



SRH Hochschule  
Heidelberg

# „Newtons Planet“

Vortrag DD 9.1 am 8. März 2010  
zur Frühjahrstagung der DPG  
in Hannover

**Elmar Schmidt**

**SRH Hochschule Heidelberg**



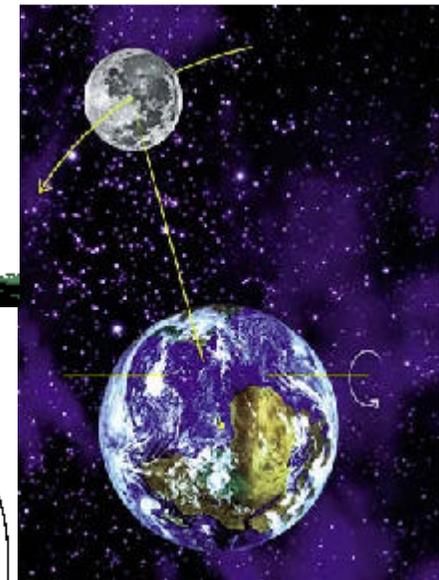
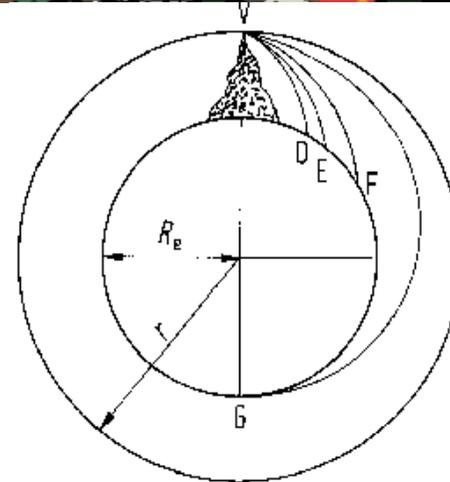
Prof. Dr. E. Schmidt  
School of Engineering & Architecture  
Fachhochschule Heidelberg

# Isaac Newton

(1643-1726)

- zeigte die Herkunft der Kepler-Gesetze aus der Planetenanziehung durch die Sonne und
- formulierte das Gravitationsgesetz

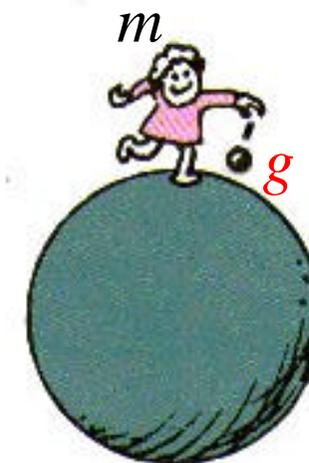
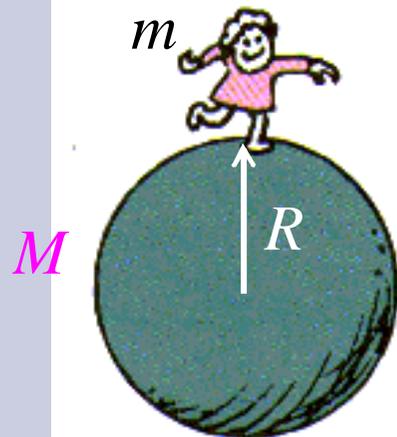
$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



## Gewicht $G =$ Schwerkraft auf Masse $m$

$G = m \cdot g$  mit der Fallbeschleunigung

$$g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$$



Gravitationsgesetz

$$F_G = g \frac{m \cdot M}{R^2} = m \frac{gM}{R^2}$$

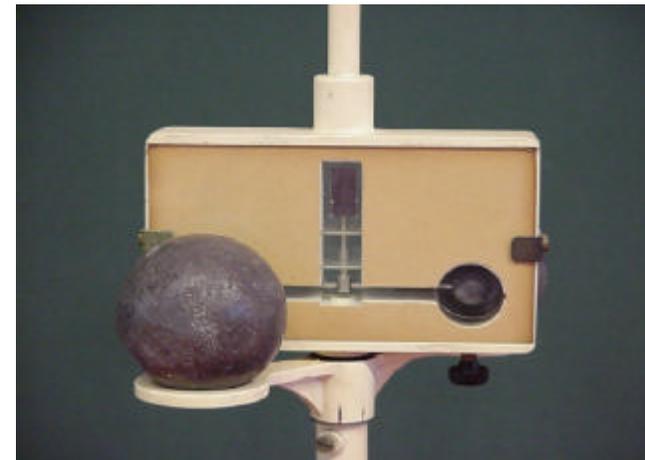
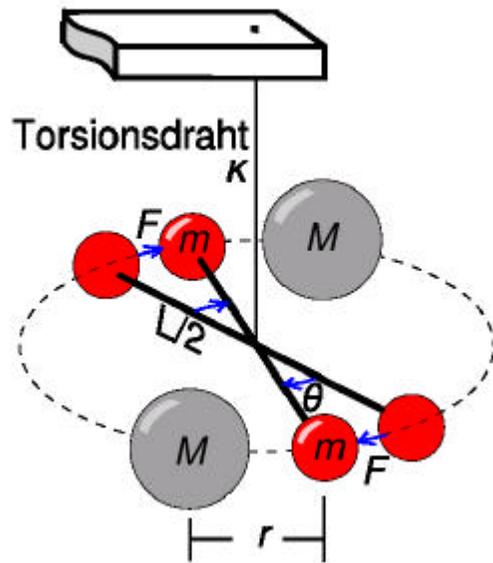
wobei noch zu zeigen ist, daß Erdmasse  
im Mittelpunkt vereint wirkt (u.a. Gauß)

Also:  $g = \frac{gM}{R^2} \Rightarrow M = \frac{gR^2}{g} \leftarrow \text{Gravitationskonstante?}$

## Cavendish (1731-1810) „wiegt“ die Erde

Die Gravitationskonstante mußte aus der Anziehung zweier bekannter Massen bestimmt werden, und die ist sehr klein (bei Cavendish  $10^{-6}$  N entsprechend 0,1 mg)

Lösung: Drehwaage von John Michell (ca. 1790)



Seit 50 Jahren: Schulversuch

Versuche von 1798

$m = 2 \cdot 0,73 \text{ kg}$

$M = 2 \cdot 158 \text{ kg}$

Cavendish bestimmte eigentlich die Dichte der Erde und publizierte  $\rho = 5,48 \text{ g/cm}^3$ , doch war das ein Fehler beim Abschreiben des Resultats. Im Mittel seiner 29 Messungen kommt 5,448 raus, d.h.

$$\rho = (5,45 \pm 0,22) \text{ g/cm}^3$$

$$M = \rho \cdot V \approx 5,90 \cdot 10^{24} \text{ kg} \\ (- 1,3\%)$$





## Newton und die frz. Revolution (? m & kg)

- sorgten zwar für gleich mehrere Faustformeln

$$g = 9,80665 \text{ ms}^{-2} \approx 10 \text{ ms}^{-2} \quad (\text{genau auf } 1,9\%)$$

$$p_o = 1013,25 \text{ hPa} \approx 1 \text{ bar} \quad (\text{auf } 1,3 \%)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\Delta h} &= \rho g = 10052 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1} = \\ &= 0,993 p_o / 10 \text{ m} \approx p_o / 10 \text{ m} \quad (\text{auf } 0,7\%) \end{aligned}$$

- doch auch dafür, daß Kräfte, obwohl direkt spürbar, kinematisch, d.h. über eine Normbeschleunigung, definiert sind

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

## Das Newton N

- als Gewichtsäquivalent bleibt unanschaulich

$$1 \text{ N} \hat{=} 102 \text{ g}$$



## Das „gute, alte“ Kilopond kp

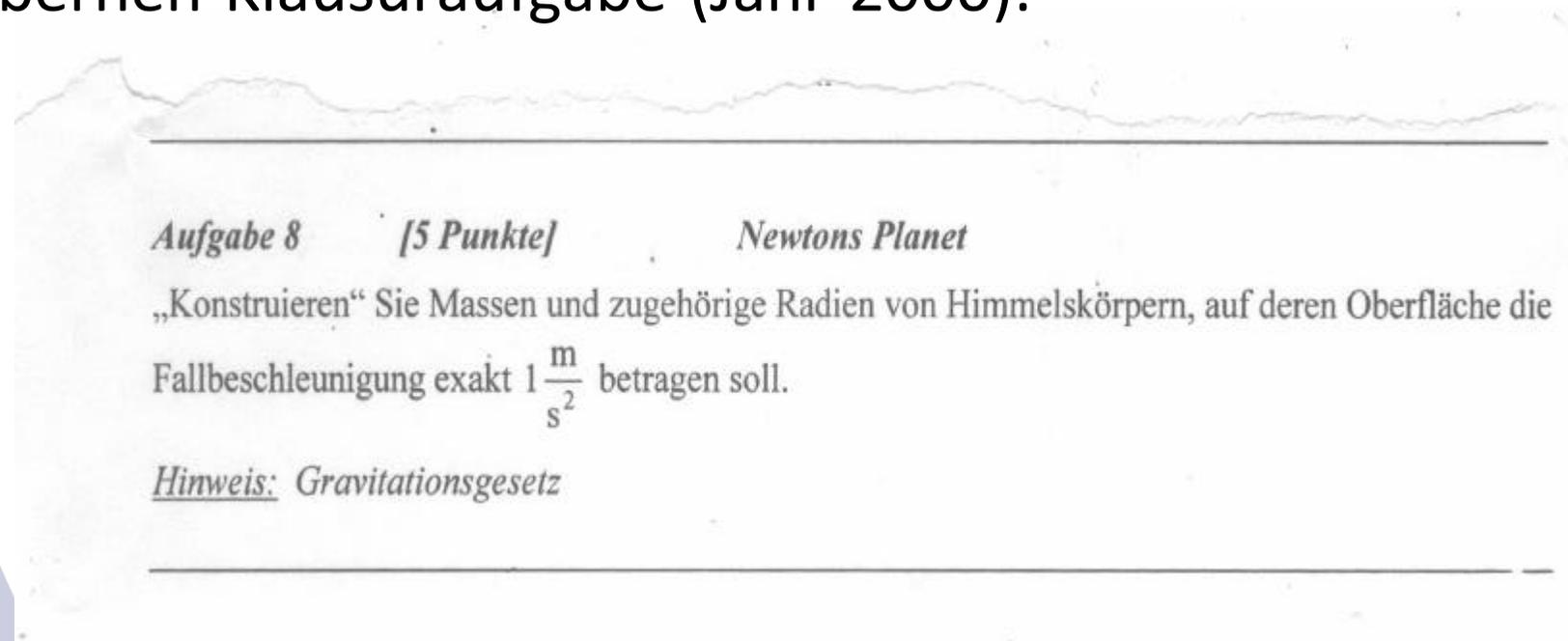


- hatte trotz des Nachteils der geographisch uneinheitlichen Reproduzierbarkeit den Vorteil der ugf. Kilogramm-Äquivalenz



# „Newtons Planet“

Vor diesem Hintergrund kam es zu einer etwas albernem Klausuraufgabe (Jahr 2000):



Das Ergebnis war ernüchternd.... Warum?

## Erdmond kommt dem Ziel *scheinbar* nahe



Mondschnwere-  
Beschleunigung

$$g_M = 1,62 \text{ m/s}^2$$

„Zeitlupenfaktor“

$$\sqrt{\frac{g_E}{g_M}} = 2,46$$

zum „Newton-  
-Planeten“ fehlt  
also *nur* noch

$$\sqrt{\frac{g_M}{1 \text{ m/s}^2}} = 1,27$$



## Rechnen wir lieber mal genau

$$\text{Also: } \frac{gM}{R^2} = g = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \left( \frac{M}{R^2} \right) = \left( \frac{1 \text{ m/s}^2}{g} \right) = 1,5 \cdot 10^{10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

bzw. als **Zahlenwertgleichung** in astronom. Stücken

$$\frac{M}{M_{\text{Erde}}} = \left( 0,32 \frac{R}{R_{\text{Erde}}} \right)^2$$

$$\text{und wg. } M = r \cdot V = r \frac{4}{3} p R^3 \text{ auch } (rR) = \frac{3 \cdot 1 \text{ m/s}^2}{4p \cdot g} = 3,6 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{bzw. } \frac{r}{g \text{ cm}^{-3}} \cdot \frac{R}{R_{\text{Erde}}} = 0,56$$

## Einige „Newton-Planeten“ vom Reißbrett

Aus  $\frac{M}{M_{\text{Erde}}} = \left(0,32 \frac{R}{R_{\text{Erde}}}\right)^2$  folgt etwa, daß eine „Newton-Erde“

gleicher Masse mehr als den dreifachen Radius haben müßte und folglich 1/30 der mittl. Dichte der Erde. Ein Planet mit  $1/1000 M_{\text{Erde}}$  läge noch bei 10% des Erdradius.

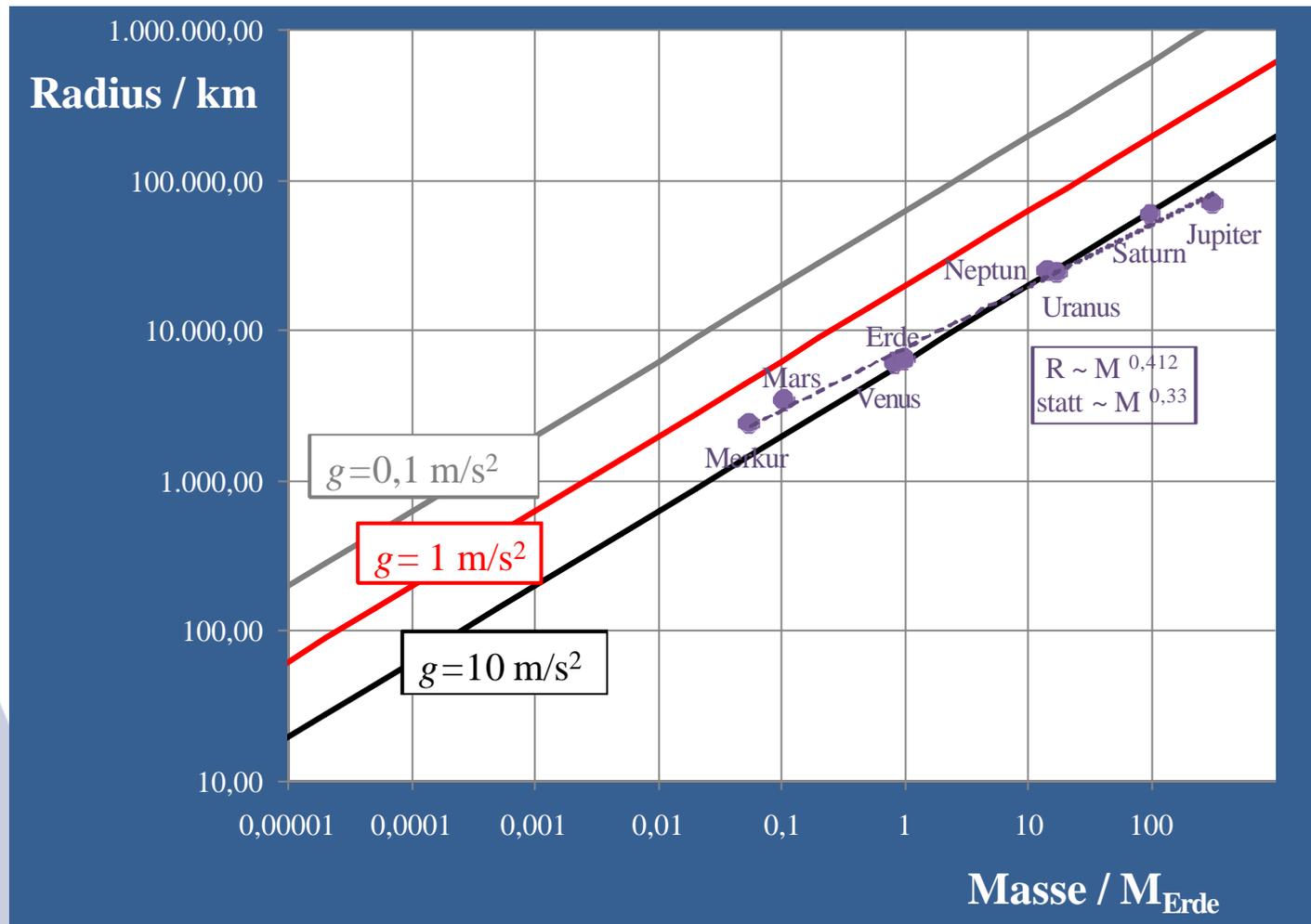


Aus  $\frac{r}{\text{g cm}^{-3}} \cdot \frac{R}{R_{\text{Erde}}} = 0,56$  wiederum

folgt für einen Planeten der Dichte  $2,75 \text{ g cm}^{-3}$ , daß er  $1/5$  des Erdradius bräuchte, um ein  $g = 1 \text{ m s}^{-2}$  aufzuweisen



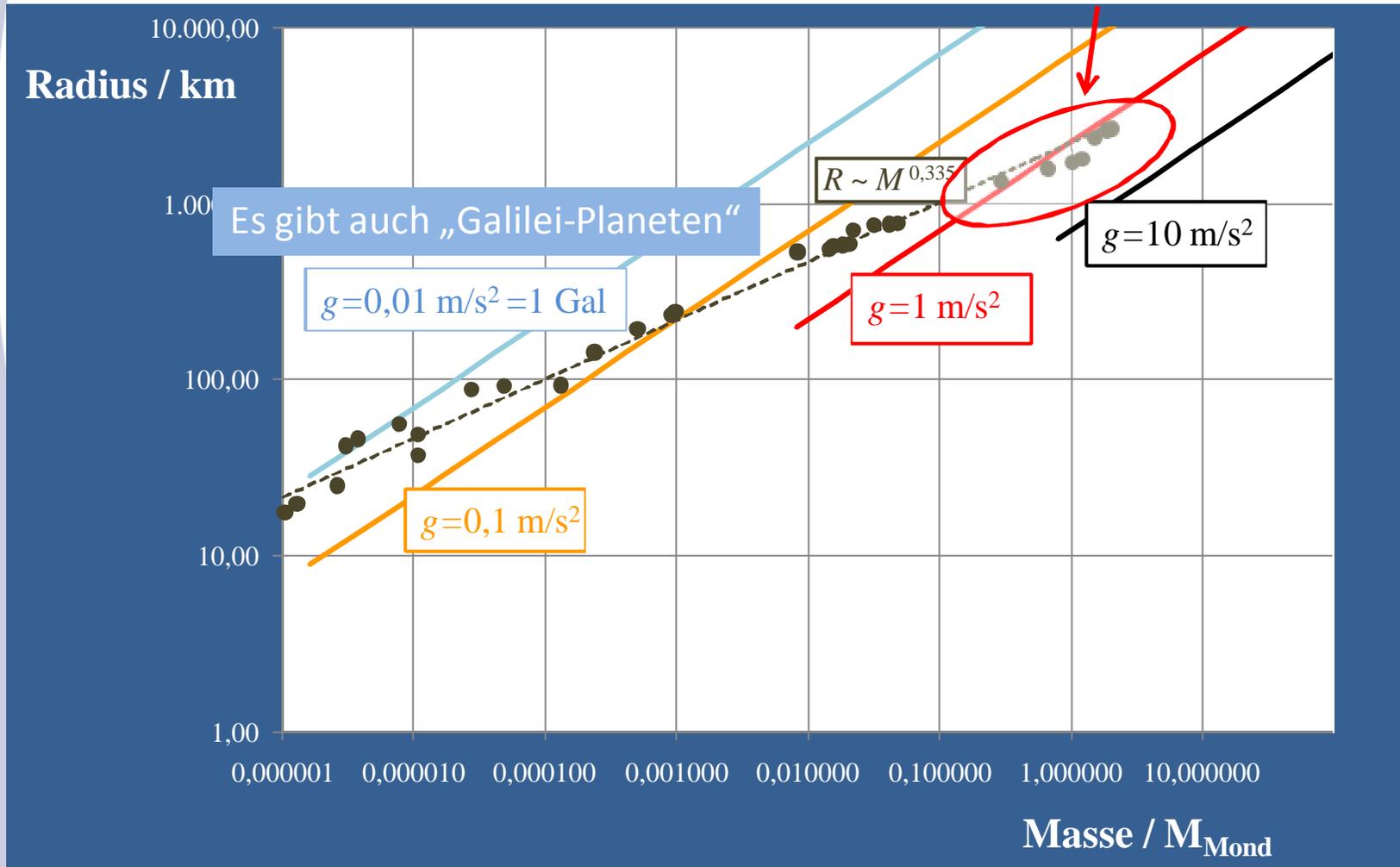
## Etwas systematischer (mit 8 Planeten)





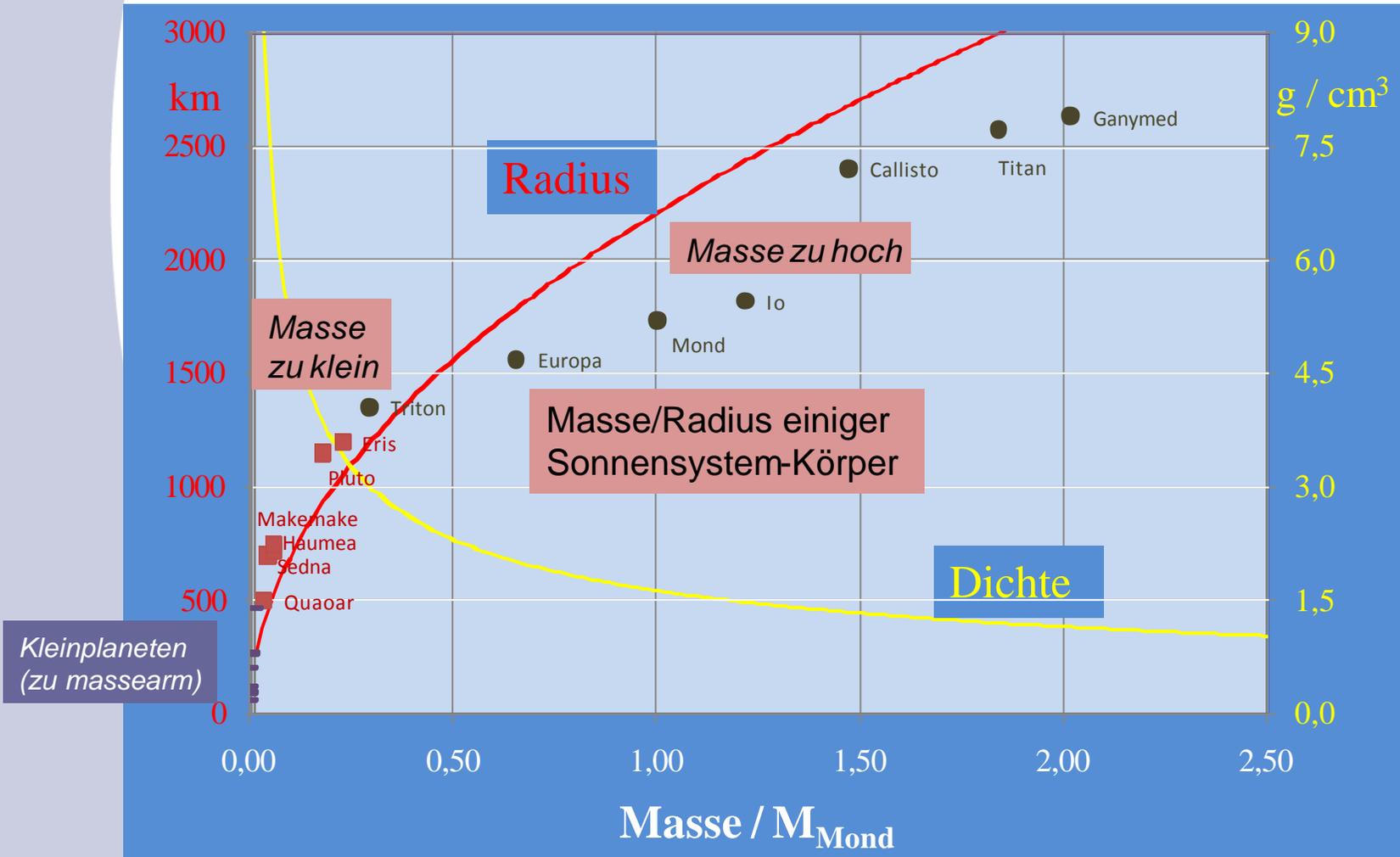
## ... und nun die Monde

„Newtons Mond“  
(oder Asteroid)!!?





# Radius- u. Dichteforderung für „Newton-Planeten“





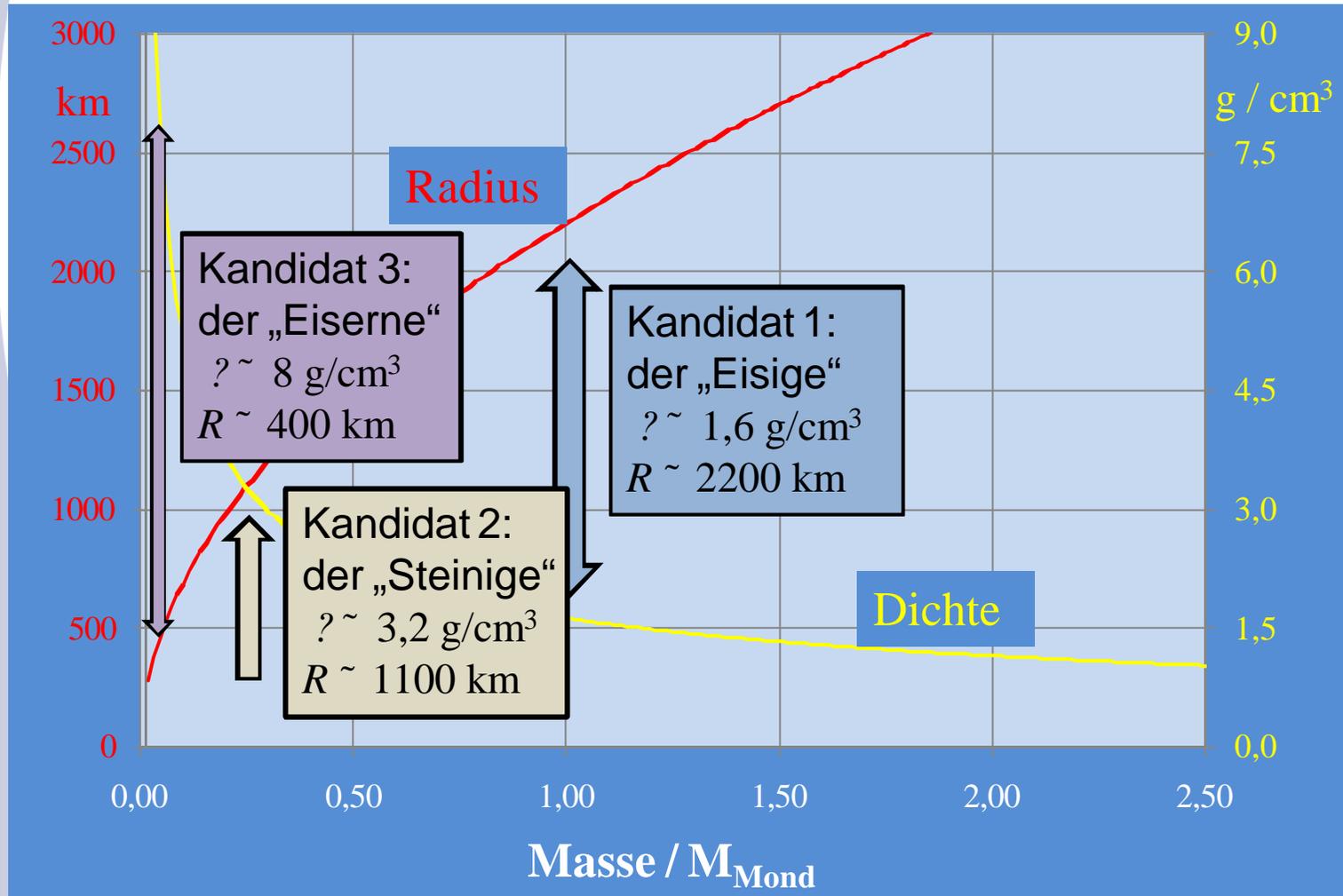
## Zusammenfassung

**Im Sonnensystem gibt es wohl keinen „Newton- Planeten“ mit  $g = 1 \text{ m/s}^2$**

- **die acht Planeten sind zu dicht oder schwer**
- **die Großmonde (bis auf Triton) ebenfalls**
- **die transneptunischen Objekte sind nicht dicht genug**
- **die Kleinplaneten haben zu wenig Masse, es gibt keine plausible Dichte mehr, um „Newton-Planetoiden“ zu generieren**



## Bauen wir uns halt einen „N-Planeten“





## Noch eine Hilfslösung

Äquatoriale Zentrifugalbeschleunigung kann zu große  $g$  reduzieren:

$$\text{Bedingung: } \frac{gM}{R^2} - \frac{4p^2 R}{T^2} = g = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{2p}{\sqrt{\frac{gM}{R^3} - \frac{g}{R}}} = \frac{2p}{\sqrt{\frac{4}{3} pgr - \frac{g}{R}}}$$

liefert etwa für den Erdmond

Umlaufszeit

$$T = 10500 \text{ s} = 2,9 \text{ h}$$

Äquatoriale Geschwindigkeit  $v = 1,04 \text{ km/s}$

(44% der Fluchtgeschwindigkeit)



## Meta-Lernziele

- **Umgang mit mehrwertigen Formeln**
- **Einsatz zugeschnittener Größengleichungen**
- **grafische Lösungsraumverdeutlichung**
- **physikalische Plausibilitätsprüfung**
- **konkrete Lösung(en) als „Ingenieurleistung“**

## Ausblick

- **Vertiefung der Planetologie**
- **Druck-/Dichte-Verläufe, Geochemie**
- **Erweiterung auf Exo-Planeten und Fixsterne**