Vektorielle Feldkonzepte verstehen durch Zeichnen?

Erste Wirksamkeitsuntersuchungen

Larissa Hahn*, Pascal Klein*

*Georg-August-Universität Göttingen, Didaktik der Physik, Friedrich-Hund-Platz 1, 37077 Göttingen
larissa.hahn@uni-goettingen.de

Kurzfassung

Divergenz und Rotation sind (vektorielle) Differentialoperatoren, die als Quell- bzw. Wirbelstärke von Vektorfeldern interpretiert werden können und mit den Integralsätzen von Gauß und Stokes einen zentralen Bestandteil der Vektoranalysis bilden. Im Elektromagnetismus treten sie prominent in den (differentiellen) Maxwell'schen Gleichungen hervor und verbinden beispielsweise elektrische und magnetische Felder mit den physikalischen Größen der lokalen Ladungs- und Stromdichte. Die Integralsätze von Gauß und Stokes führen hier zu Integraldarstellungen dieser Maxwell'schen Gleichungen, den Gesetzen von Gauß und Ampère. Für die physikalische Anwendung ist dabei neben der mathematischen Berechnung vor allem ein konzeptionelles Verständnis dieser Feldkonzepte von Bedeutung, welches Studierenden jedoch im Gegensatz zu algebraischen Berechnungen häufig Schwierigkeiten bereitet. Bisherige Forschungsergebnisse betonen daher die Notwendigkeit zur Förderung des konzeptionellen Verständnisses und zur Verbindung zwischen mathematischem und qualitativem Wissen u. a. durch multi-repräsentationale Zugänge. Zu diesem Zweck stellt dieser Beitrag die Entwicklung multi-repräsentationaler Lernaufgaben zur Vektoranalysis vor, die empirische Forschungsergebnisse zu studentischen Lernschwierigkeiten aufgreifen und Zeichenaktivitäten zur Förderung von Repräsentationskompetenzen integrieren. Neben der theoretischen Fundierung der Materialentwicklung werden Beispiele konkreter Lernaufgaben vorgestellt.

1. Einleitung

Vektorfelder sind integraler Bestandteil der Elektrodynamik und finden darüber hinaus Anwendung in vielen Teilgebieten der Physik, z. B. der (Fluid-) Mechanik. Ebene Vektorfelder im $\mathbb{R}^2$ können anhand einer Orthonormalbasis aus den kartesischen Einheitsvektoren $\hat{e}_x$ und $\hat{e}_y$ definiert werden, sodass sich die Vektoren des Vektorfeldes durch die Komponentenzerlegung

$$\vec{v}(x, y, z = 0) = v_x(x, y)\hat{e}_x + v_y(x, y)\hat{e}_y \qquad \{1\}$$

(x-Komponente v_x und y-Komponente v_y) als Linearkombination der kartesischen Einheitsvektoren darstellen lassen. In der physikalischen Anwendung ist außerdem eine äquivalente Darstellung in nicht-kartesischen Koordinaten, z. B. in Polarkoordinaten

$$\vec{v}(r, \varphi) = v_r(r, \varphi)\hat{e}_r + v_\varphi(r, \varphi)\hat{e}_\varphi\,, \qquad \{2\}$$

häufig von Vorteil. Neben der algebraischen Form werden Vektorfelder typischerweise graphisch mithilfe von Pfeilen dargestellt, die die Richtung und den Betrag des Feldes in jedem Punkt repräsentieren.
Im Zusammenhang mit der Darstellung einer Größe, z. B. einer Geschwindigkeit, als Vektorfeld sind besonders die Eigenschaften des Feldes von Bedeutung für die physikalische Anwendung. So gibt die Divergenz eines ebenen Vektorfeldes $\vec{v}(x, y, z = 0)$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y \qquad \{3\}$$

mit den partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ Aufschluss über die Quellen und Senken von $\vec{v}$ und seine Rotation

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = (\frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x)\, \hat{e}_z \qquad \{4\}$$

indiziert die Wirbelstärke des Feldes. Mit Blick auf die integrale Darstellung der Maxwell'schen Gleichungen sind diese vektoriellen Feldkonzepte in der Elektrodynamik insbesondere in den Integralsätzen von Gauß,

$$\int_V \operatorname{div} \vec{v}\, dV = \oint_{\partial V} \vec{v} \cdot d\vec{n} \qquad \{5\}$$

(für ein Volumen V mit der Oberfläche ∂V, dem Volumenelement dV und dem Flächendifferential $d\vec{n}$), und Stokes,

$$\int_A \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{n} = \oint_{\partial A} \vec{v} \cdot d\vec{l} \qquad \{6\}$$

(für eine Fläche A mit der Randkurve ∂A, dem Flächendifferential $d\vec{n}$ und dem vektoriellen Wegelement $d\vec{l}$), von Bedeutung. Während der Gauß'sche Integralsatz eine Relation zwischen der Divergenz eines Vektorfeldes und dem Fluss durch eine

Randfläche herstellt, verbindet der Stokes'sche Integralsatz die Rotation eines Vektorfeldes mit der Zirkulation entlang einer Randkurve. Diese Sätze sind von großer Relevanz für das Herzstück des Elektromagnetismus, die Maxwell'schen Gleichungen, die die wesentlichen Zusammenhänge und Eigenschaften elektrischer und magnetischer Felder zusammenfassen. Dementsprechend hoch ist die Bedeutung eines fundierten Verständnisses vektorieller Feldkonzepte für das Physikstudium. So ergab eine Studie von Burkholder et al. (2021) einen signifikanten Zusammenhang zwischen einer umfangreichen Vorbereitung der Vektorrechnung und der Leistung von Studierenden in einem Einführungskurs zum Elektromagnetismus. Weitere Forschungsergebnisse zeigten außerdem, dass Studierende kaum Probleme mit den mathematischen Grundlagen der vektoranalytischen Konzepte hatten; die für das physikalische Verständnis relevanten konzeptionellen Hintergründe bereiteten ihnen jedoch Schwierigkeiten (z. B. Bollen et al., 2015; Pepper et al., 2012; Singh & Maries, 2013). Da in der gängigen Praxis häufig formal-abstrakte, mathematische Erklärungsansätze genutzt werden (Smith, 2014), zeigt sich an dieser Stelle die Notwendigkeit neuer Zugänge zu vektoriellen Konzepten und den entsprechenden Integralsätzen.
Während die Darstellung von Vektorfeldern als algebraische Gleichung für quantitative Berechnungen nützlich ist, bieten Vektorfelddiagramme den Vorteil, viele Eigenschaften des Feldes auf einen Blick darzustellen. Im Sinne eines multi-repräsentationalen Ansatzes bietet die Integration von Formeln und Vektorfelddiagrammen in Lernaufgaben zur Vektoranalysis somit die Möglichkeit, die Entwicklung eines umfassenden, sowohl operationalen als auch konzeptuellen, Wissens zu unterstützen. Daher wird in diesem Beitrag die Entwicklung forschungsbasierter, multi-repräsentationaler Lernaufgaben zur Vektoranalysis vorgestellt, die auf der visuellen Interpretation der vektoriellen Feldkonzepte beruht und zudem Zeichenaktivitäten und digitale Tools als fachdidaktische Methoden integriert.

2. Fachdidaktischer Hintergrund

In diesem Abschnitt werden die empirischen und theoretischen Grundlagen für die Entwicklung der Lernaufgaben diskutiert. Zu diesem Zweck werden zunächst bisherige empirische Ergebnisse zu Lernschwierigkeiten im Umgang mit Vektorfeldern und vektoriellen Feldkonzepten zusammengefasst, um anschließend auf Basis des DeFT-Frameworks den Mehrwert multipler Repräsentationen in diesem Zusammenhang zu erläutern.

2.1. Lernschwierigkeiten im Umgang mit Vektorfeldern und vektoriellen Feldkonzepten

Der Repräsentationswechsel zwischen der graphischen Darstellung von Vektorfeldern als Vektorfelddiagramm und der algebraischen Beschreibung als Formel (Gl. 1) bereitet Studierenden zahlreiche Probleme (Bollen et al., 2017). Neben typischen Schwierigkeiten im Umgang mit Vektoren, die sich vor allem auf die Länge und Richtung der Vektoren oder die Verwendung von Einheitsvektoren beim Skalar- oder Vektorprodukt beziehen (Barniol & Zavala, 2014), fällt Studierenden bei der Konstruktion eines Vektorfelddiagramms anhand eines algebraischen Formelausdrucks vor allem die Vektoraddition schwer (Bollen et al., 2017). Beim umgekehrten Repräsentationswechsel von der graphischen zur algebraischen Form stellt die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems (vor allem in nicht-kartesischen Koordinaten, z. B. Gl. 2), die Verwendung von Einheitsvektoren und die Differenzierung zwischen Komponenten und Koordinaten ein Problem dar (Bollen et al., 2017; Gire & Price, 2012).

Neben konzeptionellen Lücken im Umgang mit Vektorfeld-Repräsentationen sind vor allem Lernschwierigkeiten von (Physik-)Studierenden im Umgang mit vektoranalytischen Konzepten Gegenstand aktueller Untersuchungen. Diese ergaben zahlreiche Lücken bezüglich der konzeptionellen Erläuterung der Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes. So fanden Bollen et al. (2015), dass nur etwa 20% der Studienteilnehmenden bei der Frage nach einer Interpretation von „$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$“ und „$\vec{\nabla} \times \vec{F}$“ konzeptionell antworteten, die Mehrheit gaben einen algebraischen Ausdruck an (Baily et al. (2016) und Singh & Maries (2013) berichteten ähnliche Ergebnisse). Im Hinblick auf die graphische Darstellung von Vektorfeldern zeigten weitere Untersuchungen, dass Studierende Schwierigkeiten haben, zu beurteilen, ob ein Vektorfelddiagram divergenz- bzw. rotationsfrei ist oder nicht (Ambrose, 2004; Bollen et al., 2015; Jung & Lee, 2012; Klein et al., 2018; 2019; Pepper et al., 2012; Singh & Maries, 2013). Außerdem finden sich bei Studierenden z. T. Vorstellungen über Divergenz und Rotation, die einer wörtlichen Übersetzung der Begriffe gleichkommen, wie beispielsweise Divergenz als ein „Auseinanderlaufen“ des Feldes (Baily et al., 2016; Bollen et al., 2016; Pepper et al., 2012) oder Rotation als „Biegung von Vektoren“ (Baily et al., 2016; Bollen et al., 2016; 2018; Jung & Lee, 2012). Weiterhin findet eine lose Assoziation der Divergenz mit Quellen und Senken statt, Rotation wird an der Richtungsänderung der Vektoren festgemacht, sowohl Divergenz als auch Rotation wird als globale Eigenschaften eines Feldes aufgefasst und Physikstudierende verwechseln die Quantitäten der Divergenz und Rotation als Skalar oder Vektor (Baily et al., 2016; Bollen et al., 2018). In einer Untersuchung zu Lernschwierigkeiten von Physikstudierenden bezüglich der Rotation von Vektorfeldern diagnostizierten Jung und Lee (2012) die Lücke zwischen mathematischem und konzeptionellem Wissen (reasoning) als eine Hauptquelle für Verständnisprobleme. Singh und Maries (2013) schlussfolgerten treffend, dass selbst Studierende mit Hochschulabschluss Schwierigkeiten mit den Konzepten der Divergenz und Rotation haben, obwohl sie wissen, wie diese für ein gegebenes Vektorfeld mathematisch berechnet werden.

Mehrere Studien vertieften diese Forschungslinie und identifizierten verschiedene Lernschwierigkeiten, die auch im Umgang mit verschiedenen Vektorfeld-Repräsentationen deutlich wurden, und sich vor allem auf die Vektorkomponentenzerlegung und das Konzept der Kovariation zwischen Feldkomponenten und Koordinaten beziehen. So zeigte sich beispielsweise hinsichtlich der partiellen Vektorableitungen, dass Studierende die Änderung eines Vektorpfeils mit seinem Wert verwechselten (Pepper et al., 2012). Die beschriebenen Schwierigkeiten konnten durch eine Analyse der Blickdaten von Studierenden bei der Betrachtung von Vektorfeld-Diagrammen mittels Eye-Tracking validiert werden (Klein et al., 2018; 2019; 2021). Neben der Divergenz und Rotation von Vektorfeldern sind bei den Integralsätzen von Gauß und Stokes vor allem Weg-, Oberflächen- und Volumenintegrale zentral, welche in ihrer physikalischen Anwendung in der Elektrodynamik zumeist als Summe infinitesimaler Änderungen interpretiert werden. Hier fanden Pepper et al. (2012), dass Studierenden, die einen Kurs zum Elektromagnetismus besuchten, sowohl die Berechnung als auch die Interpretation von Weg-, Oberflächen- und Volumenintegralen als Summe infinitesimaler Änderungen Probleme bereitet.

Verschiedene Studien im Kontext der Elektrostatik und des Elektromagnetismus gingen über die Untersuchung von mathematischen Problemlöseszenarien mit Vektorfeldern und Integralen hinaus. Sie zeigten, dass konzeptionelle Lücken bezüglich vektoranalytischer Inhalte zu einem unsachgemäßen Verständnis und Fehlern bei der Anwendung essentieller Prinzipien in der Physik führten, z. B. in Bezug auf die Maxwell‘schen Gleichungen des Elektromagnetismus (Bollen et al., 2015; 2016), das Gauß’sche Gesetz (Li & Singh, 2017) oder bei konservativen (Kraft-)Feldern (Ambrose, 2004; Jung & Lee, 2012).

2.2. Multiple Repräsentationen und Zeichenaktivitäten als fachdidaktische Methoden

Smith (2014) zeigte anhand eines Überblicks über verschiedene physikalische Lehrbücher, dass die Divergenz und der Gauß‘sche Integralsatz in einführenden Texten zur Physik in der Regel lediglich als mathematischer Ausdruck gegeben allerdings nicht oder nur unzureichend qualitativ erklärt werden (Smith, 2014). Auch in weiterführenden Physiklehrbüchern findet kaum eine geometrische Erläuterung oder Diskussion vektorieller Feldkonzepte und Integralsätze statt (Smith, 2014). Vor dem Hintergrund der beschriebenen empirischen Forschungsbefunde wird somit die Relevanz und Notwendigkeit neuer Interventionen, die ein konzeptionelles und visuelles Verständnis adressieren, umso deutlicher. In den aufgeführten Arbeiten wird hierfür vor allem die Verwendung visueller Repräsentationen vorgeschlagen. Dies unterstützt den grundsätzlichen didaktischen Konsens zur Förderung der Repräsentationskompetenz, die mit dem Wissenserwerb in Verbindung steht (z. B. Niemienen et al., 2012; Rau, 2017). Das DeFT-Framework, welches der Charakterisierung multi-repräsentationaler Lernumgebungen dient (Ainsworth, 2006) greift dabei drei zentrale Funktionen multipler Repräsentationen (MRs) auf, die positive Auswirkungen auf die Kognitionsprozesse von Lernenden haben können (Ainsworth, 1999): (i) MRs enthalten ergänzende Informationen oder unterstützen komplementäre kognitive Prozesse (Seufert, 2003); (ii) Verschiedene Repräsentationen können Lernenden helfen, ein besseres Verständnis einer Thematik zu entwickeln, indem eine Repräsentation verwendet wird, um mögliche (Fehl-)Interpretationen einer anderen einzuschränken; (iii) Die Verwendung von MRs ermöglicht ein tieferes Verständnis einer Situation oder eines Konstrukts. Um von MRs profitieren zu können, bedarf es daher Repräsentationskompetenzen, die auf einem Verständnis davon beruhen, wie einzelne Repräsentationen Informationen darstellen, wie sie miteinander in Verbindung stehen und wie eine passende Repräsentation für eine Problemlösung zu wählen ist (Ainsworth, 2006).

Vor diesem Hintergrund entwickelten Bollen et al. (2018) eine fünfteilige, aufgabenbasierte (guided-inquiry) Lehr-Lern-Sequenz zu vektoranalytischen Inhalten der Elektrodynamik mit dem Ziel, die Verbindung zwischen graphischen Vektorfeld-Repräsentationen, algebraischen Berechnungen zur Divergenz und Rotation sowie den Maxwell’schen Gleichungen zu stärken. Empirische Untersuchungen zeigten einen positiven Effekt der Interventionen auf das strukturelle Verständnis der Differentialoperatoren, das konzeptionelle Verständnis der Maxwell’schen Gleichungen und die Fähigkeit der Interpretation von Divergenz und Rotation anhand von Vektorfelddiagrammen bei Physikstudierenden. Darüber hinaus äußerten die Proband:innen überwiegend positives Feedback hinsichtlich des Lernansatzes.

Mit Blick auf die Schwierigkeiten von Studierenden bezüglich der Evaluation vektorieller Feldkonzepte anhand von Vektorfelddiagrammen entwickelten Klein et al. (2018) textbasierte Anweisungen zur visuellen Interpretation der Divergenz, die sich zum einen auf die differentielle Definition anhand der Kovariation von Komponenten und Koordinaten (Gl. 3) und zum anderen auf die integrale Repräsentation über den Fluss durch eine Randfläche im Sinne des Gauß’schen Integralsatzes (Gl. 5) beziehen. In einer experimentellen Folgestudie wurde die Instruktion der differentiellen Strategie zusätzlich durch Hinweise zur Komponentenzerlegung unterstützt und anschließend auf die Rotation eines Vektorfeldes übertragen (Klein et al., 2019; Gl. 4). Empirische Untersuchungen zur Performanz der Studierenden ergaben einen quantitativ gemessenen Zuwachs des konzeptionellen Verständnisses infolge der Interventionen. In anschließenden Interviews äußerten die Proband:innen als Problemquelle vor allem die Komponentenzerlegung (Klein et al., 2018), weshalb eine experimentelle Folgestudie Zeichenaktivitäten zur Unterstützung der visuellen Interpretation der Divergenz involvierte (Hahn & Klein, 2021; 2022). Hier zeigte sich neben positiven Lerneffekten, dass die Skizzierung der Feldkomponenten die wahrgenommene kognitive Belastung durch die Anwendung der visuellen Strategie zur Beurteilung der Kovariation signifikant reduzieren konnte (Hahn & Klein, 2022). Dieses Ergebnis unterstützt die Forderung von Bollen et al. (2016) nach modernen Unterrichtsszenarien, da der traditionelle Unterricht nicht ausreiche, um ein vollständiges Verständnis von Differentialoperatoren zu ermöglichen. Neben der Unterstützung instruktionsbasierten Lernens durch Zeichenaktivitäten zeigten erste Arbeiten zudem den Mehrwert des Zeichnens beim Lernen mit Simulationen (Kohnle et al., 2020; Wu & Rau, 2018). So können Zeichenaktivitäten während der Nutzung von Simulationen eine Vertiefung des Verständnisses der dargestellten Repräsentation unterstützen und gelten daher als vielversprechender Ansatz beim (multi-repräsentationalen) Lernen in den Naturwissenschaften (Ainsworth et al., 2011; Kohnle et al., 2020; Wu & Rau, 2018).

3. Materialentwicklung

Auf Grundlage bisheriger empirischer Ergebnisse zu Lernschwierigkeiten bezüglich der Vektoranalysis und vor dem Hintergrund der vorgestellten fachdidaktischen Ansätze wird im Folgenden die Entwicklung der Lernaufgaben erläutert. Dafür werden zunächst die wichtigsten Prinzipien der Materialentwicklung beschrieben und anschließend ihre Umsetzung anhand konkreter Beispielaufgaben konkretisiert. Alle weiteren Lernaufgaben sind als zusätzliche Medien beigefügt.

3.1. Prinzipien zur Entwicklung der Lernaufgaben

Im Sinne einer multi-repräsentationalen Lehr-Lern-Umgebung berücksichtigt die Entwicklung der Lernaufgaben die Design-Parameter des DeFT-Frameworks. So konzentrieren sich die Aufgaben auf drei verschiedene heterogene Repräsentationsformen von Vektorfeldern – Formel, Diagramm und schriftliche Beschreibung (Ainsworth, 2006). Diese enthalten z. T. redundante Informationen, z. B. ist die Komponentenzerlegung zentraler Bestandteil der Formel- und der graphischen Darstellungsform. Allerdings stehen in den unterschiedlichen Repräsentationsformen verschiedene Eigenschaften und Charakteristika von Vektorfeldern im Zentrum der Darstellung. So fokussiert die Formeldarstellung u. a. das Konzept der Einheitsvektoren und stellt die Eigenschaften eines Vektorfeldes präzise und auf abstrakte Weise dar, während Vektorfelddiagramme eher globale Informationen des Vektorfeldes beinhalten und einen visuellen Zugang zur Kovariation von Komponenten und Koordinaten ermöglichen (Bollen et al., 2018). Schriftliche Beschreibungen und Erläuterungen dienen zudem der Verbindung von algebraischer und graphischer Darstellungsform, indem sie die Korrespondenz der Repräsentationsformen auf semantischer Ebene explizieren und somit eine globale Kohärenzbildung und die Entwicklung von Repräsentationskompetenzen unterstützen (Seufert & Brünken, 2004).

Der Fokus der Lernaufgaben liegt dabei vor allem auf der visuellen Interpretation der vektoranalytischen Formeln anhand von Vektorfelddiagrammen, welche durch Zeichenaktivitäten und den Einsatz einer Vektorfeld-Simulation unterstützt wird. Die Triangulation dieser Methoden dient zum einen der Visualisierung der Konzepte und fördert zum anderen die Aktivität der Lernenden z. B. durch das Abzeichnen eines Vektorfeldes aus der Simulation, um sicherzustellen, dass auf zentrale Eigenschaften geachtet wird (Ainsworth & Scheiter, 2021; Kohnle et al., 2020; Schmidgall et al., 2018). Gleichzeitig unterstützt dieser Ansatz die Verbindung verschiedener Problemlösestrategien, indem z. B. die differentielle und die integrale Definition der Divergenz sowohl getrennt als auch in ihrer Verbindung im Integralsatz von Gauß visuell interpretiert werden.

Die Struktur der Lernaufgaben folgt dem Ansatz der Modelling Instruction (z. B. PcPadden & Brewe, 2017), indem jede Aufgabe ein vektoranalytisches Konzept thematisiert, bei dem die Repräsentationsformen für die Entwicklung eines konzeptuellen Verständnisses koordiniert eingesetzt werden. Die Materialien umfassen somit vier Einheiten (Conceptual Models) zur Divergenz von Vektorfeldern, dem Satz von Gauß, der Rotation von Vektorfeldern und dem Satz von Stokes, wobei die Lernaufgaben zum Satz von Gauß bzw. Stokes auf Inhalte der Lernaufgaben zur Divergenz bzw. Rotation zurückgreifen. Neben dieser inhaltlichen Vernetzung der Lernaufgaben folgt die Aufgaben-Sequenz dem Ansatz von Huang et al. (2013), indem die Rotation und der Satz von Stokes auf Basis der Interpretation der Divergenz und des Satzes von Gauß eingeführt werden. Weiter sind die Aufgaben zur Rotation und Divergenz bzw. zum Satz von Gauß und Stokes dem Prinzip „den Unterschied in der Ähnlichkeit suchen“ folgend in paralleler Form konzipiert (Huang et al., 2013). Dabei gilt es, die visuelle Interpretation, z. B. der Kovariation, von der Divergenz auf die Rotation zu übertragen, wobei die Eigenschaften der Rotation als Abgrenzung gegenüber der Divergenz über Unterschiede der Differentialoperatoren ermittelt werden. Analog ergibt sich die Idee des Stokes'schen Integralsatzes, als Überführung eines geschlossenen Wegintegrals über einem Vektorfeld in ein Flächenintegral, aus dem Satz von Gauß durch dimensionale Reduktion und unter Berücksichtigung spezifischer Charakteristika, z. B. der vektoriellen Eigenschaft der Rotation.

Ein zentrales Ergebnis bisheriger Studien war, dass Vektorfelder in nicht-kartesischen Koordinaten Studierende vor große Herausforderungen stellten. Da diese Felder in der physikalischen Anwendung allerdings besonders relevant sind, werden diese in den Lernaufgaben explizit thematisiert, wiederholt aufgegriffen und insbesondere ihre Verbindung mit der Darstellung in kartesischen Koordinaten fokussiert.

3.2. **Ausgewählte Beispiele**

Im Sinne des DeFT-Frameworks liegt der Fokus der multi-repräsentationalen Lernaufgaben in der Sequenzierung und Unterstützung von Verbindungen zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen. Als zentrale Komponente einer Repräsentationskompetenz gilt dabei das Wissen darüber, wie einzelne Repräsentationen Informationen darstellen und wie sie miteinander in Verbindung stehen (Ainsworth, 2006). Aus diesem Grund zielt der erste Teil der Divergenz-Aufgabe auf Darstellungsformen von Vektorfeldern ab:

> Zeichnen Sie ein zweidimensionales Vektorfeld $\vec{A}_1(x,y)$, das <u>nur</u> eine x-Komponente besitzt, die von der y-Koordinate abhängt. Geben Sie $\vec{A}_1(x,y)$ in der Form $\vec{A}_1(x,y) = A_{1,x}\hat{e}_x + A_{1,y}\hat{e}_y$ an. Zeichnen Sie dann ein zweidimensionales Vektorfeld $\vec{A}_2(r,\varphi)$, das <u>nur</u> eine von der r-Koordinate abhängige φ-Komponente besitzt und geben Sie es in der Form $\vec{A}_2(r,\varphi) = A_{2,r}\hat{e}_r + A_{2,\varphi}\hat{e}_\varphi$ an.

In dieser Aufgabe werden alle drei Repräsentationsformen thematisiert; die verbale Beschreibung ist in der Aufgabenstellung gegeben, die formale sowie die graphische Repräsentationsform gilt es zu erarbeiten. Durch die Darstellung desselben Vektorfeldes in allen drei Repräsentationsformen liegt der Fokus auf dem Wechsel zwischen den Darstellungen und ihrer Korrespondenz. Außerdem führt die Skizzierung der Felder in die Zeichenaktivitäten der Lernaufgaben ein, bei der auch die Vektorfeld-Simulation zu Hilfe genommen werden kann. In diesem Sinne beginnen auch die übrigen Aufgaben(-teile) zumeist mit der Skizzierung eines Vektorfeldes, um anhand dessen exemplarisch konzeptuelle Zusammenhänge zu untersuchen. So sind bei den Lernaufgaben zur Divergenz und Rotation nach der Definition für ein zweidimensionales Vektorfeld in kartesischen Koordinaten folgende Aufgabenstellungen zu bearbeiten:

> Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{B}(x,y)$ mit $\vec{B}(x,y) = -k(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y)$ mit $k \in \mathbb{R}$ konstant.
>
> (1) Skizzieren Sie $\vec{B}(x,y)$ für $k = -1$.
>
> (2) Wählen Sie einen beliebigen Ort in Ihrer Skizze aus und zeichnen Sie die Feldkomponenten für den Vektor an diesem Ort und für die Vektoren in seiner unmittelbaren Umgebung ein.
>
> (3) Beurteilen Sie qualitativ anhand Ihrer Skizze, wie sich die Feldkomponenten entlang der Koordinatenrichtungen verändern: Geben Sie also an, ob die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}B_x$ und $\frac{\partial}{\partial y}B_y$ positiv, negativ oder Null sind. Folgern Sie aus diesem Ergebnis, ob die Divergenz an dem von Ihnen gewählten Ort positiv, negativ oder Null ist. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe der Simulation sowie einer Rechnung. [Aufgabe zur Divergenz]

> Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{B}(x,y,z)$ mit $\vec{B}(x,y,z) = -y\hat{e}_x + x\hat{e}_y$.
>
> (1) Skizzieren Sie $\vec{B}(x,y,z)$ in der x-y-Ebene.
>
> (2) Fügen Sie ein Schaufelrad [als Abbildung eingefügt] an einem beliebigen Ort im Feld ein und zeichnen Sie die Feldkomponenten in der Umgebung des Rades ein. Stellen Sie sich vor, das Vektorfeld interagiere mit dem Rad wie eine Fluid. Markieren Sie die Komponenten des Feldes, die auf das Schaufelrad wirken. Rotiert das Schaufelrad? Begründen Sie!
>
> (3) Beurteilen Sie anhand Ihrer Skizze, wie sich die Feldkomponenten entlang der Koordinatenachsen verändern: Geben Sie also an, ob die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial y}B_x$ und $\frac{\partial}{\partial x}B_y$ positiv, negativ oder Null sind. Folgern Sie aus diesem Ergebnis, ob die Rotation an dem von Ihnen gewählten Ort Null ist, in positive oder negative $\hat{e}_z$-Richtung zeigt. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe der Simulation sowie einer Rechnung. [Aufgabe zur Rotation]

Kern dieser Lernaufgaben ist dabei die Interpretation der Feldkonzepte anhand der partiellen Vektorableitungen (differentielle Strategie; Klein et al., 2018). Da bisherige Untersuchungen zeigten, dass Studierende besondere Schwierigkeiten mit der Komponentenzerlegung und der Kovariation von Komponenten und Koordinaten haben, sollen hier in einem ersten Schritt zunächst die Feldkomponenten skizziert werden, um anschließend die Verbindung mit der formalen Schreibweise herzustellen. In der Parallelität der Aufgaben zeigen sich die Ähnlichkeiten der Feldkonzepte, indem beide auf Veränderungen der Feldkomponenten entlang der Koordinaten beruhen, aber auch ihre Unterschiede. So basiert die Divergenz auf Veränderungen der x-Komponente in x-Richtung bzw. der y-Komponente in y-Richtung, während bei der Rotation Veränderungen der x-Komponente in y-Richtung bzw. der y-Komponente in x-Richtung relevant sind. Die bereits in der Literatur untersuchte qualitative Evaluation der Rotation über das Schaufelrad-Modell unterstützt dabei das Verständnis für den vektoriellen Charakter der Rotation, indem sich das Rad um eine zur x-y-Ebene senkrechte Achse dreht, sofern sich die Feldkomponenten auf die beschriebene Weise ändern (Huang et al., 2013; Jung & Lee, 2012). Dies unterstützt eine erste intuitive Vorstellung der Rotation und dient insbesondere der Verbindung zwischen qualitativem und mathematischem Verständnis (Huang et al., 2013; Jung & Lee, 2012).

Auch bei den Lernaufgaben zu den Integralsätzen von Gauß und Stokes steht diese Verbindung und damit die Vernetzung verschiedener Repräsentationsformen im Fokus. Nachdem in einem ersten Aufgabenteil der Fluss durch eine Fläche bzw. die Zirkulation entlang einer Kurve qualitativ und mathematisch eingeführt wurde, zielt der nachfolgende Aufgabenteil auf die Gleichheit von differentieller und integraler

Strategie anhand eines exemplarischen Vektorfeldes ab. Nach Definition der Integralsätze ist die folgende Aufgabenstellung zu bearbeiten:

> Begründen Sie anhand des Beispiels von $\vec{F}(x,y)$ den Zusammenhang zwischen der Änderung von Feldkomponenten und dem Fluss durch Flächen. Fertigen Sie dazu eine Skizze an. [Aufgabe zum Satz von Gauß]
>
> Begründen Sie anhand des Beispiels von $\vec{F}(x,y,z)$ (in der x-y-Ebene) den Zusammenhang zwischen der Änderung von Feldkomponenten und der Zirkulation entlang einer geschlossenen Randkurve. Fertigen Sie dazu eine Skizze an. [Aufgabe zum Satz von Stokes]

Die Parallelität der Aufgaben (Huang et al., 2013) bietet dabei über die Lernaufgaben hinaus Anknüpfungspunkte für weitere (vektoranalytische) Fundamentalsätze (z. B. des Gradienten).

4. Fazit und Ausblick

In einem nächsten Schritt werden die entwickelten Lernaufgaben in die Übungen eines Kurses zum Elektromagnetismus im zweiten Studiensemester implementiert. In einer empirischen Studie wird der (kognitive) Mehrwert von multiplen Repräsentationen beim aufgabenbasierten Lernen vektoranalytischer Inhalte untersucht. Die Aufgaben zielen auf die Förderung der Repräsentationskompetenz und des fachlichen Konzeptverständnisses ab. In einem mixed-methods-Design soll eine Interventionsgruppe (mit multi-repräsentationalen Lernaufgaben) gegenüber einer Kontrollgruppe (mit traditionellen, zumeist rechenbasierten Aufgaben) verglichen werden. Die Ergebnisse dieser Studie dienen der Weiterentwicklung der Lernaufgaben mit dem Ziel, diese perspektivisch mit entsprechender Schulung der Tutor:innen als festen Bestandteil in den Kurs zum Elektromagnetismus zu integrieren.

5. Literatur

Ainsworth, Shaaron (1999): The functions of multiple representations. In: *Computers and Education, 33*(2), 131-152, https://doi.org/10.1016/S0360-1315(99)00029-9

Ainsworth, Shaaron (2006): DeFT: A conceptual framework for learning with multiple representations. In: *Learning and Instruction, 16*(3), 183-198, https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.03.001

Ainsworth, Shaaron; Prain, Vaughan; Tytler, Russell (2011): Drawing to learn in science. In: *Science, 333*(6046), 1096-1097, https://doi.org/10.1126/science.1204153

Ainsworth, Shaaron; Scheiter, Katharina (2021): Learning by drawing visual representations: Potential, purposes, and practical implications. In: *Current Directions in Psychological Science, 30*(1), 61-67, https://doi.org/10.1177/0963721420979582

Ambrose, Bradley S. (2004): Investigating student understanding in intermediate mechanics: Identifying the need for a tutorial approach to instruction. In: *American Journal of Physics, 72*, 453-459, https://doi.org/10.1119/1.1648684

Baily, Charles; Bollen, Laurens; Pattie, Andrew; Van Kampen, Paul; De Cock, Mieke (2016): Student thinking about the divergence and curl in mathematics and physics contexts. In: *Proceedings of the Physics Education Research Conference 2016*, College Park, MD (AIP, New York, 2016), S. 51–54, https://doi.org/10.1119/perc.2015.pr.008

Barniol, Pablo; Zavala, Genaro (2014): Test of understanding of vectors: A reliable multiple-choice vector concept test. In: *Physical Review Special Topics – Physics Education Research, 10*(1), 010121, https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.10.010121

Bollen, Laurens; Van Kampen, Paul; De Cock, Mieke (2015): Students' difficulties with vector calculus in electrodynamics. In: *Physical Review Special Topics – Physics Education Research 11*(2), 020129, https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.11.020129

Bollen, Laurens; Van Kampen, Paul; Baily, Charles; De Cock, Mieke (2016): Qualitative investigation into students' use of divergence and curl in electromagnetism. In: *Physical Review Physics Education Research, 12*(2), 020134, https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.020134

Bollen, Laurens; Van Kampen, Paul; Baily, Charles; De Cock, Mieke (2017): Student difficulties regarding symbolic and graphical representations of vector fields. In: *Physical Review Physics Education Research, 13*(2), 020109, https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020109

Bollen, Laurens; Van Kampen, Paul; De Cock, Mieke (2018): Development, implementation, and assessment of a guided-inquiry teaching-learning sequence on vector calculus in electrodynamics. In: *Physical Review Physics Education Research, 14*(2), 020115, https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.020115

Burkholder, Eric; Murillo-Gonzalez, Gabriel; Wieman, Carl (2021): Importance of math prerequisites for performance in introductory physics. In: *Physical Review Physics Education Research, 17*(1), 010108, https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.17.010108

Gire, Elizabeth; Price, Edward (2012): Graphical representations of vector functions in upper-division E&M. In: *AIP Conference Proceedings*, *1413*(1), S. 27-30, https://doi.org/10.1063/1.3679985

Hahn, Larissa; Klein, Pascal (2021): Multiple Repräsentationen als fachdidaktischer Zugang zum Satz von Gauß-Qualitative Zugänge zur Interpretation der Divergenz von Vektorfeldern. In: *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung, 1*, S. 95-100, Url: https://ojs.dpg-physik.de/index.php/phydid-b/article/view/1151

Hahn, Larissa; Klein, Pascal (2022): Kognitive Entlastung durch Zeichenaktivitäten? Eine empirische Untersuchung im Kontext der Vektoranalysis. In: *Unsicherheit als Element von naturwissenschaftsbezogenen Bildungsprozessen, Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, virtuelle Jahrestagung 2021*, S. 384-387, Url: https://www.gdcp-ev.de/wp-content/tb2022/TB2022_384_Hahn.pdf

Huang, Hui; Wang, Jinbao; Chen, Cheng; Zhang, Xiaoqing (2013): Teaching divergence and curl in an Electromagnetic Field course. In: *International Journal of Electrical Engineering Education, 50*(4), 351-357, https://doi.org/10.7227/IJEEE.50.4.1

Jung, Kyesam; Lee, Gyoungho (2012): Developing a tutorial to address student difficulties in learning curl: A link between qualitative and mathematical reasoning. In: *Canadian Journal of Physics*, *90*(6), 565-572, https://doi.org/10.1139/p2012-054

Klein, Pascal; Viiri, Jouni; Mozaffari, Saleh; Dengel, Andreas; Kuhn, Jochen (2018): Instruction-based clinical eye-tracking study on the visual interpretation of divergence: How do students look at vector field plots? In: *Physical Review Physics Education Research, 14*(1), 010116, https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEduc-Res.14.010116

Klein, Pascal; Viiri, Jouni; Kuhn, Jochen (2019): Visual cues improve students' understanding of divergence and curl: Evidence from eye movements during reading and problem solving. In: *Physical Review Physics Education Research, 15*(1), 010126, https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEduc-Res.15.010126

Klein, Pascal; Hahn, Larissa; Kuhn, Jochen (2021): Einfluss visueller Hilfen und räumlicher Fähigkeiten auf die graphische Interpretation von Vektorfeldern: Eine Eye-Tracking-Untersuchung. In: *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, *27*, 181–201, https://doi.org/10.1007/s40573-021-00133-2

Kohnle, Antje; Ainsworth, Shaaron; Passante, Gina (2020): Sketching to support visual learning with interactive tutorials. In: *Physical Review Physics Education Research, 16*(2), 020139, https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEduc-Res.16.020139

Li, Jing; Singh, Chandralekha (2017): Investigating and improving introductory physics students' understanding of symmetry and Gauss's law. In: *European Journal of Physics, 39*(1), 015702, https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa8d55

McPadden, Daryl; Brewe, Eric (2017): Impact of the second semester University Modeling Instruction course on students' representation choices. In: *Physical Review Physics Education Research*, *13*(2), 020129, https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEduc-Res.13.020129

Nieminen, Pasi; Savinainen, Antti; Viiri, Jouni (2012): Relations between representational consistency, conceptual understanding of the force concept, and scientific reasoning. In: *Physical Review Special Topics – Physics Education Research, 8*(1), 010123, https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.8.010123

Pepper, Rachel; Chasteen, Stephanie; Pollock, Steven; Perkins, Katherine (2012): Observations on student difficulties with mathematics in upper-division electricity and magnetism. In: *Physical Review Special Topics - Physics Education Research, 8*(1), 010111, https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.8.010111

Rau, Martina (2017): Conditions for the effectiveness of multiple visual representations in enhancing STEM learning. In*: Educational Psychology Review*, *29*(4), 717-761, https://doi.org/10.1007/s10648-016-9365-3

Schmidgall, Steffen; Eitel, Alexander; Scheiter, Katharaina (2019): Why do learners who draw perform well? Investigating the role of visualization, generation and externalization in learner-generated drawing. In: *Learning and Instruction*, *60*, 138-153, https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.01.006

Seufert, Tina (2003): Supporting coherence formation in learning from multiple representations. In: *Learning and Instruction, 13*(2), 227-237, https://doi.org/10.1016/S0959-4752(02)00022-1

Seufert, Tina; Brünken, Roland (2004): Supporting coherence formation in multimedia learning. In: *Instructional design for effective and enjoyable computer-supported learning. Proceedings of the first joint meeting of the EARLI SIGs Instructional Design and Learning and Instruction with Computers*, Tübingen, S. 138–147, Url: https://www.iwm-tuebingen.de/workshops/sim2004/pdf_files/Seufert_et_al.pdf

Singh, Chandralekha; Maries, Alexandru (2013): Core graduate courses: A missed learning

opportunity? In: *AIP Conference Proceedings*, *1513*, S. 382-385, https://doi.org/10.1063/1.4789732
Smith, Emily (2014): *Student & textbook presentation of divergence.* Master's thesis (Corvallis, OR: Oregon State University), Url: https://ir.library.oregonstate.edu/concern/graduate_thesis_or_dissertations/s7526h05k
Wu, Sally P.; Rau, Martina A. (2018): Effectiveness and efficiency of adding drawing prompts to an interactive educational technology when learning with visual representations. In: *Learning and Instruction*, *55*, 93–104, https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2017.09.010

Anhang

Folgende Medien sind dem Beitrag beigefügt:

- Lernaufgabe „1 Divergenz von Vektorfeldern“
- Lernaufgabe „2 Satz von Gauß“
- Lernaufgabe „3 Rotation von Vektorfeldern“
- Lernaufgabe „4 Satz von Stokes“