

## Die Bewegung im räumlichen Denken bei physikalischen Aufgaben

Marion Zöggeler \*, Alexander Strahl +, Günter Maresch \*

\*Universität Salzburg, School of Education, AG Didaktik der Mathematik,

marion.zoeggeler@sbg.ac.at und guenter.maresch@sbg.ac.at

+Universität Salzburg, School of Education, AG Didaktik der Physik, alexander.strahl@sbg.ac.at

### Kurzfassung

Das räumliche Denken und die Vorstellung von Bewegung sind eng miteinander verbunden. Dies zeigt sich im Besonderen in den Inhalten der STEM-Fächer, namentlich in Physik. Das vorliegende Modell der Bewegung als zentrales Element des räumlichen Denkens basiert auf grundlegenden anerkannten wissenschaftlichen Theorien zur visuellen Wahrnehmung und zur Raumvorstellung in Verbindung mit fachdidaktischen Erkenntnissen aus Mathematik und Physik. Es beinhaltet u. a. die Bewegung als Vorstellung eines realen Ablaufs, die Bewegung als verändernden Vorgang, die Bewegung als gedanklichen Prozess zur Problemlösung sowie die Bewegung als Bewegbarkeit innerhalb eines ruhenden Systems. All diesen Vorstellungen liegt die Erfahrung der Bewegung im realen Raum zugrunde. An das Modell anlehnend, werden physikalisch-technische, astronomische und mathematische Aufgaben zur Bewegung im Hinblick auf das räumliche Denken entwickelt und analysiert. In diesem Beitrag wird der Schwerpunkt auf die physikalischen und astronomischen Aufgaben gelegt. Des Weiteren wird auf eine qualitative Studie zur Untersuchung von räumlichen Denkschritten bei der Lösung der Aufgabenstellungen Bezug genommen. Die Studie zielt auf das Auffinden von Hypothesen, ob und wie das räumliche Denken von Studierenden bei der Lösung der gestellten Aufgaben verwendet wird.

### 1. Der Raum in der Physik

Zu Beginn dieses Beitrages wird der Blick auf den Raum und die Bewegung als physikalische Inhalte gelegt, die den Hintergrund für die weitere Ausführung über das räumliche Denken bilden.

#### 1.1. Sichtweisen auf den Raum

Von alters her beschäftigten sich Wissenschaftler mit der Frage: „Was ist der Raum?“ und „Welche Eigenschaften bestimmen die Struktur des Raumes?“ Im Laufe der Jahrtausende treten verschiedene Sichtweisen in den Vordergrund, einmal empirische Betrachtungen von Raum und Materie, dann metaphysische Erklärungen und rationalistische Interpretationen von Raum und „Raumbilder(n)“ (Malotki, 1979, zitiert nach Thiering, & Schiefenhövel, 2016, S. 41).

Platon sieht den Raum als etwas Transzendentes und Absolutes, a priori Seiendes, das selbst mit Denken nur schwer ergründet werden kann. Eine Andeutung des Raumes kann in seiner Beschreibung der Natur, „die alle Körper in sich aufnimmt“ (Platon, übersetzt von Müller & Schleiermacher, 1972, Kap. 18), gesehen werden. Die Sichtweise auf den Raum ist bei Aristoteles hingegen von der Betrachtung der empirisch erfassten Natur geprägt und richtet sich auf die Stellung der Erde im Mittelpunkt des Universums, zu dem alles strebt und sich dorthin bewegt. Zu einer ähnlichen Vorstellung des geozentrischen Raumes gelangt Ptolemäus. Er erklärt im Almagest durch geometrisch-mathematische Berechnung von Epizykeln

die Bewegung der Planeten um die Erde (vgl. Neugebauer, 1975). Kopernikus lenkt seinen Blick von der Stellung der Erde zu jener der Sonne und nimmt in der Vorstellung des Raumes einen Perspektivenwechsel von innerhalb einer Konstellation nach außen vor. Galilei wendet sich, ähnlich wie Aristoteles mit seiner Erklärung der Nachbarschaften der Objekte und der Bewegung, gegen das Konzept von der Leere des Raumes und begründet dies damit, dass die Natur Leere zu vermeiden versucht. Wie Galilei setzt Descartes den Raum mit der Ausdehnung unendlich teilbarer Materie gleich. Nach seiner Vorstellung ist der Raum durch die Beziehungen zwischen den Körpern bestimmt, die ihn gänzlich ausfüllen und sich bei Bewegung berühren oder abstoßen. Körper und Raum bilden miteinander eine Einheit. Descartes weist in seinen Ideen auf eine metaphysische Betrachtung des Raumes hin, ausgehend von kognitiver Erkenntnis und mathematischer Überlegung, zu einer Zeit, in der die Mathematik als unabhängig von der Erfahrung, im Gegensatz zur Naturwissenschaft, gilt. Newtons Ideen zu Descartes' Rationalismus zeigen seine Einstellung zur metaphysischen Betrachtung der Naturwissenschaften. Er trifft eigene Annahmen und stellt, ausgehend von atomistischen Vorstellungen, Gesetzmäßigkeiten auf, um vor allem mechanische Phänomene im Raum zu erklären. (vgl. u. a. Damerow, 2016)

Den verschiedenen Sichtweisen liegt annähernd die Vorstellung des Raumes als ein Gebilde zugrunde,

das mit veränderbaren Körpern und mit Orten ausgestattet ist, bei deren Wechsel sich Bewegung als Veränderung der Beziehung der Körper untereinander vollzieht.

### 1.2. Die Erfahrung des Raumes

Der geographische Raum stellt den erfahrbaren Raum im Lebensumfeld des Menschen dar. Er weitet sich aus zum kosmischen Raum, teils aus Notwendigkeit für die räumliche und zeitliche Orientierung, teils aus Neugierde für das Erkennen der kausalen Abhängigkeiten für die Lebensgestaltung. Natürliche Orientierungs- und Bezugspunkte als Landmarken (vgl. u. a. Glück et al., 2005) und technische Hilfsmittel erleichtern das Kennenlernen des Raumes, die Vorstellung von Raumbildern im Gedächtnis und die Darlegung dieser als mentale Struktur des räumlichen Denkens und Orientierens.

Durch Handeln mit den Objekten aus der realen Welt und durch deren Verknüpfung mit dem Vorstellungsbild lässt die Erfahrung kognitive Strukturen entstehen. Die Erfahrung von Raum und Zeit, mit der ein periodischer Ablauf gemessen bzw. eine Wiederkehr von Episoden vorausgesagt wird, und die symbolische Darstellung dieser Erfahrung führen durch das kognitive Überdenken zu den beispielhaft genannten Sichtweisen auf den Raum als frühe Raumkonzepte. (vgl. Damerow, 2016)

Ein bereits bestehendes Konzept des Raumes unterliegt einerseits der Repräsentation als der räumlichen Vorstellung und symbolischen Darstellung bis hin zur Abstraktion im geometrisch-mathematischen Formalismus, andererseits der Reflexion als Prozess des räumlichen Denkens. Das Denken über den Raum schließt im Aufbau eines neuen Konzeptes Analogiebildung, Zufälligkeiten und mögliche neue Erfahrungen im realen empirischen und im mentalen Raum ein. Damit zeigt sich der Weg in der Konzeptbildung und im räumlichen Denken von der Wahrnehmung der Raumerfahrung, über die Vorstellung in Raumbildern und die Abstraktion bis hin zur Bildung eines neuen physikalischen Wissenskonzeptes höherer Ordnung. (vgl. Blum, Renn, & Schemmel, 2016)

### 1.3. Der Raum in physikalischen Konzepten

Durch neue physikalische Konzeptbildungen ergibt sich vielfach in Wechselwirkung eine Veränderung in der Sichtweise auf Raum sowie auf Zeit. Im Besonderen führen die Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie zu einem neuen Verständnis von Raum und Zeit als untrennbarer Einheit, der Raumzeit. Ausgehend von erfahrbaren Phänomenen im Elektromagnetismus, vor allem in der Optik, und in der Gravitation entsteht durch deren Beschreibung ein erweitertes neues Konzept von Raum und Zeit. Die Allgemeine Relativitätstheorie ist geprägt durch die neuerdings verstärkte Gewichtung der Auswirkungen der Gravitation im Raum, während in der klassischen Physik im Konzept des homogenen und isotropen Raumes die Materie als Ursache von Gravitation vor-

erst nicht miteinbezogen worden ist. Die Quantenphysik hingegen hat das Verständnis von Raum und Zeit nicht in diesem Ausmaß verändert, wie die Betrachtung der Nicht-Lokalität von Eigenschaften in Quantensystemen vermuten lassen könnte. Vielmehr sind die Materie und ihre mikroskopischen Eigenschaften das zentrale Element der Quantenphysik. Dabei fließt der Aspekt der Wahrscheinlichkeit und Unschärfe als neue Eigenschaft der Teilchen im Raum ein. (vgl. u. a. Blum et al., 2016)

Als zentrales Element physikalischer Konzeptbildung stellt das Konstrukt des Feldes an sich und mit einer möglichen zeitlich-räumlichen Veränderung eine enge Verbindung zur Vorstellung von Raum dar. Es ist sowohl die Vorstellung einer physikalischen Einheit im Raum, als auch die mathematische Beschreibung für die Verteilung physikalischer Eigenschaften im Raum.

### 1.4. Die Verbindung von Raum und Zeit

In der Bewegung sind Raum und Zeit als kognitive Elemente eines Vorgangs zur Veränderung miteinander verbunden. Der Raum wird durch Bewegung erfahren und erkundet, und die Bewegung ist an den Raum gebunden bzw. an das sichtbare und/oder mentale Nebeneinander von Objekten, die ihre Beziehung zueinander durch Bewegung verändern. Die Zeit hingegen ist das Nacheinander im Ablauf eines Vorganges und das Aufeinanderfolgen von Augenblicken. Sie steht gleichsam als für sich nicht-vorstellbares Element über den Objekten. Raum und Zeit werden in einigen Konzepten der klassischen Physik getrennt betrachtet, während sie in anderen als Gemeinsamkeit aufscheinen. Die Bewegung schließt Raum und Zeit mit ein. Gerade in der Astronomie und in der Astrophysik zeigt sich in den kosmischen Vorstellungen die Erfassung der Zeit als erfahrbares bewegtes Vorüberziehen und Wiederkehren in Regelmäßigkeit. Dass Raum und Zeit aneinandergebunden sind, wird – außer im beschriebenen Zusammenhang im Konzeptionellen – auch über verschiedene Formen der Messung und der Darstellung deutlich. Die regelmäßige Wiederkehr von Phänomenen im realen, vor allem kosmischen Raum und in physikalischen Systemen wird schon früh als zeitlich-räumliches Maß betrachtet, zum Beispiel der Tageslauf der Sonne, die monatliche Wiederkehr des Mondbildes und die Regelmäßigkeit drehender und bewegter Elemente im Takt mechanischer Systeme

## 2. Räumliches Denken – Spatial Thinking

### 2.1. Begriffsklärung

„*Spatial thinking is the mental process of representing, analysing, drawing inferences from spatial relations [...] between objects [...] or relations within objects, [...] analysing spatial relations and transforming spatial relations.*“ (nach Uttal, Miller, & Newcombe, 2013, S. 367; vgl. auch National Research Council, 2006)

Von der Raumvorstellung als gesamtheitlicher (u. a. El Koussy, 1935) bzw. in Faktoren (u. a. Linn, & Petersen, 1985) aufgegliederter Aspekt der Intelligenz weitet sich der Begriff neuerdings zum räumlichen Denken als dem Spatial Thinking, das ein einheitliches, jedoch fein gegliedertes Konstrukt darstellt. (vgl. u. a. Buckley, Seery, & Canty, 2019)

Das räumliche Denken ist eine vielfältige komplexe Fähigkeit, - „*visuell processing*“ und „*spatial cognition*“ (vgl. McGrew, 2009, S. 5; Buckley et al., 2019, S.168), - die sich in verschiedenen räumlichen Denkprozessen zeigt, die individuell eingesetzt und innerhalb eines Lösungsvorganges mitunter gewechselt werden (vgl. u. a. Barratt, 1953; French, 1965; Just, & Carpenter; 1985, Schultz, 1991). In der aktuellen Forschung wird räumliches Denken unter anderem gesehen als „*largely determined by the capacity to represent and manipulate mental information (spatial cognition) and to hold sufficient amounts of pertinent information (working memory)*“ (Buckley et al., 2019, S. 166). Dabei wird das räumliche Arbeitsgedächtnis als Element des räumlichen Denkens gewichtet.

Ein früher Hinweis auf räumliches Denken ist in einer Aussage von Galton (1879) gegeben.

*„Much instruction on these matters can be derived from those who possess the power of what is called the visualising faculty, in a high degree. The objects of their memory are conspicuous images; they can retain them for a long time before the eye of their mind, they can dismiss or change them at will, and they can, if they please, subject them to careful examination from every side.“* (Galton, 1879, S. 158 f.)

Galton bezieht sich auf räumliche Bilder vor dem Auge des Geistes, die verändert, bearbeitet und von verschiedenen Perspektiven betrachtet werden können. Dieser angedeutete Ablauf des räumlichen Denkens findet sich auch in aktuellen Begriffsklärungen zum Raumvorstellungsvermögen (u. a. Maresch, 2020) bzw. zum räumlichen Denken, dem Spatial Thinking (vgl. National Research Center, 2006), wieder, in denen die individuellen Denkprozesse immer mehr in den Vordergrund rücken. Mc Grew (2009) charakterisiert den visuellen und räumlichen Fähigkeitsbereich der Intelligenz als „*the ability to generate, store, retrieve and transform visual images and sensations*“ (Mc Grew, 2009; S. 5). Er bezieht sich außerdem auf die Wahrnehmung und Vorstellung von Formen und Bildern und auf die räumliche Orientierung von Objekten, die sich verändern und im Raum bewegen.

## 2.2. Denken über und mit dem Raum

Räumliches Denken umfasst das Denken über den Raum und das Denken mit dem Raum. Ersteres betrifft einerseits die Erfahrung im realen Raum, im Large-Scale, in dem man nur einen Teil des Gesamten zeitgleich erfassen kann, andererseits die mentale Bearbeitung realer und vorgestellter Objekte im Raum,

in der Größenordnung des Small-Scale mit handlichen Objekten, z. B. Modellen. Das Denken mit dem Raum deutet auf die Verwendung räumlicher Objekte und Denkprozesse zur Vorstellung nicht räumlicher Inhalte hin, z. B. die Verwendung von Bilderzeichen als Hinweise oder von Graphen in Koordinatensystemen, die Darstellung abstrakter Inhalte in Diagrammen und die Struktur von Termen (vgl. Malle, 1993) in der Mathematik. (vgl. Hegarty, & Stull, 2012)

## 2.3. Räumliches Denken als umfassende Fähigkeit

Das räumliche Denken ermöglicht, sich durch Wahrnehmen und Vorstellen mentale Abbilder des realen Raumes zu schaffen, mit diesen Vorstellungsbildern zu operieren, sie zu verändern, anzupassen, sie aus verschiedener Lage zu betrachten und in symbolischen, auch abstrakten Darstellungen wiederzugeben. Damit gehen vielfältige Denkvorgänge einher. Diese Denkprozesse, in der Literatur als „*problem-solving behavior*“ und „*problem-solving processes*“ (Barratt, 1953, S. 17), „*problem-solving styles*“ (French, 1965, S. 2), „*mental operations, representations and strategies*“ (Just, & Carpenter, 1985, S.137) und als Strategien (Maresch, 2014) bezeichnet, kennzeichnen individuelle und wechselnde Denkvorgänge in der Raumvorstellung. Sie beinhalten z. B. ganzheitliches oder analytisches Vorgehen, Wechseln der Blickrichtung, gedankliches Bewegen eines Objektes oder der eigenen Person, Zuhilfenehmen eines Koordinatensystems und Betrachten von wesentlichen Merkmalen eines Objektes, seiner Lage und seiner Beziehung im Raum, den „*key features*“ (Schultz, 1991, S. 477). Das räumliche Denken baut auf die visuelle Wahrnehmung (Frostig, Horne, & Miller, 1972) und die Raumvorstellung (vgl. Maresch, 2020) auf. Die visuelle Wahrnehmung betrifft u. a. das „Sehen“ eines ruhenden oder bewegten Objektes durch Sinneswahrnehmung, die Unterscheidung eines Objektes von seinem Hintergrund und das Erkennen seiner Raumlage sowie das Wiedererkennen bei Unvollständigkeit. Sie ist die Voraussetzung für das räumliche Vorstellen und mentale Bearbeiten eines gedanklichen Objektes und für das Orientieren im realen und mentalen Raum. Räumliches Denken, speziell in den STEM-Fächern, schließt außerdem ein zielführendes Analysieren und Argumentieren als Weiterarbeiten und Übertragen auf ähnliche weitergefasste Inhalte mit ein. Im mentalen Weiterarbeiten sind Möglichkeiten gegeben, z. B. mit geometrischen Eigenschaften von Objekten und ihren Beziehungen, wie Orthogonalität, Parallelität, Winkelsumme u. a. zu argumentieren.

## 2.4. Räumliches Denken in Physik

Der Physik liegt als Auftrag die „*Suche nach letzten Wahrheiten über die Realität*“ zugrunde (Kircher, 2009 a, S. 27). Dabei verbindet sie Erfahrungen und Erforschungen mit Erfassen und Vorhersagen „*von raum-zeitlichen Änderungen an physikalischen Objekten*“ (ebd. S. 4), um Strukturen für ein allgemeines Konzeptverständnis und als „*Grundlage für technische Anwendungen*“ (ebd. S. 5) zu schaffen.

Vom Elementarisieren und Idealisieren komplexer Erfahrungen und Inhalte, führt der physikalische Erkenntnisweg im Wechselspiel von Theorie und Experiment zur Entwicklung bzw. zum Verständnis physikalischer Konzepte. Dazu können bildhafte und symbolische Darstellungen ein gedankliches räumliches Bild einer realen Gegebenheit vermitteln, wofür eine sprachliche und mathematische Beschreibung eingesetzt werden kann. (vgl. Kircher, 2009 b) Dies stellt eine enge Verbindung physikalischer Inhalte zur Vorstellung des Raumes und zum räumlichen Denken her. Einige Beispiele aus Studien sollen dies verdeutlichen.

Die Vorstellung der veränderten Bewegungsbahn eines sich bewegenden Objektes durch Krafteinwirkung, z. B. die Ablenkung einer rollenden Kugel auf einer glatten Fläche durch einen seitlichen Kräftestoß (u. a. Kozhevnikov, Motes, & Hegarty, 2007) oder die Ablenkung eines sich bewegenden geladenen Teilchens in einem homogenen Magnetfeld (u. a. Fulmer, & Fulmer, 2014), setzt im räumlichen Denken das Nachvollziehen einer realen Bewegung voraus. Für das Vorhersagen des weiteren Bewegungsverlaufs werden räumliche Beziehungen zwischen Richtungen und Geschwindigkeitsveränderungen betrachtet. Durch die Vorstellung eines Koordinatensystems (vgl. Just, & Carpenter, 1985) kann z. B. eine Überlagerung von Geschwindigkeitskomponenten ausgedrückt werden. Um die Beziehung zwischen Richtungen, z. B. jener des homogenen Magnetfeldes, des sich bewegenden geladenen positiven oder negativen Teilchens und der ablenkenden elektromagnetischen Kraft, festzustellen, bedarf es der räumlichen Orientierung und der mentalen Rotation (vgl. Fulmer, & Fulmer, 2014).

Ähnliche Denkvorgänge führen zum Verständnis des Zusammenhangs von Bewegungsbahnen in unterschiedlichen Bezugssystemen. Wird z. B. ein Ball aus einer Vorrichtung auf der Ladefläche eines fahrenden Wagens frei nach unten fallen gelassen und die Bahnkurve von verschiedenen Standpunkten aus betrachtet, von einer Person auf dem Wagen und außerhalb, wird in der Vorstellung von einem Bezugssystem in das andere gewechselt (vgl. Kozhevnikov et al., 2007). Der Bezugssystemwechsel trifft auch zu, wenn im astronomischen Raum die Sichtweise von der Horizontebene aus, – z. B. auf den Tageslauf der Sonne von der ruhenden Erde aus –, mit der Sicht von außen auf die bewegte Erde zum Verständnis der astronomischen Realität verbunden wird (vgl. Cole et al., 2018). Räumliche Orientierung und Perspektivenwechsel sind wesentliche Aspekte des räumlichen Denkens in physikalischen Inhalten.

### 3. Die Bewegung als zentrales Element räumlichen Denkens

#### 3.1. Bewegung und Vorstellung des Raumes

Bewegung, als Orts- und Lageveränderung eines Objekts im Raum und als Objektveränderung, sowie die Beweglichkeit als Möglichkeit dazu, durchziehen das

räumliche Denken. Bewegung äußert sich dabei in verschiedener Weise, als Vorstellung und Vorausdenken eines Bewegungsablaufs, als mentaler Veränderungsprozess eines Vorstellungsbildes oder als gedanklicher Vorgang zur Problemlösung.

Ausgehend von der wirklichen Bewegung und Orientierung im Raum zu dessen Erkundung und vom Empfinden der Bewegung des eigenen Körpers, erfolgt die Übertragung in die Vorstellung und damit auch die Erweiterung der gedanklichen Fähigkeiten zur Vorstellung des Raumes. (vgl. Stückrath, 1955; Piaget, & Inhelder, 1971; Glück et al., 2005; Wolbers, & Hegarty, 2010)

#### 3.2. Modell der Bewegung im räumlichen Denken

Aus der Analyse der Bewegung und der Vorstellung darüber im räumlichen Denken wurde das Modell der Bewegung geschaffen, das als Grundlage für die in diesem Beitrag vorgestellten Aufgaben zu Bewegung und Veränderung dient. Es zeigt die verschiedenen Aspekte der Bewegung auf, die in der Realität und in der Vorstellung von Veränderung bei mathematischen und physikalischen Inhalten zum Tragen kommen. Dabei handelt es sich um vier Ausprägungen von Bewegung:

- die real im Raum erfahrbare und in der Vorstellung nachvollziehbare Bewegung,
- die potentielle Bewegung eines bewegbaren Teiles eines Systems,
- die gedankliche Bewegung eines Gesamtobjektes zu dessen Veränderung,
- die Veränderung einzelner Teile durch die Vorstellung von Bewegung.

Grundlage einer jeden räumlichen Vorstellung von Bewegung ist die Wahrnehmung einer wirklichen, sich real vollziehenden Bewegung im Raum.

Die potentielle Objektbewegung beinhaltet das Erfassen einer möglichen Bewegung eines bewegbaren Teiles in einem mechanisch-technischen Objektgefüge. Dies betreffend, wird auf die Beispiele von ineinandergreifenden Zahnrädern und Schrauben in den *Mechanical Movements* von Thurstone (1938) verwiesen.

Die Veränderung eines Gesamtobjektes betrifft die Transformation der Lage, Form und Größe eines vorgestellten bzw. dargestellten Objektes mittels Spiegelung, Verschiebung, Drehung und Skalierung, sodass das Objekt in seiner Veränderung als dasselbe wiedererkannt werden kann.

Mit einer gedanklichen Bewegung kann auch eine innere Veränderung einzelner Teile im Objekt vollzogen werden, z. B. beim Falten eines Körpers aus Flächen bzw. beim Auffalten in Flächen, sowie beim Übertragen von flächenhaften Vorstellungen in körperliche und umgekehrt. Thurstone (1950) bezeichnet diesen Vorgang als „*internal displacement*“ (ebd. S. 518), als eine innere Ortsverlagerung. In den genannten Bereich der Veränderung einzelner Teile durch die Vorstellung der Bewegung fällt auch die

Veränderung in mathematischen und geometrischen Sachverhalten, wie unterschiedliche Darstellungen von Brüchen und die Einordnung von Zahlen am Zahlenstrahl, das Umstellen von Gleichungen und Termen und die Veränderlichkeit als Eigenschaft von Variablen und Funktionen (vgl. u. a. Malle, 1993; Hawes, Tepylo, & Moss, 2015, Wai, Lubinski, & Benbow, 2009), sowie das Bewegliche Denken (Roth, 2005). Letzteres bezeichnet eine gedachte Bewegung, als „Hineinsehen von Bewegung“ (Roth, 2005, S. 86) in eine mathematisch-geometrische Konstellation und beansprucht einen bestimmten Grad an Abstraktion für das zielführende Weiterarbeiten: das Änderungsverhalten von Objekten verstehen, beschreiben, nachvollziehen und damit argumentieren (Roth, 2005).

#### 4. Räumlich-physikalische Aufgaben zu Bewegung und Veränderung

Zu den im Modell beschriebenen Arten der Bewegung wurden mathematische und physikalische Aufgaben konstruiert, die in einer qualitativen Studie zur Sammlung räumlicher Denkprozesse Verwendung finden.

##### 4.1. Entwicklung von Aufgaben

Die Aufgaben betreffen vorwiegend räumliche Inhalte, zu deren Lösung räumliche Vorstellungen oder räumliche Hilfsmittel beansprucht werden. Die Aufgaben werden so konzipiert, dass zu ihrer Lösung räumliches Denken beitragen kann. Die Aufgabenstellung soll ermöglichen, dass der Lösungsprozess in kleinschrittige Denkvorgänge aufgegliedert werden kann, die auf spezielle, individuell verschiedene räumliche Vorstellungen der ProbandInnen schließen lassen.

##### 4.2. Zuordnung der Aufgaben zum Modell der Bewegung

Der Inhalt der zehn Aufgaben ist über unterschiedliche Themengebiete gestreut, um möglichst vielfältige Aspekte des räumlichen Denkens in der Vorstellung der Bewegung und Veränderung abzudecken.

- Die Aufgaben, die sich auf die Vorstellung der realen Bewegung aus der alltäglichen Erfahrungswelt beziehen, betreffen z. B. eine Spielsituation beim Ballwurf aus einem fahrenden Wagen und die Betrachtung von Bewegung im astronomischen Raum. Sie erfordern einen Bezugssystemwechsel, das Erkennen von Relativbewegung und das Vorstellen von Bahnkurven.
- Die Vorstellung der potentiellen Bewegung ist in technisch-physikalischen Problemstellungen mit Zahnrädern, Schraubengewinden, Wellen u. ä. gefragt. Es betrifft die Vorstellung von einzelnen Bewegungsabschnitten und Übertragung der Bewegung bei ineinander wirkenden bewegbaren Teilen in einem Objektgefüge.
- Die Vorstellung der Bewegung eines Gesamtobjektes zur Veränderung seiner Lage durch Drehung im Raum ist z. B. Inhalt einer Aufgabe, in

der ein Würfel um Geraden in einem Eckpunkt so aufgestellt wird, dass eine Raumdiagonale senkrecht auf die Unterlage steht.

- Die Vorstellung der Veränderung von Teilen durch Bewegung in geometrischen Konstellationen, ist in Aufgaben gefordert, in denen z. B. bei Änderung bzw. Festhalten von Bedingungen Bewegung hineingesehen und damit argumentiert wird.

##### 4.3. Beschreibung exemplarischer Aufgaben

Im Folgenden werden beispielhaft zwei räumlich-physikalische Aufgaben näher beschrieben.

Die ausgewählte Aufgabe „Schraubengewinde“ kann dem Bereich der potentiellen Bewegung in einem Gesamtgefüge zugeordnet werden. Aufgaben dieser Art sind bereits in frühen Raumvorstellungstests verwendet worden (vgl. dazu Thurstone, 1938).

Eine rundum gezahnte Scheibe wird um eine feste Achse in ihrem Mittelpunkt von einem am oberen Rand eingreifenden Schraubengewinde angetrieben. Für das räumliche Verständnis ist es von Vorteil, dass die Beschreibung der Problemstellung mit einer Skizze (Abb. 1) ergänzt wird. Die rechtsgängige Schraube in waagrechter Lage dreht sich in der angegebenen Pfeilrichtung. Man muss sich räumlich vorstellen, wie die Drehbewegung des Stabes mit der Wendel mit seiner Translationsbewegung zusammenhängt.

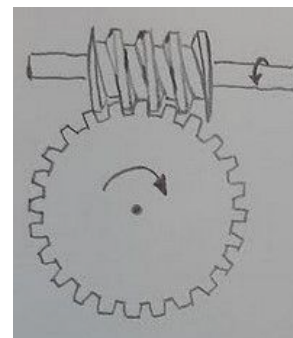


Abb.1: Zahnrad mit Schraubengewinde (selbst erstellte Zeichnung nach Thurstone, 1938)

Die Problemstellung lautet: In welche Richtung dreht sich das Zahnrad, wenn das Schraubengewinde in der dargestellten Anordnung und Drehrichtung in das Zahnrad eingreift? In welche Richtung dreht sich das Zahnrad, wenn das Gewinde in umgekehrter Richtung an den Schaft gesetzt wird?

Bezogen auf das räumliche Denken gilt es vordergründig, die relevanten Merkmale der Konstellation zu betrachten. Der Fokus richtet sich auf die Zähne der Scheibe und das Gewinde des Stabes, die ineinandergreifen, um die Bewegung zu übertragen. Das Vorstellen und Merken einer geringen Teilbewegung, - in diesem Fall, wie sich ein Wellenteil des Gewindes von links oben nach rechts unten auf einen Zahn des Zahnrades zubewegt und diesen um einen kleinen Ruck in eine bestimmte Richtung weiterbewegt -, be-

anspricht u. a. das Vorstellen der Bewegungsrichtungen, das Übertragen der Bewegung sowie das räumliche Arbeitsgedächtnis. Bei der in der Skizze dargestellten Drehrichtung des Gewindestabes bewegt sich der gesamte Stab mit der Wendel in der Bildebene nach rechts, wodurch jeder einzelne Zahn aus dem Gewinde nach rechts herausgedrückt wird. Die Zahnradscheibe wird im Uhrzeigersinn weitergedreht. Auch wenn die Wendel auf dem Schaft verkehrt angebracht ist, bleibt der Gewindetyp derselbe und ebenso die Drehrichtung der Scheibe beim Antrieb in derselben Richtung. Es gilt zu erkennen, dass trotz der Umkehrung der Wendel auf dem Schaft, als der veränderten Bedingung, keine Veränderung in der Bewegungsrichtung eintritt. Die räumlichen Beziehungen innerhalb des Objektgefüges bleiben erhalten. Für die Lösung dieser Aufgabe ist das gedankliche Bild einer Schraube aus dem Werkzeugkasten hilfreich, z. B. die Vorstellung ihrer Vorwärtsbohrung in eine Mauer bei einer Drehbewegung im Uhrzeigersinn. Ein weiterer Aspekt in der Vorstellung ist die Übertragung der anschaulichen flächenhaften Darstellung in der Skizze in die räumliche Vorstellung des tatsächlichen Bewegungsablaufs im Raum.

Die Aufgabe „Sonne in Kapstadt“ erfordert die Wahrnehmung und Vorstellung von Bewegungen im astronomischen Raum in unterschiedlichen Bezugssystemen. Der Inhalt der Aufgabe bezieht sich auf die tägliche Rotation der Erde um ihre Achse, unter Vernachlässigung der Revolution der Erde um die Sonne und anderer kosmischer Phänomene. Ausgehend von der Vorstellung des Tageslaufes der Sonne am Tag der Wintersonnenwende im eigenen Heimatort auf der Nordhalbkugel soll gedanklich der Blick auf den Tagbogen der Sonne von Kapstadt aus gerichtet werden. Die Problemstellung richtet sich auf die Vorstellung des Aufgangs- und Untergangspunktes der Sonne in der Zuordnung zu den Himmelsrichtungen als absolute Bezugspunkte und in der Zuordnung zum eigenen Körper bei Blickrichtung zur Sonne. Eine weitere Fragestellung betrifft die Betrachtung der astronomischen Konstellation von Erde und Sonne beim Blick aus dem Weltall und die geometrische Erklärung von Sonnenaufgang und Sonnenuntergang am Modell der Erdkugel von außen. Für den Vergleich der Sichtweisen aus den beiden Bezugssystemen, einerseits auf den Tageslauf der Sonne von der „ruhenden“ Erde aus, andererseits auf die tägliche Drehbewegung der Erde um ihre Achse von außerhalb, entsprechend dem Large-Scale der Erfahrung und dem Small-Scale der Modellvorstellung, können unterschiedliche Vorstellungen dienen:

- das Hineinversetzen in die jeweiligen Bezugssysteme durch mentale Verlagerung des Standpunktes,
- die analytische Betrachtung der einzelnen Objekte und ihrer räumlichen Beziehungen in beiden Systemen über geometrische Größen.

Das Sich-Hineinversetzen in eine räumliche Konstellation erfordert die Fähigkeit der räumlichen Orientierung. Diese vorwiegend holistische Herangehensweise kann eine gesamtheitliche Sicht ermöglichen.

In der analytischen Betrachtungsweise werden einzelne Eigenschaften in den beiden Bezugssystemen miteinander in Beziehung gesetzt. Dies kann z. B. der Vergleich der Winkel zwischen den Sonnenstrahlen und der Horizontebene, einer vorgestellten Tangentialebene an einem Punkt der Erdoberfläche, sein. Durch die Erddrehung bewegt sich die vorgestellte Tangentialebene am Morgen der Sonne entgegen und tritt am Abend aus dem Sonnenlicht wieder heraus.

Die Verschiebung der Tangentialebene mit einer ruhenden Person an andere Positionen auf der Erdkugel, z. B. von der Nordhalbkugel auf die Südhalbkugel, kann zu einer anderen Sicht auf den Sonnenlauf führen. Die Sonne geht auch in Kapstadt im Osten auf und im Westen unter; ihren Höchststand erreicht sie im Norden. Wenn die Person ihren Blick zum Höchststand der Sonne richtet, blickt sie somit nach Norden. Folglich liegt der Aufgangspunkt der Sonne zu ihrer Rechten, der Untergangspunkt zu ihrer Linken. Dies trifft für alle Orte außerhalb der Tropen auf der Südhalbkugel jederzeit zu. Es fällt auf, dass mit der Veränderung des Standpunktes neue Bedingungen für die räumliche Vorstellung auftreten.

#### 4.4. Verwendung der Aufgaben in einer qualitativen Studie

Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgt im Rahmen einer qualitativen Studie zur Untersuchung räumlicher Denkprozesse bei Mathematik-Lehramtsstudierenden der Universität Salzburg im Studienjahr 2020-2021. Zur Beantwortung der Forschungsfrage „Welche räumlichen Denkschritte werden in mathematisch-physikalischen Aufgaben zu Bewegung und Veränderung verwendet?“ wird ein exploratives Vorgehen (vgl. Flick, 2014) mit qualitativer Inhaltsanalyse (vgl. Mayring, 2010) zur Auswertung gewählt.

Die Analyse der unterschiedlichen Lösungswege einerseits und die persönliche Sichtweise der ProbandInnen auf ihre eigenen Denkschritte bei der Bearbeitung der Aufgaben andererseits sollen zur Ermittlung mannigfaltiger Einzelheiten des räumlichen Denkens führen. Die erhobenen Daten aus der schriftlichen Bearbeitung und aus der mündlichen Kommunikation in einem leitfadengestützten Interview obliegen einer vergleichenden und prüfenden Interpretation, bei der individuelle Kernaussagen geordnet, zum tieferen Verständnis expliziert und strukturiert werden (vgl. Gropengießer, 2008). Daran schließt sich der Versuch einer induktiv abgeleiteten Klassifizierung räumlicher Denkprozesse.

#### 5. Beispielhafte Ergebnisse der Erprobung als Ausblick

Die Erprobung der Aufgaben in einer Lehrveranstaltung mit 15 Studierenden vermittelt bereits ein erstes

Bild der Analyse der Lösungsschritte und der Denkprozesse, die die ProbandInnen aus der Reflexion über ihr Vorgehen beim Lösungsprozess schildern und nach der Bearbeitung der Aufgabe aufzeichnen. Relevante Aussagen werden nach der Ähnlichkeit ihrer inhaltlichen Bedeutung in abgeleiteten übergeordneten Klassen eingeordnet.

Für die Lösung der Bewegungsaufgaben mit mechanischen Elementen gilt vor allem die Fokussierung auf relevante Merkmale der Bewegung, auf statische und bewegliche Teile des Gesamtgefüges, wie „dass ein einzelner Zahn der Scheibe nach und nach etwas weiter nach links rutscht“ und „dass die Schraubenwinde in die Zahnradlücke drückt“.

Auch das Nachvollziehen einer realen Bewegung scheint bei der Angabe von Denkvorgängen zur Drehrichtung von Zahnrädern mehrmals auf, z. B. als „in Gedanken langsam nachvollzogene Bewegung“ oder als Einzeichnen von „Schlangenlinien mit Pfeilspitzen um die Zahnräder“.

Auf die Aufgliederung einer komplexen Konstellation als Objektzerlegung und als Objektzusammenfügung für die endgültige Lösung lassen die Vermerke „schrittweises Vorstellen der Bewegungsschritte“ und „System einzeln und im Zusammenwirken betrachtet“ schließen, d. h. komplexe Bewegungen werden in ihre Teile zerlegt und dann zusammengeführt bzw. übertragen.

Das Verändern von Bedingungen und die Betrachtung aus entgegengesetzter Sicht werden ebenfalls als Denkprozess zur Lösung mechanischer Aufgaben eingesetzt, z. B. „ich habe mir das Gegenteil vorgestellt, also in welche Richtung würde es sich drehen, wenn sich B anders bewegt“.

Bei der räumlichen Vorstellung astronomischer Bewegungen herrscht der Perspektivenwechsel vor. Allerdings bleibt die Verbindung der Sichtweise aus der Horizontebene mit jener von außen auf die Kugel der Erde als Modell, vom Large-Scale zum Small-Scale, vielfach ein Versuch und wird nur in einzelnen Fällen bis zur Lösung durchdacht. Bezeichnend sind folgende Aussagen: „ich habe an die Erde als Kugel gedacht, die immer zur Hälfte im Schatten ist“, „die Erde rotiert an bestimmten Punkten in Richtung Sonne und an anderen weg von ihr“, „ich habe mir mental bei Kapstadt einen Menschen vorgestellt“.

Auffallend ist die individuelle und spontane Verwendung von praktischen alltäglichen Hilfsmitteln und von einfachen Skizzen zur Veranschaulichung. Zum Beispiel wird die Übertragung der Bewegung der starren Pleuelstange zu einer Drehbewegung mit einem Lineal nachgespielt oder die Drehrichtung von Zahnrädern mit Keilriemen an Gläsern mit Gummibändern imitiert. Zum Erkennen der Rechtsschraube „habe ich geneigte Striche für die Schraube gezeichnet und probiert, wohin sie sich bei der Umdrehung bewegt“.

Der Rückgriff auf frühes Wissen bzw. auf Allgemeinwissen kennzeichnet vor allem die Lösung bei Aufgaben mit astronomischem Inhalt. Der Vergleich mit Vertrautem aus der Erfahrung, z. B. die Erinnerung an eine Spieleisenbahn oder die Vorstellung einer alten Bergbahn, um die Translationsbewegung der Pleuelstange zu erkennen, ist ein wichtiger Aspekt in der räumlichen Vorstellung und hebt das räumliche Arbeitsgedächtnis hervor.

Die Auswertung der bei der Erprobung erhobenen Daten zeigt, dass bei der Bearbeitung der Aufgaben eine Vielfalt an räumlichen Denkvorgängen angewendet wird, die auf Individualität und vielseitigen Einsatz räumlicher Prozesse hindeuten. Die Ergebnisse lassen erkennen, dass die Vorstellung der Bewegung im räumlichen Denken eine zentrale Rolle spielt. Im Hinblick auf die Erstellung eines Kategorienkonstrukt räumlicher Denkvorgänge im Lösungsweg dieser Aufgaben werden leitfadengestützte Interviews angesetzt, die differenziertere persönliche Aussagen vermuten lassen.

## 6. Literatur

- Barratt, E. S. (1953). Analysis of verbal reports of solving spatial problems as an aid in defining spatial factors. *The Journal of Psychology* 36, 17-25.
- Blum, A., Renn, J., & Schemmel, M. (2016). Experience and Representation in Modern Physics. Schemmel, M. (Ed.): *Spatial Thinking and External Representation. Towards a Historical Epistemology of Space*. Max Planck Institute for the History of Science. Berlin.
- Buckley, J., Seery, N., & Cauty, D. (2019). Investigating the use of spatial reasoning strategies in geometric problem solving. *Int J Technol Des Educ* 29, 341-362.
- Cole, M., Cohen, Ch., Wilhelm, J., & Lindell, R. (2018). Spatial Thinking in astronomy education research. *Physical Review. Physics Education Research* 14.
- Damerow, P. (2016). Space and Matter in Early Modern Science: The Impenetrability of Matter. Schemmel, M. (Ed.): *Spatial Thinking and External Representation. Towards a Historical Epistemology of Space*. Max Planck Institute for the History of Science. Berlin.
- El Koussy, A. A. H. (1935). Visual perception of space. *British Journal of Psychology*, 20, 1-89.
- Flick, U. (2014). *Qualitative Sozialforschung. Eine Einführung*. 6. Auflage. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag.
- French, J. W. (1965). The relationship of problem-solving styles to the factor composition of tests. *Educational and Psychological Measurement*, Vol. XXV, 1, 9-28.
- Frostig, M., Horne, D., & Miller, A. M. (1972). *Visuelle Wahrnehmungsförderung*. Reinartz, A., & E. (Hrsg.) 2. Deutsche Auflage 1979. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.

- Fulmer, L., & Fulmer, G. (2014). Secondary Students' Visual-Spatial Ability Predicts Performance on the Visual-Spatial Electricity and Electromagnetism Test (VSEEMT). *Science Education. Review Letters*, Vol. 2014, 8-21
- Galton, F. (1879). Generic images. *Nineteenth Century*, 6, 157-169.
- Glück, J., Kaufmann, H., Dünser, A., & Steinbügl, K. (2005). Geometrie und Raumvorstellung – Psychologische Perspektiven. *Informationsblätter der Geometrie (IBDG)*, 24.
- Gropengießer, H. (2008). Qualitative Inhaltsanalyse in der fachdidaktischen Lehr-Lernforschung. Mayring, Ph., & Gläser-Zikuda, M. (Hrsg.): Die Praxis der Qualitativen Inhaltsanalyse. Weinheim & Basel: Beltz Verlag.
- Hawes, Z., Tepylo, D., Moss, J. (2015). Developing spatial thinking. Implications for early mathematics education. B. Davis and Spatial Reasoning Study Group (Eds.): Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions and speculations. New York: Routledge.
- Hegarty, M., & Stull, A. T. (2012). Visuospatial thinking. Holyoak, K. J., & Morrison, R. G. (Eds.): The Oxford handbook of thinking and reasoning. Oxford University Press, 606-630.
- Hegarty, M. (2018). Ability and sex differences in spatial thinking: What does the mental rotation test really measure? *Psychon Bull Rev* 25, 1212-1219.
- Just, M. A., & Carpenter, P. A. (1985). Cognitive Coordinate System: Accounts of Mental Rotation and Individual Differences in Spatial Ability. *Psychological Review*. 92/2, 137-172.
- Kircher, E. (2009 a). *Warum Physikunterricht?* Kircher, E., Girwidz, R., & Häußler, P. (Hrsg.) Physikdidaktik. Theorie und Praxis. Berlin Heidelberg: Springer Verlag.
- Kircher, E. (2009 b). *Elementarisierung und didaktische Rekonstruktion*. Kircher, E., Girwidz, R., & Häußler, P. (Hrsg.) Physikdidaktik. Theorie und Praxis. Berlin Heidelberg: Springer Verlag.
- Kozhevnikov, M., Motes, M.A., & Hegarty, M. (2007). Spatial Visualization in Physics Problem Solving. *Cognitive Science* 31.
- Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and Characterization of Sex Differences on Spatial Ability: A Meta-Analysis. *Child Development*, 56/6, 1479-1498.
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft.
- Malotki, E. (1979). *Hopi-Raum: Eine sprachwissenschaftliche Analyse der Raumvorstellungen in der Hopi-Sprache*. Tübingen: Narr.
- Maresch, G. (2014). Strategies for Assessing Spatial Ability Tasks. *Journal for Geometry and Graphics*, 18 (1), 125-132.
- Maresch, G. (2020). *Die Grundroutinen des räumlichen Denkens und Handelns*. Zumbach, J., Maresch, G., Strahl, A., Fleischer, T. (Hrsg.): Neue Impulse in der Naturwissenschaftsdidaktik. Münster: Waxmann. 121-133.
- Mayring, Ph. (2010). Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken. 11. Auflage. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.
- McGrew, K. S. (2009). CHC theory and the human cognitive abilities project: Standing on the shoulders of the giants of psychometric intelligence research. *Intelligence* 37, 1-10.
- National Research Council (2006). *Learning to Think Spatially*. Washington, DC: The National Academies Press.
- Neugebauer, O. (1975). The Almagest and its Direct Predecessors. Book 1. Neugebauer, O. (Ed). A History of Ancient Mathematical Astronomy. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1971). *Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde*. Stuttgart: Klett-Cotta.
- Platon. *Timaios*. aus: Werke VII, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgemeinschaft, 1972. Übersetzung von Müller, H., & Schleiermacher, F. (Sonderausgabe 1990).
- Roth, J. (2005). *Bewegliches Denken in Mathematik*. Hildesheim: Franzbecker.
- Schultz, K. (1991). The Contribution of Solution Strategy to Spatial Performance. *Canadian Journal of Psychology*, 45 (4), 474-491.
- Stückrath, F. (1955). *Kind und Raum. Psychologische Voraussetzungen der Raumlehre in der Volksschule*. München: Kösel-Verlag.
- Thiering, M., & Schiefenhövel, W. (2016). Spatial Concepts in Non-Literate Societies: Language and Practice in Eipo and Dene Chipewyan. Schemmel, M. (Ed.): Spatial Thinking and External Representation. Towards a Historical Epistemology of Space. Max Planck Institute for the History of Science. Berlin.
- Thurstone, L. L. (1938). *Primary mental abilities*. Chicago, Illinois: University of Chicago Press.
- Thurstone, L. L. (1950). Some Primary Abilities in Visual Thinking. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 94 (6), 517-521.
- Uttal, D. H., Miller, D. I., & Newcombe, N. S. (2013). Exploring and Enhancing Spatial Thinking: Links to Achievement in Science, Technology, Engineering, and Mathematics? *Current Directions in Psychological Science*, 22 (5), 367-373.
- Wai, J., Lubinski, D., & Benbow, C. P. (2009). Spatial Ability for STEM Domains: Aligning Over 50 Years of Cumulative Psychological Knowledge Solidifies Its Importance. *Journal of Educational Psychology*, 101 (4), 817-835.
- Wolbers, Th., & Hegarty, M. (2010). What determines our navigational abilities? *Trends in Cognitive Sciences*, 14 (3), 138-146.