugeloberfläche in vier Dimensionen. Das Aufblättern in invariante Torii kann immer nur in Bezug auf eine gegebene Achse gemacht werden (was durch die Basiswahl erfolgt). Wir

modellieren nur einen einzelnen solchen Torus. Genau genommen müsste also in Abbildung 5 mit einem Torus gearbeitet werden, in den ein virtueller π – Dehn Twist gesetzt wird (Übergang (1) nach (2)). Beim Aufschneiden entstehen dann nicht zwei Möbius-Bänder, sondern zwei Klein'sche Flaschen. Vereinfachend arbeiten wir mit dem Möbius Band-Modell.

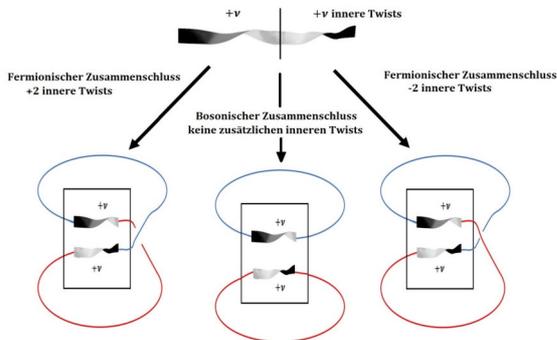


Abb.6: Topologisches Modell eines verschränkten Zustandes als Unknoten.

- Die einfache Hopf-Fibration führt zu Großkreisen, die jeweils einmal verlinkt sind. Daraus ergeben sich $v = 2$ innere Twists. Erst beim Übergang von 720° auf 360° werden diese Hopf-Kreise zu einem Dirac Gürtel bzw. dem doppelt aufgewickelten Möbius-Band. Bei der doppelten Aufwicklung ergibt sich dann beim Möbius-Band ein Twist, wie in Abbildung 3 gezeigt.
- Die Konstruktion kann auf beliebigen Spin j verallgemeinert werden, wobei die Hopf-Fibration zunächst von $2j$ -mal verlinkten Großkreisen zu $v = 4j$ inneren Twists führt. Der Übergang von 720° auf 360° führt dann zu einer doppelten Aufwicklung mit $2j$ Twists. Bei ganzzahligem Drehimpuls $j=l$ entspricht das dem Faktor $e^{il\varphi}$ der Kugelflächenfunktion Y_{ll} . Bei Spinzuständen ergeben sich Möbius-Bänder mit $(1, 3, 5, \dots)$ Twists für Spin $1/2, 3/2, 5/2, \dots$ [6].
- Die komplexen Amplituden $(\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta)$ eines **Paars von Qubits** ergeben eine siebendimensionale Kugeloberfläche in acht Dimensionen. Die Geometrie dieser Räume ist gut verstanden und beschrieben [5]. Wir betrachten hier besonders einfache und symmetrische Strukturen. Tatsächlich können aber in der Ausgangskonfiguration in Abbildung 5 bereits Twists enthalten sein, abhängig vom Gesamtspin des Bell-Zustands und dem gewählten Schnitt durch die dreidimensionale Geometrie, die durch die komplexen Zahlen (α, β) beschrieben wird.

Wir verzichten an dieser Stelle auf eine noch genauere Beschreibung der technischen Details und verweisen auf die Literatur.

Didaktisch:

- Unsere Darstellung durch Möbiusbänder ist abstrakt und damit nicht gestalttreu. Schülerinnen und Schüler könnten fälschlicherweise annehmen, dass ein Spin wortwörtlich ein Band ist, nachdem sie mittels unseres topologischen Modells ein mentales Modell von Verschränkung und Spins aufgebaut haben.
- Schülerinnen und Schüler assoziieren mit Teilchen – wie beispielsweise Elektronen – häufig einfache Körper, wie zum Beispiel Kugeln. Eine große Problematik in der Quantenphysik ist es, anschlussfähige Bilder an diese sehr rudimentären Bildern darzubieten. Inwieweit unsere topologische Modellierung anschlussfähig an bisherige Vorstellungen ist bzw. in der Lage ist, neue Konzepte aufzubauen, bleibt es empirisch zu untersuchen.

Trotz dieser „Gefahrenstellen“ wollen wir den potenziellen Nutzen unserer Modellierung unterstreichen: Unsere topologischen Modelle bieten eine vereinfachte veranschaulichte Darstellung der funktionalen Vorgänge von Verschränkung und Spins. Im europäischen Schulkontext sind diese beiden physikalischen Konzepte noch nicht zu finden, werden aber absehbar in naher Zukunft integriert [7]. Somit bieten die Modelle eine Möglichkeit, diese beiden Konzepte von Grund auf neu zu verstehen und korrespondierende mentale Modelle aufzubauen.

Es ist nicht einfach, Aussagen über „gute“ Modelle zu treffen, da oft auch situationale Aspekte bei solch einer Einordnung zu berücksichtigen sind. Trotzdem wollen wir jedoch abschließend noch einige sehr vielversprechende Aspekte unserer Modellierung nennen, die allerdings noch empirisch zu untersuchen sind:

1. Um einen Fokus auf die Funktionsweise eines Modells zu legen, bietet es sich an, ein Aussehen zu wählen, welches leicht als nicht realitätstreu empfunden werden kann. Wir hoffen, dass sich dies leichter mit unserem Modell klar machen lässt als z.B. mit Spins als „drehenden Kugeln“.
2. Es sollten nicht zu viele „irrelevante“ Funktionen aus dem Modell herausgelesen werden können, um nicht von den wichtigen Aspekten abzulenken. Die Funktionen in unserem Modell sind relativ begrenzt – alles was gemacht wird sind Verdrehungen

und Verbindungen und Trennungen von Bändern.

3. Unsere Modelle sind vergleichsweise einfach und können auf verschiedene Art und Weisen präsentiert werden. So ist es möglich, rein haptisch mit Papierstreifen zu arbeiten, oder mit Animationen und Simulationen.. Konkret bietet das Programm [Antitwister](#) für $j=1/2$ dieselben topologischen Informationen wie uns einfaches Modell. Aufgrund dieser Einfachheit kann im Gegensatz zu diesem Programm jeder Spin j modelliert werden. Im Prinzip könnte dies auch mit vielen Faserbündeln in [Antitwister](#) in programmiert werden, dies ist aber noch nicht erfolgt.
4. Die Papierstreifen sind anschlussfähige Modellierungen an sowohl die Konzepte „Spin“ als auch der Modellierung der Atomhülle mittels Elektronenwellenfunktionen [8]. Sie müssen somit nicht allein im Unterricht stehen.

6. Diskussion und Ausblick

Durch den immer höheren Stellenwert der Quantentechnologien zweiter Generation in Wirtschaft und Bildung wird mit absehbar die Thematik der Verschränkung und Ununterscheidbarkeit curricular relevant werden. Bisherig gibt es keine haptischen Modellierungen auf Niveau der Sekundarstufe II. Wir hoffen, durch fachlich fundierte Modelle einen intuitiven Zugang zu dieser komplexen Thematik zu eröffnen. Ob und wie diese für den Aufbau von Konzeptverständnis im Bereich Quantenphysik lernwirksam sind, ist allerdings noch ungeklärt. Im Gegensatz zum rein mathematisch-formalen Zugang, der mit Sicherheit im Kontext Schule nicht tauglich ist, steht durch unser haptisches Modell zumindest ein konkreter Ansatz zur Verfügung, der empirisch untersucht werden kann.

7. Literatur

- [1] Kauffman, Louis H. (2005): The mathematics and physics of knots. In: Rep. Prog. Phys. 68, 2829-2857.
- [2] Heusler, Stefan; Ubben, Malte (2019): A Haptic Model of Entanglement, Gauge Symmetries and Minimal Interaction Based on Knot Theory. In: Symmetry 11, 11: 1399.
- [3] Heusler Stefan; Schlummer, Paul; Ubben Malte S. (2020). A Knot Theoretic Extension of the Bloch Sphere Representation for Qubits in Hilbert Space and Its Application to Contextuality and Many-Worlds Theories. In: Symmetry 12, 1135.
- [4] Heusler, Stefan; Schlummer, Paul; Ubben, Malte S. (2021): The Topological Origin of Quantum Randomness. In: Symmetry 13, 4, 581.
- [5] Kus, M.; Zyczkowski, K. (2001). Geometry of entangled states. In: Phys. Rev. A 63, 032307.
- [6] Topologie der Quantendimensionen: <http://www.quantenspiegelungen.de/subdimension-linie-u3/topologie-der-quantendimension/>
- [7] Stadermann, H. K. E.; van den Berg, E.; Goedhart, M. J. (2019). Analysis of secondary school quantum physics curricula of 15 different countries: Different perspectives on a challenging topic. In Phys. Rev. Phys. Educ. Res. 15, 010130
- [8] Ubben, M., & Heusler, S. (2018). A haptic model of vibration modes in spherical geometry and its application in atomic physics, nuclear physics and beyond. In European Journal of Physics, 39(4), 045404.