Aufgabe: Satz von Stokes

In dieser Aufgabe setzen Sie sich mit dem Satz von Stokes auseinander. Hierfür nutzen Sie die Vektorfeld-Simulation aus der Aufgabe „Divergenz von Vektorfeldern" (`https://www.uni-goettingen.de/de/vektorfelder/644934.html`). Sie *dürfen* die Simulation bei jeder Teilaufgabe zu Hilfe nehmen. Wenn Sie die Simulation nutzen *sollen*, ist dies explizit angegeben.

Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z)$ mit

$$\vec{F}(x, y, z) = y\hat{e}_x + 2\hat{e}_y \, .$$

(a) Die Zirkulation Ψ eines Vektorfeldes in drei Dimensionen $\vec{B}(x, y, z)$ entlang der geschlossenen Randkurve $C = \partial A$ einer Fläche A ergibt sich über das Wegintegral

$$\Psi = \int_{\partial A} \vec{B}(x, y, z) \cdot d\vec{l} \, .$$

Dabei ist $d\vec{l}$ das vektorielle Wegelement entlang der Randkurve, welches entgegen dem Uhrzeigersinn orientiert ist.

(1) Skizzieren Sie $\vec{F}(x, y, z)$ in der x-y-Ebene.

(2) Fügen Sie ein beliebiges Rechteck in Ihre Skizze ein und zeichnen Sie die vektoriellen Wegelemente sowie die Projektion der Feldkomponenten auf diese Wegelemente an die vier Seiten der Rechteckkurve ein.

(3) Bilanzieren Sie qualitativ die Beiträge der Wegintegrale entlang der Randkurve des Rechtecks: Ist das Wegintegral über die gesamte Randkurve positiv, negativ oder Null?

(b) Der Satz von Stokes beschreibt den Zusammenhang zwischen der Rotation eines Vektorfeldes $\vec{B}(x, y, z)$ innerhalb einer Fläche A und dem Wegintegral entlang der (geschlossenen) Randkurve dieser Fläche ∂A,

$$\int_A \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{n} = \int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{l} \, .$$

(1) Formulieren Sie, wie $\int_A \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{n}$ anschaulich verstanden werden kann. Nutzen Sie dafür die qualitative Interpretation der Rotation aus der Aufgabe „Rotation von Vektorfeldern" sowie eines Flächenintegrals.

(2) Begründen Sie anhand des Beispiels von $\vec{F}(x, y, z)$ (in der x-y-Ebene) den Zusammenhang zwischen der Änderung von Feldkomponenten und der Zirkulation entlang einer geschlossenen Randkurve. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

(3) Nutzen Sie die Simulation, um die Zirkulation von $\vec{F}(x, y, z)$ entlang der Randkurve eines Quadrates der Kantenlänge 1 zu bestimmen. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Wert mit der linken Seite des Satzes von Stokes übereinstimmt.

(c) Aus dem Satz von Stokes ergibt sich die koordinatenfreie Definition der Rotation mit $d\vec{n} = \hat{n} dA$ über

$$(\operatorname{rot} \vec{B}) \cdot \hat{n} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{l} \, .$$

(1) Erläutern Sie mithilfe obiger Grenzwertbeziehung, warum die Rotation als Maß für die Wirbelstärke eines Vektorfeldes an einem Ort betrachtet wird.

(2) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der Wirbelstärke eines Vektorfeldes und seiner Weg(un)abhängigkeit.

(d) Betrachten Sie eine Luftströmung in der x-z-Ebene. Die Horizontalgeschwindigkeit v_x des zugehörigen Geschwindigkeitsvektorfeldes $\vec{v}(x, y = 0, z) = v_x(z)\hat{e}_x$ nimmt mit zunehmender vertikaler Höhe z zu.

(1) Skizzieren Sie $\vec{v}(x, y = 0, z)$ in der x-z-Ebene.

(2) Erklären Sie durch Einfügen eines Rechtecks A, wieso es in derartigen Luftströmungen zu Wirbelbildung kommt. Wie wirkt sich die Größe und die Form der eingefügten Form A auf Ihre Erklärung aus? Begründen Sie Ihre Antwort.