
SRH Hochschule
Heidelberg

# „Newtons Planet“

## Vortrag DD 9.1 am 8. März 2010

## zur Frühjahrstagung der DPG

## in Hannover

**Elmar Schmidt**

**SRH Hochschule Heidelberg**

Prof. Dr. E. Schmidt
School of Engineering & Architecture
Fachhochschule Heidelberg

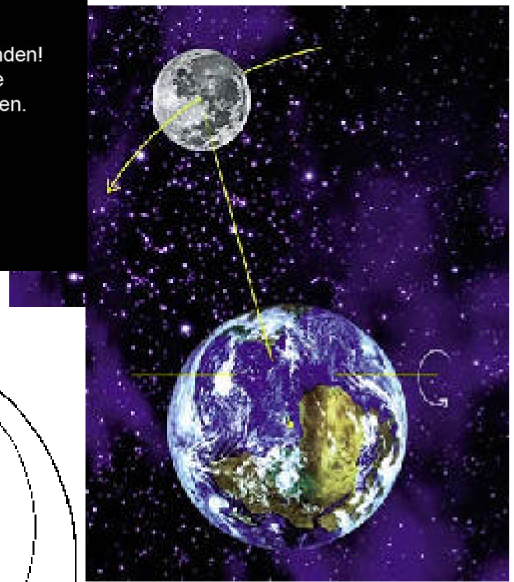
SRH Hochschule
Heidelberg

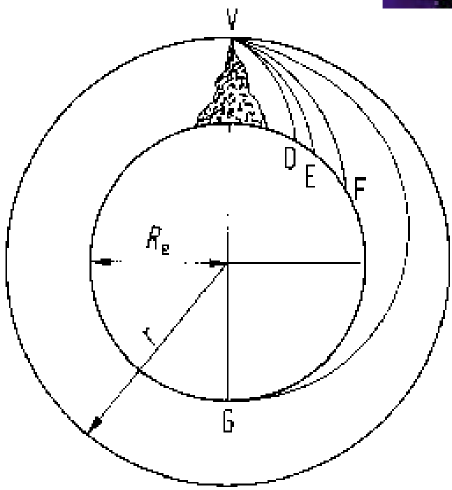
# Isaac Newton
## (1643-1726)

- zeigte die Herkunft der Kepler-Gesetze aus der Planetenanziehung durch die Sonne und
- formulierte das Gravitationsgesetz

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Entfernung aus lizenzrechtlichen Gründen!
Autoren haben die Möglichkeit die
Veröffentlichungsrechte nachzuweisen.





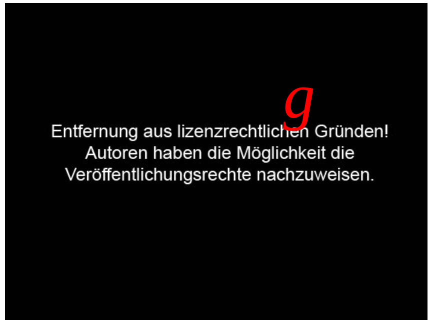
SRH Hochschule Heidelberg

# Gewicht $G$ = Schwerkraft auf Masse $m$

$G = m \cdot g$ mit der Fallbeschleunigung

$g \approx 9{,}81 \mathrm{m/s}^2$

$m$




$m$


$M$

Gravitationsgesetz

$$F_G = g\,\frac{m \cdot M}{R^2} = m\,\frac{g\,M}{R^2}$$

wobei noch zu zeigen ist, daß Erdmasse im Mittelpunkt vereint wirkt (u.a. Gauß)

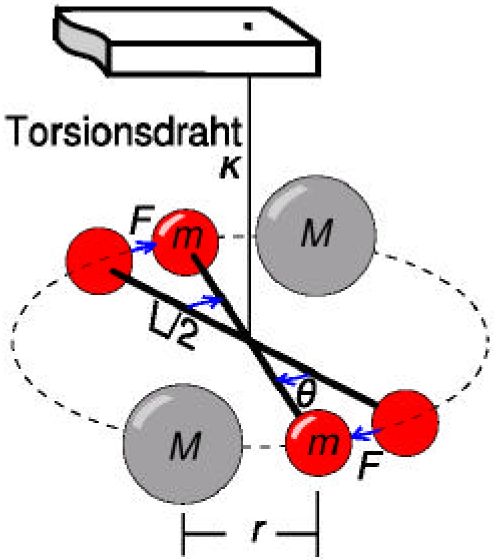
Also: $g = \dfrac{g\,M}{R^2} \Rightarrow M = \dfrac{gR^2}{g}$ $\leftarrow$ Gravitationskonstante?

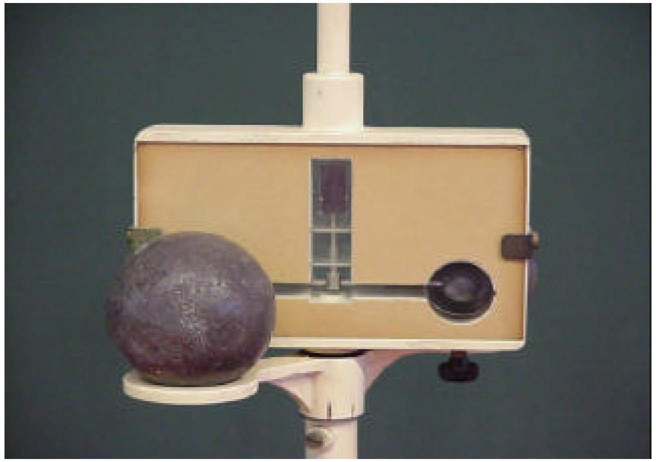
SRH Hochschule Heidelberg

# Cavendish (1731-1810) „wiegt" die Erde

Die Gravitationskonstante mußte aus der Anziehung <u>zweier bekannter Massen</u> bestimmt werden, und die ist sehr klein (bei Cavendish $10^{-6}$ N entsprechend 0,1 mg)

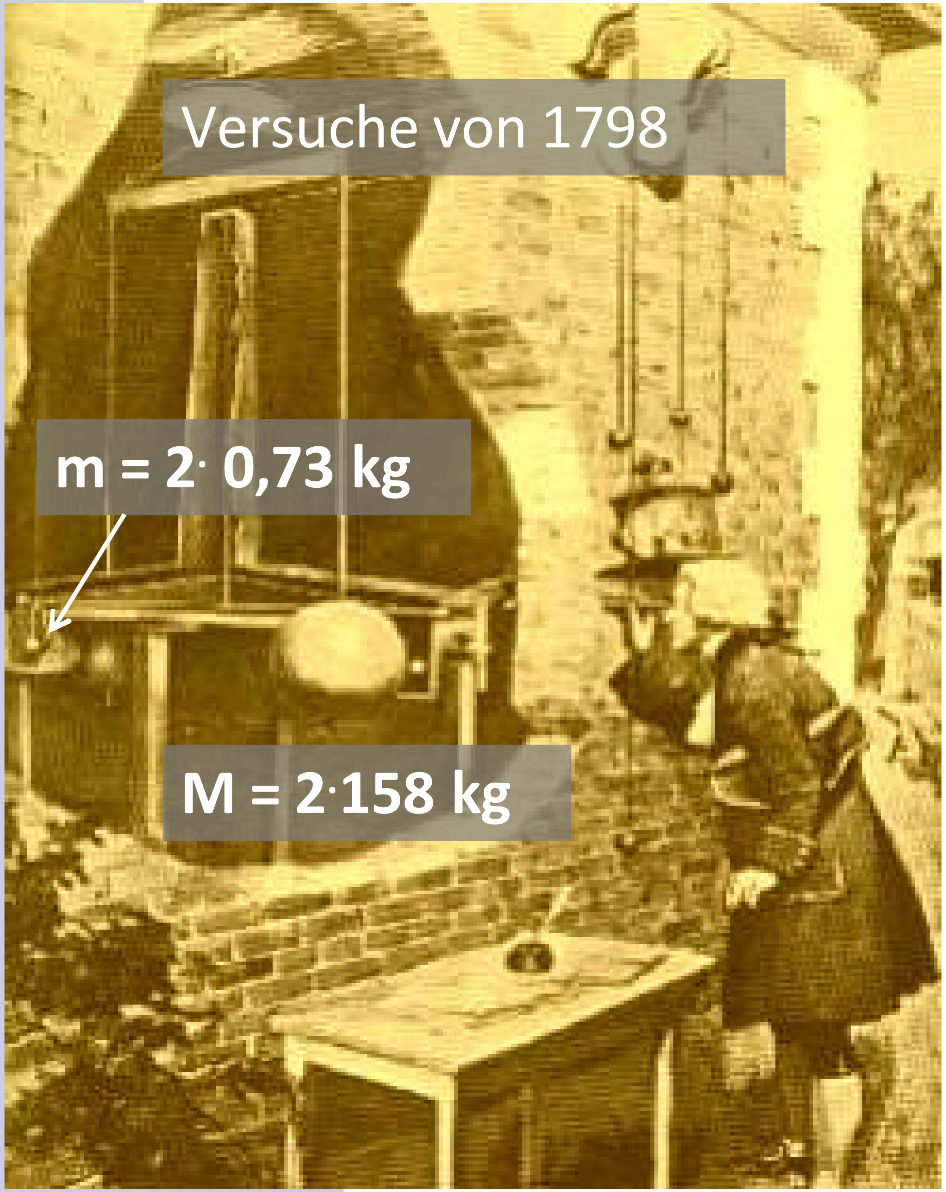
Lösung: Drehwaage von John Michell (ca. 1790)



Seit 50 Jahren: Schulversuch

SRH Hochschule Heidelberg




Cavendish bestimmte eigentlich die <u>Dichte der Erde</u> und publizierte ? = 5,48 g/cm$^3$, doch war das ein Fehler beim Abschreiben des Resultats. Im Mittel seiner 29 Messungen kommt 5,448 raus, d.h.

$$r = (5,45 \pm 0,22)\ \mathrm{g/cm^3}$$

$$M = r \cdot V \approx 5,90 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

(- 1,3%)

SRH Hochschule Heidelberg

# Newton und die frz. Revolution (? m & kg)

- sorgten zwar für gleich mehrere Faustformeln

$$g = 9{,}80665\ \mathrm{ms}^{-2} \approx 10\ \mathrm{ms}^{-2} \qquad \text{(genau auf 1,9\%)}$$

$$p_o = 1013{,}25\ \mathrm{hPa} \approx 1\ \mathrm{bar} \qquad \text{(auf 1,3 \%)}$$

$$\Delta p / \Delta h = r\, g = 10052\ \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^{-1} =$$

$$= 0{,}993\, p_0 / 10\ \mathrm{m} \approx p_0 / 10\ \mathrm{m} \qquad \text{(auf 0,7\%)}$$

- doch auch dafür, daß Kräfte, obwohl direkt spürbar, kinematisch, d.h. über eine Normbeschleunigung, definiert sind

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg} \cdot 1 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

SRH Hochschule Heidelberg

# Das Newton N

- als Gewichtsäquivalent bleibt unanschaulich

$$1\,\mathrm{N} \triangleq 102\,\mathrm{g}$$


# Das „gute, alte“ Kilopond kp


- hatte trotz des Nachteils der geographisch uneinheitlichen Reproduzierbarkeit den Vorteil der ugf. Kilogramm-Äquivalenz

SRH Hochschule Heidelberg

# „Newtons Planet“

Vor diesem Hintergrund kam es zu einer etwas albernen Klausuraufgabe (Jahr 2000):

*Aufgabe 8* *[5 Punkte]* *Newtons Planet*

„Konstruieren“ Sie Massen und zugehörige Radien von Himmelskörpern, auf deren Oberfläche die Fallbeschleunigung exakt $1 \frac{m}{s^2}$ betragen soll.

*Hinweis:* *Gravitationsgesetz*

Das Ergebnis war ernüchternd…. Warum?

SRH Hochschule Heidelberg

# Erdmond kommt dem Ziel *scheinbar* nahe

Entfernung aus lizenzrechtlichen Gründen!
Autoren haben die Möglichkeit die Veröffentlichungsrechte nachzuweisen.

Mondschwere-Beschleunigung

$$g_M = 1,62 \ \mathrm{m/s^2}$$

„Zeitlupenfaktor“

$$\sqrt{\frac{g_E}{g_M}} = 2,46$$

zum „Newton-
-Planeten“ fehlt
also ***nur*** noch

$$\sqrt{\frac{g_M}{1 \ \mathrm{m/s^2}}} = 1,27$$

# Rechnen wir lieber mal genau

Also: $$\frac{g\,M}{R^2} = g \overset{!}{=} 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \Rightarrow \left(\frac{M}{R^2}\right) = \left(\frac{1\ \mathrm{m/s}^2}{g}\right) = 1{,}5\cdot 10^{10}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}$$

bzw. als Zahlenwertgleichung in astronom. Stücken

$$\frac{M}{\mathrm{M}_{\mathrm{Erde}}} = \left(0{,}32\,\frac{R}{\mathrm{R}_{\mathrm{Erde}}}\right)^2$$

und wg. $M = r\cdot V = r\,\frac{4}{3}p\,R^3$ auch $\left(r\,R\right) = \dfrac{3\cdot 1\,\mathrm{m/s}^2}{4p\cdot g} = 3{,}6\cdot 10^9\ \mathrm{kg/m}^2$

bzw. $$\frac{r}{\mathrm{g\ cm^{-3}}}\cdot\frac{R}{\mathrm{R}_{\mathrm{Erde}}} = 0{,}56$$

SRH Hochschule Heidelberg

# Einige „Newton-Planeten“ vom Reißbrett

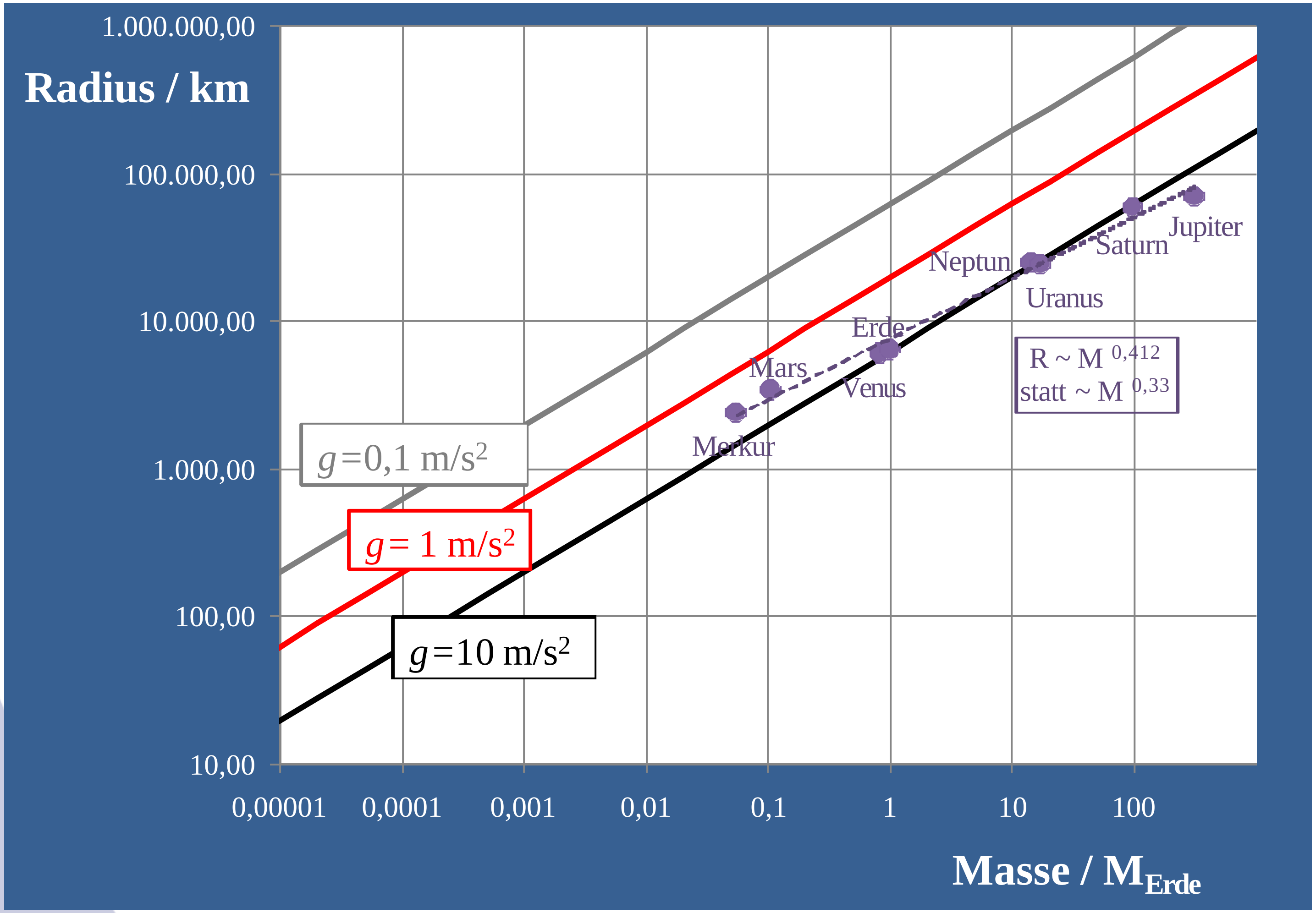
Aus $\frac{M}{M_{Erde}} = \left(0{,}32 \frac{R}{R_{Erde}}\right)^2$ folgt etwa, daß eine „Newton-Erde“ gleicher Masse mehr als den dreifachen Radius haben müßte und folglich 1/30 der mittl. Dichte der Erde. Ein Planet mit $^1/_{1000}\ M_{Erde}$ läge noch bei 10% des Erdradius.

Entfernung aus lizenzrechtlichen Gründen!
Autoren haben die Möglichkeit die Veröffentlichungsrechte nachzuweisen.

Aus $\frac{r}{\mathrm{g\ cm^{-3}}} \cdot \frac{R}{R_{Erde}} = 0{,}56$ wiederum folgt für einen Planeten der Dichte $2{,}75\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$, daß er $^1/_5$ des Erdradius bräuchte, um ein $g = 1\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ aufzuweisen

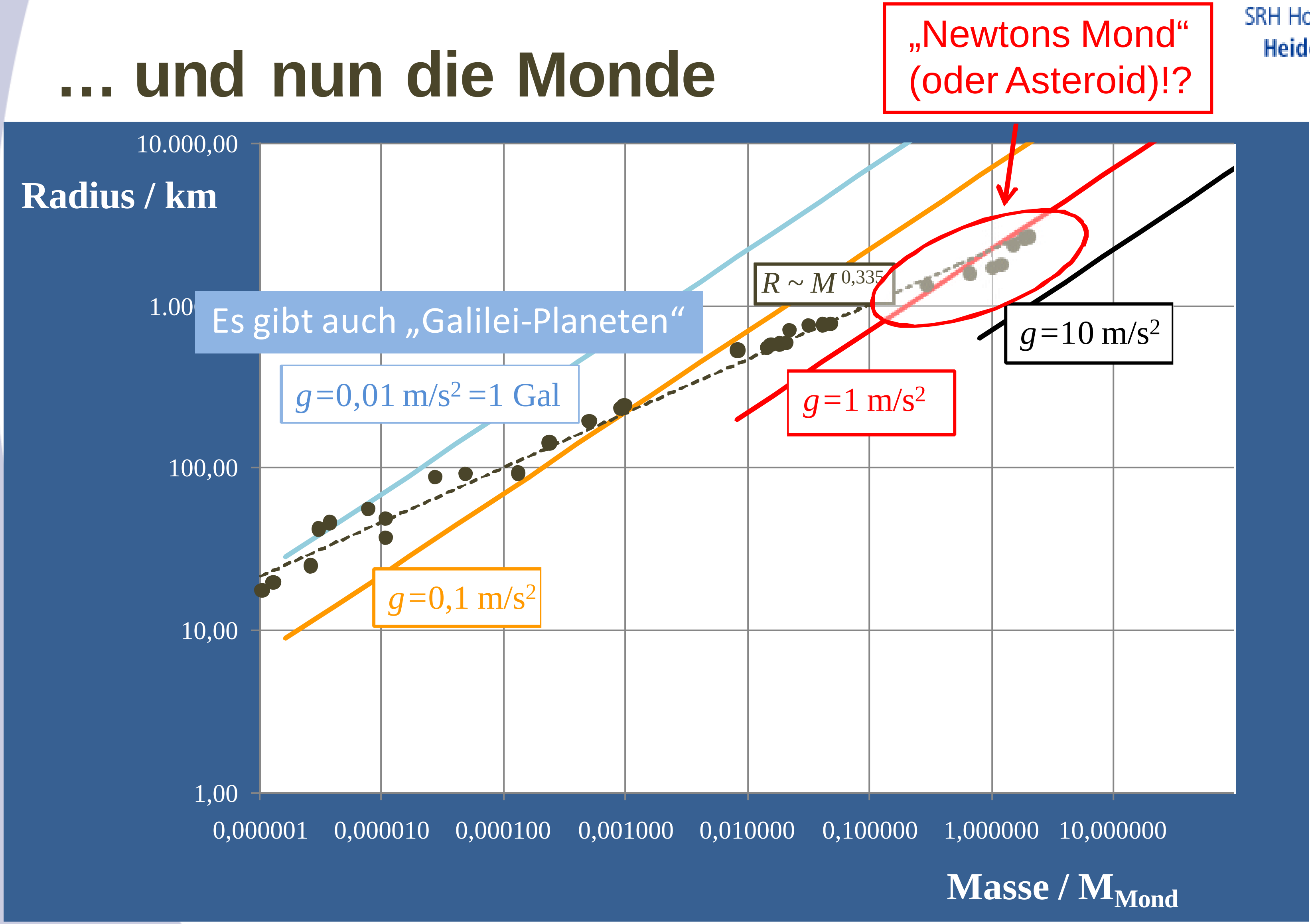
SRH Hochschule Heidelberg

# Etwas systematischer (mit 8 Planeten)



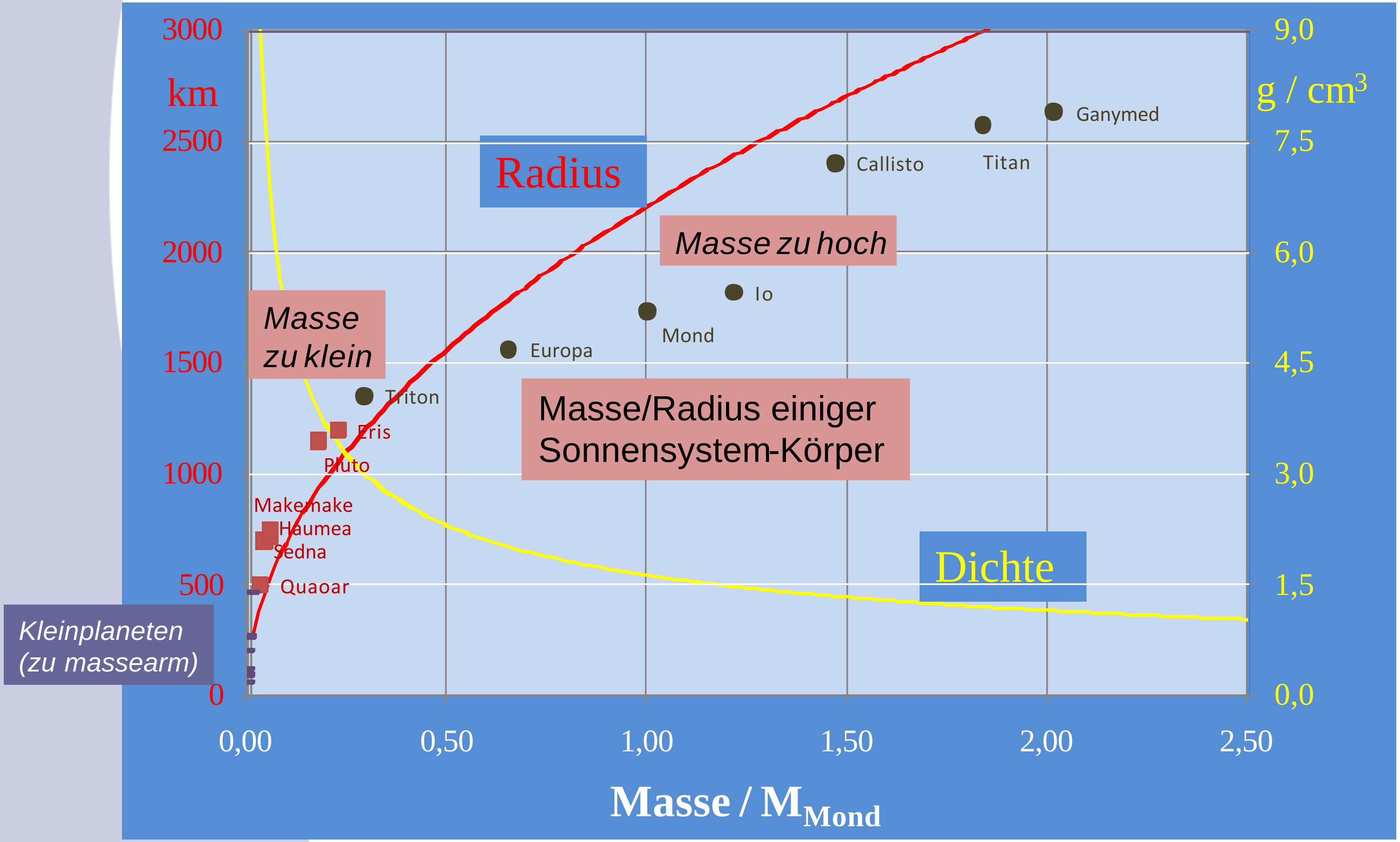
SRH Hochschule Heidelberg

# … und nun die Monde



SRH Hochschule Heidelberg

# Radius- u. Dichteforderung für „Newton-Planeten“



SRH Hochschule Heidelberg

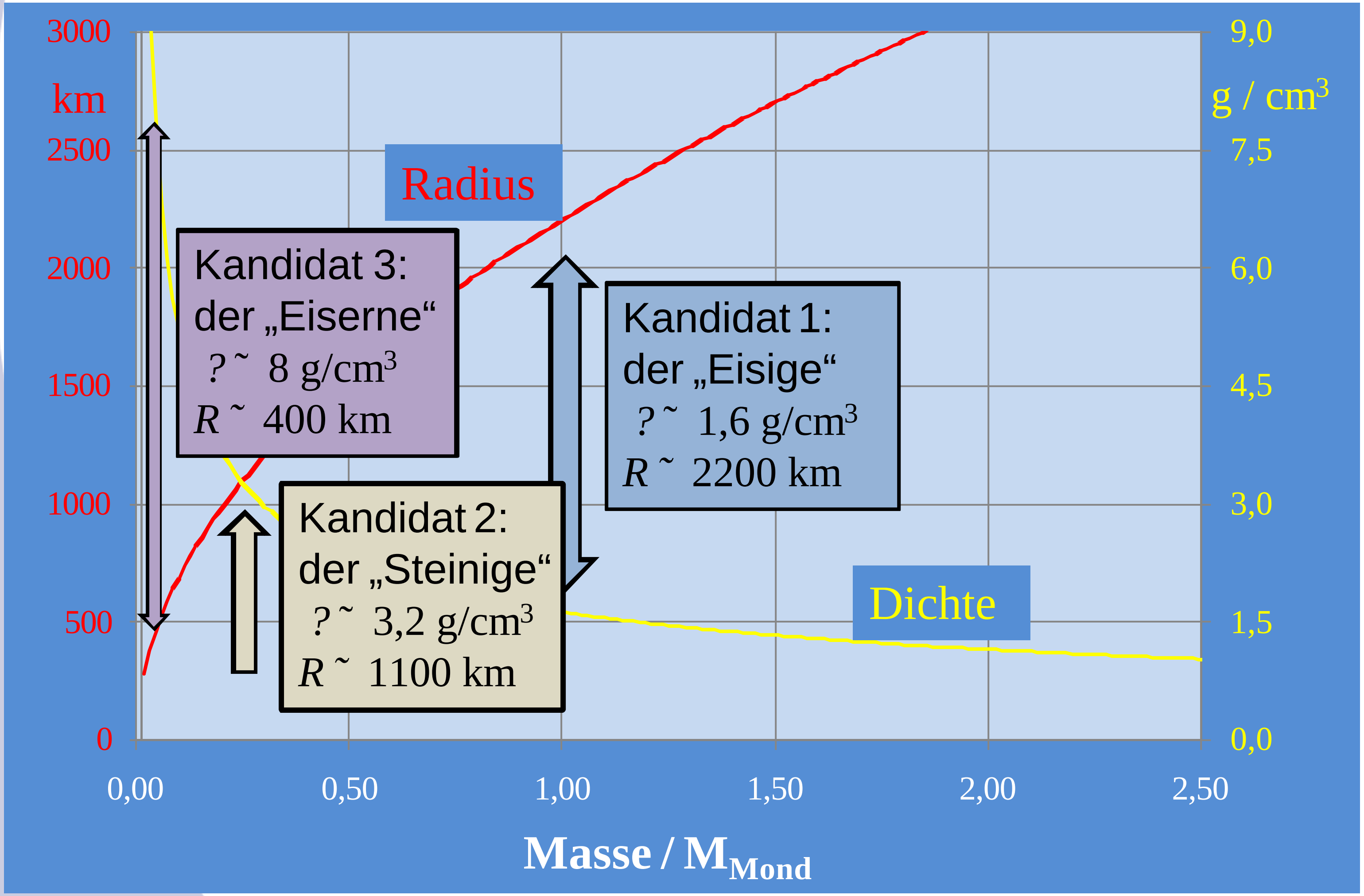
# Zusammenfassung

**Im Sonnensystem gibt es wohl keinen „Newton- Planeten" mit $g = 1\ \mathrm{m/s^2}$**

- **die acht Planeten sind zu dicht oder schwer**
- **die Großmonde (bis auf Triton) ebenfalls**
- **die transneptunischen Objekte sind nicht dicht genug**
- **die Kleinplaneten haben zu wenig Masse, es gibt keine plausible Dichte mehr, um „Newton-Planetoiden" zu generieren**

SRH Hochschule Heidelberg

# Bauen wir uns halt einen „N-Planeten“



SRH Hochschule Heidelberg

# Noch eine Hilfslösung

Äquatoriale Zentrifugalbeschleunigung kann zu große $g$ reduzieren:

Bedingung: $$\frac{g\,M}{R^2} - \frac{4p^2 R}{T^2} = g \overset{!}{=} 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{2p}{\sqrt{\frac{g\,M}{R^3} - \frac{g}{R}}} = \frac{2p}{\sqrt{\frac{4}{3}pgr - g/R}}$$

liefert etwa für den Erdmond

Umlaufszeit $T = 10500\ \mathrm{s} = 2{,}9\ \mathrm{h}$

Äquatoriale Geschwindigkeit $v = 1{,}04\ \mathrm{km/s}$

(44% der Fluchtgeschwindigkeit)

SRH Hochschule Heidelberg

# Meta-Lernziele

- Umgang mit mehrwertigen Formeln
- Einsatz zugeschnittener Größengleichungen
- grafische Lösungsraumverdeutlichung
- physikalische Plausibilitätsprüfung
- konkrete Lösung(en) als „Ingenieurleistung“

# Ausblick

- Vertiefung der Planetologie
- Druck-/Dichte-Verläufe, Geochemie
- Erweiterung auf Exo-Planeten und Fixsterne