Aufgabe: Satz von Gauß

In dieser Aufgabe setzen Sie sich mit dem Satz von Gauß auseinander. Hierfür nutzen Sie die Vektorfeld-Simulation aus der Aufgabe „Divergenz von Vektorfeldern" (`https://www.uni-goettingen.de/de/vektorfelder/644934.html`). Sie *dürfen* die Simulation bei jeder Teilaufgabe zu Hilfe nehmen. Wenn Sie die Simulation nutzen *sollen*, ist dies explizit angegeben.

Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{F}(x,y)$ mit

$$\vec{F}(x,y) = x\hat{e}_x + 2\hat{e}_y\,.$$

(a) Der Fluss Φ eines Vektorfeldes in zwei Dimensionen $\vec{B}(x,y)$ durch den Rand $C = \partial A$ einer Fläche A ergibt sich über das Flächenintegral

$$\Phi = \int_{\partial A} \vec{B}(x,y)\cdot d\vec{n}\,.$$

Dabei ist $d\vec{n} = \hat{n}dl$ und der Kurvennormaleneinheitsvektor $\hat{n}$ ist nach außen gerichtet.

(1) Skizzieren Sie $\vec{F}(x,y)$.

(2) Fügen Sie ein beliebiges Rechteck in Ihre Skizze ein und zeichnen Sie die Kurvennormalen sowie die Projektion der Feldkomponenten auf diese Normalen an die vier Seiten des Rechtecks ein.

(3) Bilanzieren Sie qualitativ die Zu- und Abflüsse der Feldkomponenten in Bezug auf den Rand der Rechteckfläche: Verzeichnet das Rechteck insgesamt einen Zu- oder Abfluss?

(b) Der Satz von Gauß in zwei Dimensionen beschreibt den Zusammenhang zwischen der Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{B}(x,y)$ innerhalb einer Fläche A und dem Fluss des Vektorfeldes durch die (geschlossene) Randkurve dieser Fläche ∂A,

$$\int_A \operatorname{div}\vec{B}\,dA = \int_{\partial A} \vec{B}\cdot d\vec{n}\,.$$

(1) Formulieren Sie, wie $\int_A \operatorname{div}\vec{B}\,dA$ anschaulich verstanden werden kann. Nutzen Sie dafür die qualitative Interpretation der Divergenz aus der Aufgabe „Divergenz von Vektorfeldern" sowie eines Flächenintegrals.

(2) Begründen Sie anhand des Beispiels von $\vec{F}(x,y)$ den Zusammenhang zwischen der Änderung von Feldkomponenten und dem Fluss durch Flächen. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

(3) Nutzen Sie die Simulation, um den Fluss von $\vec{F}(x,y)$ durch den Rand eines Quadrates der Kantenlänge 1 zu bestimmen. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Wert mit der linken Seite des Satzes von Gauß übereinstimmt.

(c) Die Definition des Satzes von Gauß in drei Dimensionen lautet entsprechend

$$\int_V \operatorname{div}\vec{B}\,dV = \int_{\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{n}$$

für ein Volumen V mit der geschlossenen Oberfläche ∂V. Daraus ergibt sich die koordinatenfreie Definition der Divergenz über

$$\operatorname{div}\vec{B} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_{\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{n}\,.$$

(1) In Teilaufgabe (b) haben Sie den Zusammenhang zwischen der Änderung der Feldkomponenten entlang der Koordinatenrichtungen und dem Fluss durch eine Fläche anhand des Satzes von Gauß erarbeitet. Erklären Sie, inwiefern diese Interpretation des Satzes von Gauß in drei Raumdimensionen angewendet werden kann.

(2) Erläutern Sie mithilfe obiger Grenzwertbeziehung, warum die Divergenz als Maß für die Quellstärke eines Vektorfeldes an einem Ort betrachtet wird.

(d) Die Geschwindigkeit des abgebildeten Wasserstrahls sei durch das dargestellte Geschwindigkeitsvektorfeld $\vec{v}(x,y)$ gegeben.

(1) Für den Wasserstrahl gilt die Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div}\vec{v}(x,y) = 0$ und somit $\int_{\partial A}\vec{v}\cdot d\vec{n} = 0$. Erklären Sie, wie der Fluss durch das eingefügte Rechteck A Null sein kann, obwohl die horizontalen Rechteckkanten offensichtlich einen geringeren Zu- als Abfluss verzeichnen.

(2) Ist $\int_{\partial A}\vec{v}\cdot d\vec{n}$ auch dann noch Null, wenn (i) A sehr klein wird, (ii) A kreisförmig ist und (iii) A teilweise außerhalb des räumlich begrenzten Wasserstrahls verläuft? Begründen Sie Ihre Antwort.