

Quanteninformationstheorie

ein Thema für den Schulunterricht

Wolfgang Dür

Institut für Theoretische Physik, Universität Innsbruck
Fachdidaktikzentrum für Naturwissenschaften West

Warum ist Quantenphysik relevant?

- **Grundlage unseres physikalischen Weltbildes !**
- **Grundlage für künftige Schlüsseltechnologien**
 - Miniaturisierung & Nanotechnologie
 - Kommunikation & Informationsverarbeitung
 - Materialwissenschaften
 - Präzisionsspektroskopie & Metrologie
(Längen und Zeitmessung)
 - Laser
 -

**(Seltsame) Eigenschaften der Natur erforschen und verstehen,
aber auch für praktische Anwendungen benutzen!**

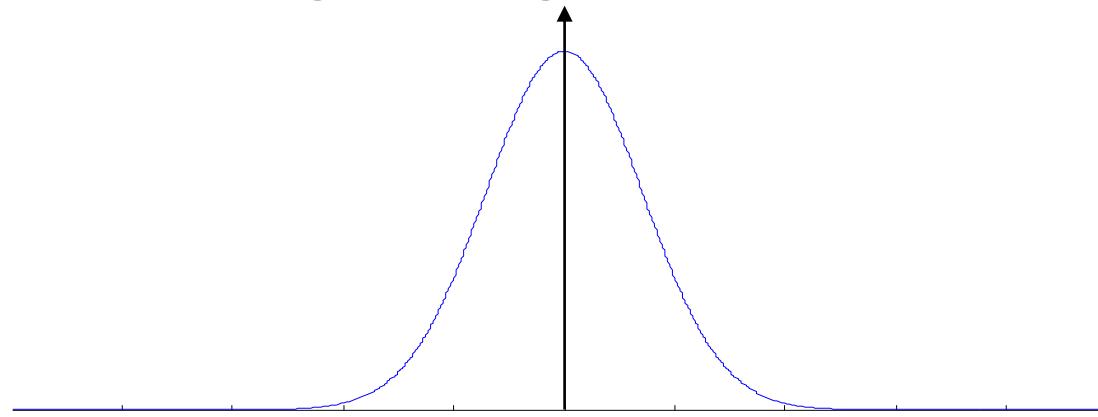
Konventioneller Zugang zur Quantenmechanik

**Photoeffekt – Doppelspalt – Welle-Teilchen Dualismus-
Atommodelle - Schrödingergleichung**

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H} \psi(\mathbf{r}, t)$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\mathbf{r}, t)$$

partielle Differentialgleichung für Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}, t)$



**Problem: konzeptionell schwierig, fortgeschrittenes Mathematik
(unendlich dimensionaler Vektorraum, partielle Differentialgleichung)
Konzepte und Prinzipien der Quantenmechanik verschleiert**

(1) Klassische Informationsverarbeitung

- Klassisches Bit
- Logische Netzwerke
- implizite Annahmen der klassischen Physik

(2) Einfache Quantensysteme - das Quantenbit (qubit)

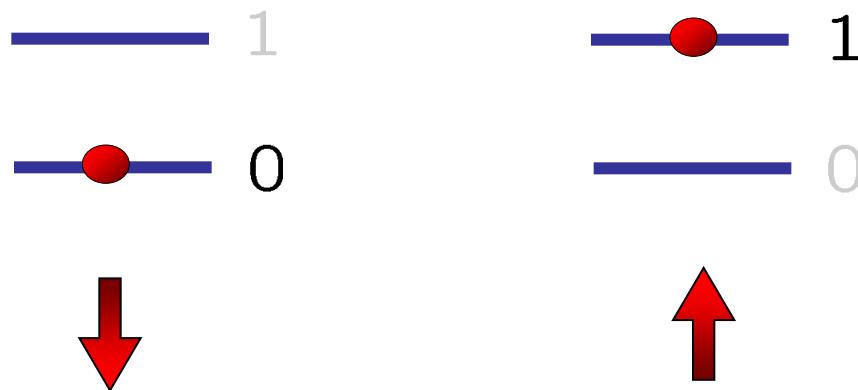
- Qubit: mathematische und anschauliche Beschreibung
 - Messungen und Operationen
 - Systeme von mehreren Qubits
 - Verschränkung

(3) Quantencomputer

- Warum Quantencomputer? Was macht ein Quantencomputer?
- Wie kann man den Geschwindigkeitsgewinn gegenüber klass. Computern verstehen?
 - Beispiele für physikalische Realisierung

(4) Messbasierter Quantencomputer

Klassisches Bit



System mit einer charakteristischen Eigenschaft, die 2 mögliche Werte annehmen kann

(Bem: weitere Eigenschaften werden vernachlässigt bzw. als fixiert angenommen)

2 mögliche Zustände: 0 und 1

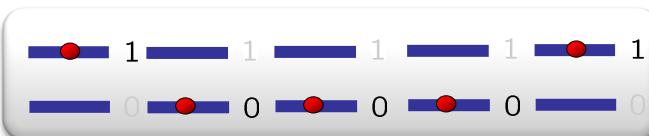
Abstraktes Objekt, verschiedenen Physikalische Realisierungen möglich:

- Spannung 0V – 5V
- Ball an Ort x1- x2

Zusammengesetzte Systeme - Bitstrings



$$x = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = 10100$$

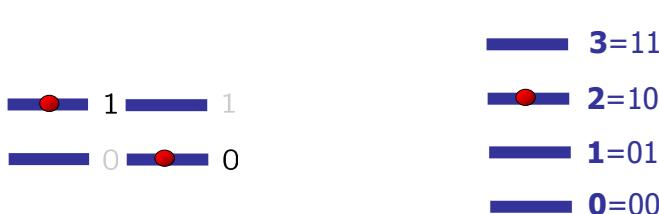


$$y = y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 = 10001$$

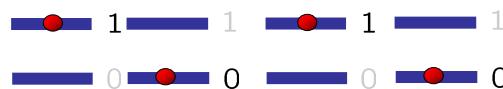
Ansammlung von elementaren 2-Niveau Systemen mit jeweils einer (unterschiedlichen) Eigenschaft, die 2 Werte annehmen kann

n Bits – 2^n Einstellungsmöglichkeiten

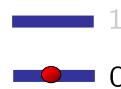
Äquivalent zu System mit einer charakteristischen Eigenschaft und $d=2^n$ verschiedenen Werten



Klassische Informationsverarbeitung



$$\mathbf{x} = x_1 x_2 x_3 x_4 = 1010$$



$$y_1 = f(\mathbf{x}) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge x_4) = 0$$



Manipulation eines Bitstrings durch Sequenz von logischen Gattern

Elementare Gatter (NOT , AND, OR)

Jede beliebige Funktion $f(x)$ kann durch Sequenz von elementaren Gattern realisiert werden.

Jede Berechnung am Computer funktioniert nach diesem Schema

Eigenschaften klassischer Systeme

“Realität”:

**Betrachte charakteristische Eigenschaft(en) eines Objekts:
(z.B. Ort, Geschwindigkeit)**

- **Besitzen bestimmten Wert, unabhängig von Beobachtung/Messung**
 - **Beobachtung/Messung verändert den Zustand nicht**
- **Alle Größen können gleichzeitig, ohne gegenseitige Beeinflussung und mit beliebiger Genauigkeit gemessen werden**

Kopien eines Systems können hergestellt werden

Determinismus und Vorhersagbarkeit (beliebige Wiederholung führt –bei identischen Anfangsbedingungen- zum selben Ergebnis)

Quanten-Bit - qubit

System mit einer charakteristischen Eigenschaft, die 2 mögliche Werte annehmen kann

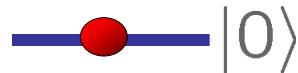
$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{---} |1\rangle \\ |0\rangle \end{array}$$
$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{---} |1\rangle \\ |0\rangle \end{array}$$

**Ort eines Teilchens
Polarisation eines Photons
2 interne Zustände eines Atoms
Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen**

beliebige Überlagerung der Zustände 0 und 1 ist möglich !

$$\begin{array}{c} \text{---} |1\rangle \\ |0\rangle \end{array}$$

Mathematische Beschreibung eines qubits



$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Zustand eines qubits wird durch einen 2-er Vektor beschrieben.

Koeffizienten α, β sind komplexe Zahlen, Hilbert Raum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$.

**Länge des Vektors = 1 , $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, globale Phase ist irrelevant
-> Zustand wird durch 2 reelle Parameter vollständig beschrieben <-**

$$|\psi\rangle = \cos(\vartheta/2)|0\rangle + \sin(\vartheta/2)e^{i\varphi}|1\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) \\ \sin(\vartheta/2)e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

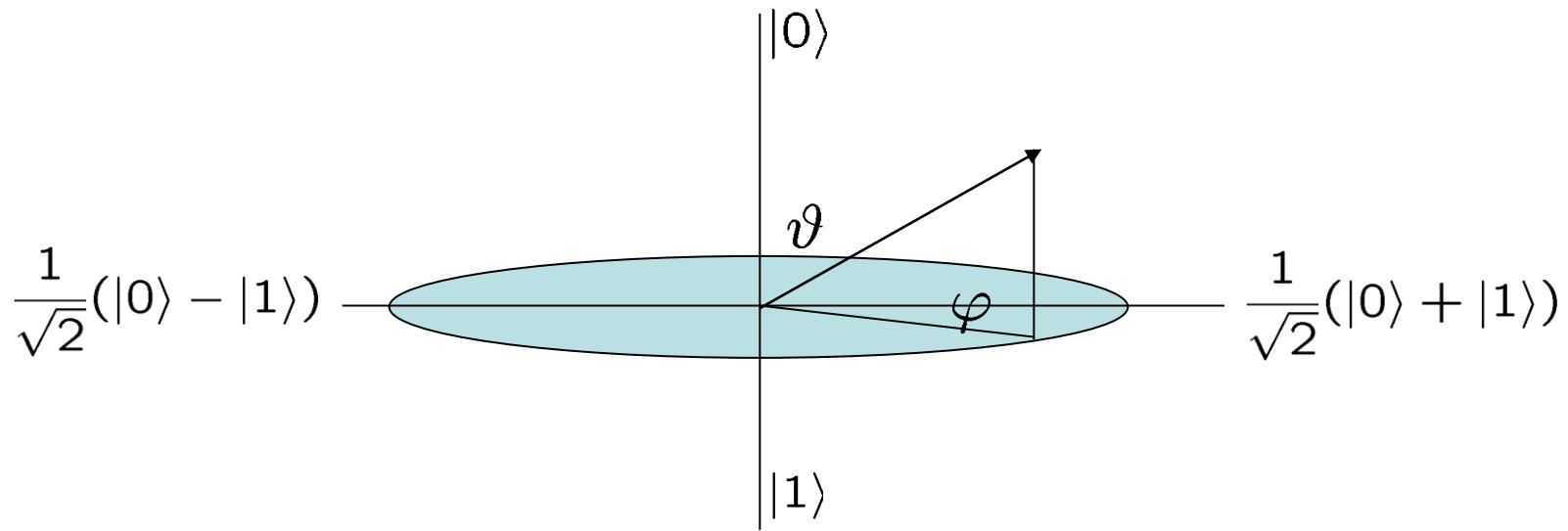
Bem: Für Schulunterricht Verzicht auf komplexe Zahlen

Anschauliche Beschreibung eines qubits

— |1⟩

— |0⟩

$$|\psi\rangle = \cos(\vartheta/2)|0\rangle + \sin(\vartheta/2)e^{i\varphi}|1\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) \\ \sin(\vartheta/2)e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$



**Vektor der Länge 1 im 3-dimensionalen Raum (Kugelkoordinaten)
bzw. in 2D (reelle Koeffizienten)**

Messungen

2-Niveausystem → 2 mögliche Messergebnisse (eine ja/nein Frage)

Betrachte Messung $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

Für $|\psi\rangle = |0\rangle$ ist das Messergebnis immer 0 (analog für 1)

Für $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ ist das Messergebnis zufällig !
mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Ergebnis 0
mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Ergebnis 1

Zustand nach der Messung (unabhängig vom Anfangszustand)
bei Ergebnis 0 ist der Zustand nach der Messung $|\psi'\rangle = |0\rangle$.
bei Ergebnis 1 ist der Zustand nach der Messung $|\psi'\rangle = |1\rangle$.

Quantenmechanik ist eine stochastische Theorie !

Messung verändert den Zustand des Systems !

Für $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ erhält man
mit Wahrscheinlichkeit $p_0 = |\alpha|^2$ Ergebnis 0
mit Wahrscheinlichkeit $p_1 = |\beta|^2$ Ergebnis 1

Auch möglich:

Messung in andere Richtung – Bsp: $\{|0\rangle + |1\rangle, |0\rangle - |1\rangle\}$.
(betrachte Projektion des Zustandes auf Messrichtung – Länge des Vektors liefert
Messwahrscheinlichkeit)

Anschaulich

Messung in bestimmter Raumrichtung = „Spalt“, „Schlitz“
Vektor in Richtung des Spalts bleibt unverändert – andere Vektoren
werden in Richtung des Spalts hineingedreht (entweder nach oben
oder unten) – je geringer die notwendige Drehung, desto grösser
ist die Wahrscheinlichkeit dieses Messergebnis zu erhalten.

Operationen

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

erlaubte Operationen: beschrieben durch unitäre Matrizen

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad UU^\dagger = 1$$

$$|0\rangle \rightarrow U|0\rangle = |\psi_0\rangle$$

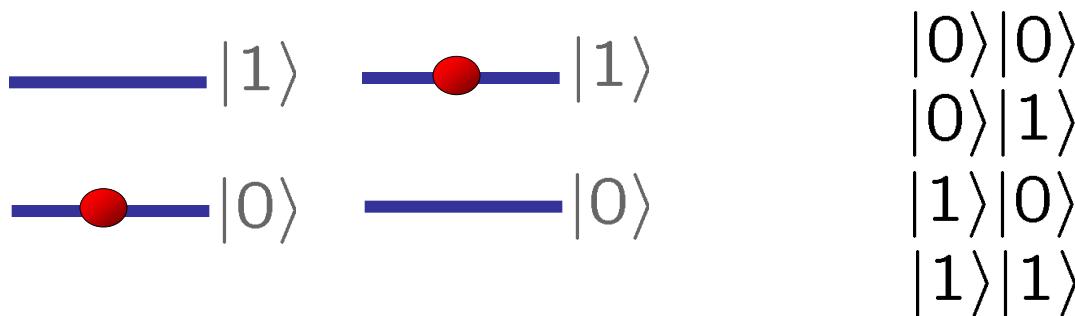
$$|1\rangle \rightarrow U|1\rangle = |\psi_1\rangle$$

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \alpha|\psi_0\rangle + \beta|\psi_1\rangle$$

unitäre Operation erhält Skalarprodukt zweier Vektoren.

**Anschaulich: entspricht Drehung des Vektors im Raum
allgemeine Drehung: um x-, y- und z-Achse**

System von 2 qubits

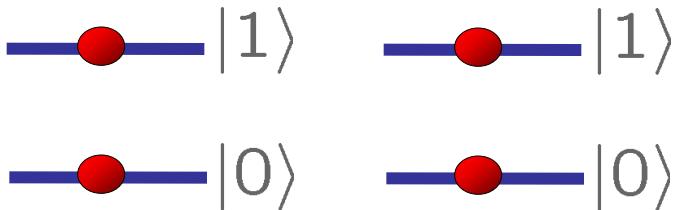


Auch hier wieder: beliebige Überlagerungen der 4 Basiszustände

4-er Vektor mit komplexen Koeffizienten

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

Verschränkte Zustände



$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Korrelation der Messergebnisse für Messungen – unabhängig vom Standort/Entfernung der beiden Qubits – „Nichtlokalität“.

Messung von qubit 1 verändert (instantan) Zustand des qubits 2

Bem: gilt für beliebige Messbasen! (nicht nur 0,1)

Implizite Annahmen der klassischen Physik

“Realität”:

**Betrachte charakteristische Eigenschaft(en) eines Objekts:
(z.B. Ort, Geschwindigkeit)**

- Besitzen bestimmten Wert, unabhängig von Beobachtung/Messung
 - Beobachtung/Messung verändert den Zustand nicht
- Alle Größen können gleichzeitig, ohne gegenseitige Beeinflussung und mit beliebiger Genauigkeit gemessen werden

Kopien eines Systems können hergestellt werden

Determinismus und Vorhersagbarkeit (beliebige Wiederholung führt –bei identischen Anfangsbedingungen- zum selben Ergebnis)

Eigenschaften der Quantenmechanik

Superpositionen (Überlagerungen) aller Basiszustände

Verschränkung

stochastischer Charakter

Zerstörung/Veränderung des Zustands bei Messung

Quanteninformationsverarbeitung

Die seltsamen Eigenschaften von Quanten sollen für praktische Anwendungen genutzt werden

Quantenkryptographie

Sicher Übertragung von geheimen Nachrichten

Quantenkommunikation

Übertragung von Quanteninformation an weit entfernte Orte -
Teleportation

Quantencomputer

Rechnen mit Quantenzuständen

Anwendungen

1 qubit:

stochastischer Charakter der Quantenmechanik

Komplementarität – Unschärferelation

No-Cloning Theorem

einfache Quantenkryptographieprotokolle – sichere Kommunikation

2 qubits:

Bell'sche Ungleichungen – Quantenmechanik verändert unser Bild der Welt – Lokalität und/oder Realität müssen aufgegeben werden

3 qubits:

Teleportation: ein verschränkter Zustand dient als Resource, um ein unbekanntes Quantenbit von A nach B zu übertragen

n qubits:

Quantencomputer

Von qubits zu Wellenfunktionen:

Tunneleffekt

Welle-Teilchen Dualismus

Schrödingers Katze

Quantencomputer

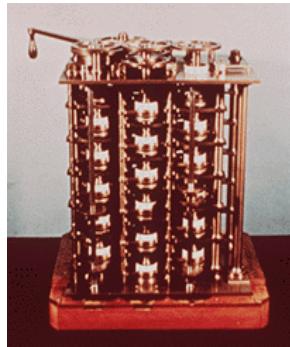
Entfernung aus lizenzrechtlichen Gründen!

Autoren haben die Möglichkeit die
Veröffentlichungsrechte nachzuweisen.

„Kilo, Mega, Giga, ...“

„milli, micro, nano, ...“

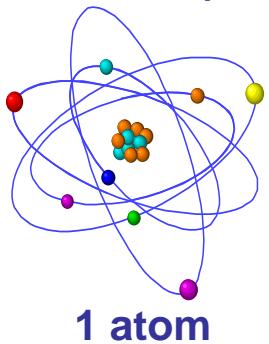
Technologischer Fortschritt



Babbage 1820



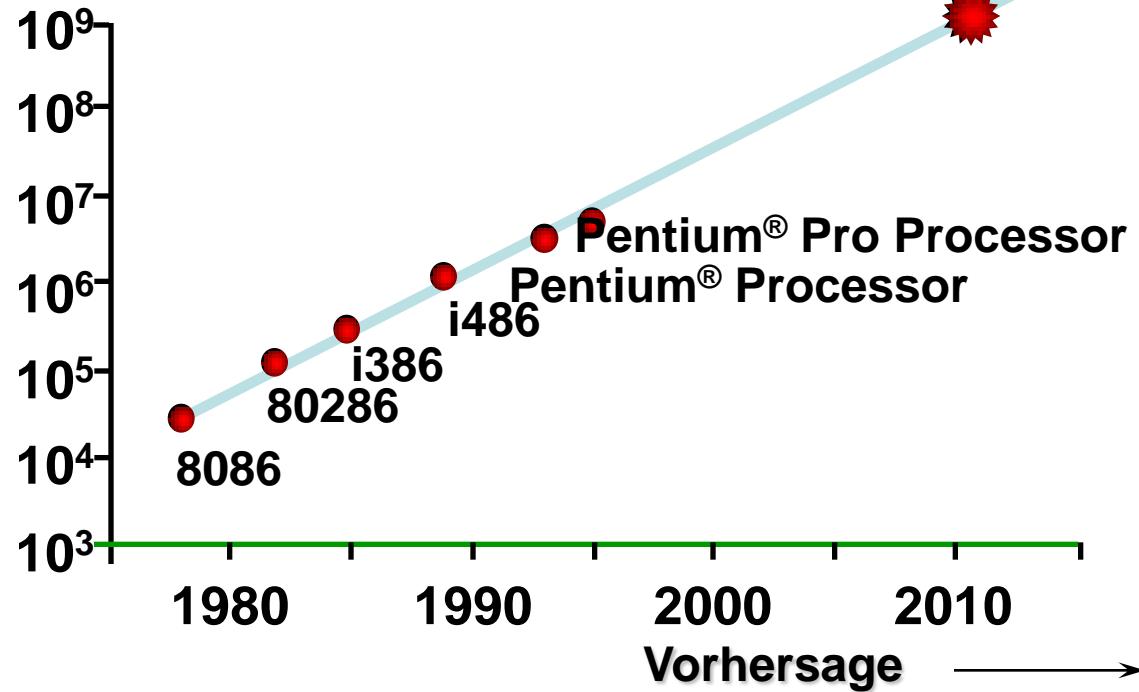
Pentium 4 (2002)



1 atom

Wieviel Transistoren
passen auf einen Chip?

1 Milliarde
Transistoren !

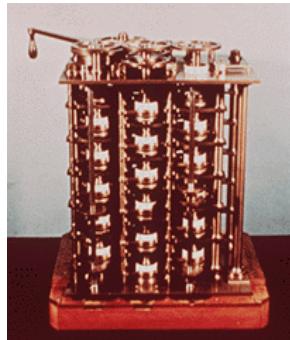


kleiner = schneller

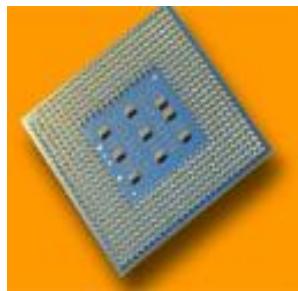
„Kilo, Mega, Giga, ...“

„milli, micro, nano, ...“

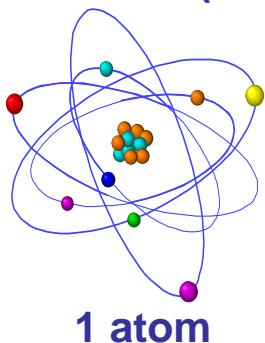
Technologischer Fortschritt



Babbage 1820

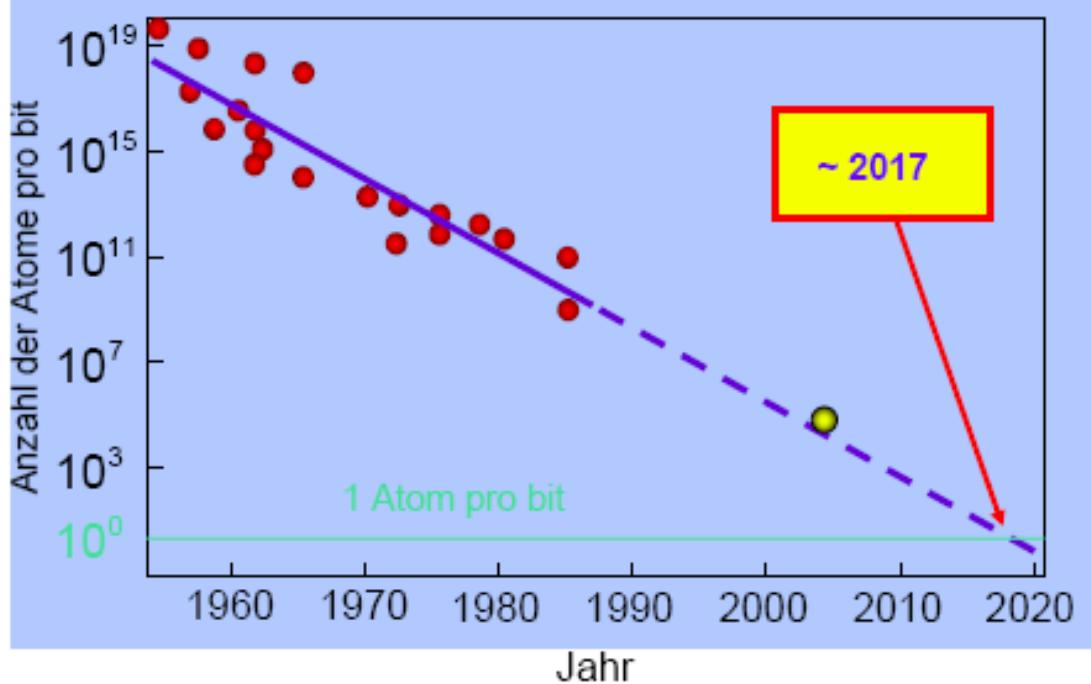


Pentium 4 (2002)



1 atom

Wie viele Atome pro bit ?



Netzwerkmodell eines Quantencomputers

klassischer Computer: logisches Netzwerk (Gatter)

$$x \longrightarrow f(x)$$

Quantencomputer: Netzwerk von Quantengattern (unitäre Operationen)

$$|x\rangle|0\rangle \xrightarrow{U_f} |x\rangle|f(x)\rangle$$

$$|x\rangle = |000101010\rangle = |42\rangle$$

erhalte durch Anwendung der Funktion f (genauer:unitären Operation/Drehung zugehörig zu f) den Funktionswert.

Bemerkung:

**jede beliebige unitäre Operation auf N qubits kann durch Sequenz von elementaren Gattern (beliebige 1-qubit Drehungen und ein 2-qubit-Gatter - Controlled-NOT Gatter) dargestellt werden.
Es kann also jeder Quantenzustand erzeugt werden!**

N qubits

$$\sum_{x=0}^{2^N-1} |x\rangle = (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + \dots + |2^N - 1\rangle) = |+\rangle^{\otimes N}$$

möglicher Eingangszustand: Überlagerung aller Basisvektoren

$$\sum_{x=0}^{2^N-1} |x\rangle |0\rangle \xrightarrow{U_f} \sum_{x=0}^{2^N-1} |x\rangle |f(x)\rangle$$

Quantenparallelismus

erhalte durch nur einmalige Anwendung der Funktion f die Funktionswerte für alle möglichen Eingangswerte

**ABER: Auslesen der gesamten Information ist nicht möglich!
Messung liefert nur einen Funktionswert (zu einem zufälligen x)**

Oft interessieren uns aber nicht die Funktionswerte, sondern eine globale Eigenschaft der Funktion f(x) (z.B. ihre Periode).

Um dies zu lernen, kann ausgenutzt werden, dass alle Funktionswerte f(x) im Ausgangszustand vorhanden sind !

Quantenalgorithmen

Shor – Primfaktorzerlegung (Periode einer Funktion) $143=11*13$
Exponentieller Geschwindigkeitsgewinn gegenüber besten
bekannten klassischen Algorithmus; Klassische
Kryptographieverfahren (RSA) werden dadurch unsicher !

Grover – Datenbanksuche, quadratischer Geschwindigkeitsgewinn

Harrow,Lloyd - Lineare Gleichungssysteme (Sparse)
Quantenunterroutine, exponentieller Geschwindigkeitsgewinn

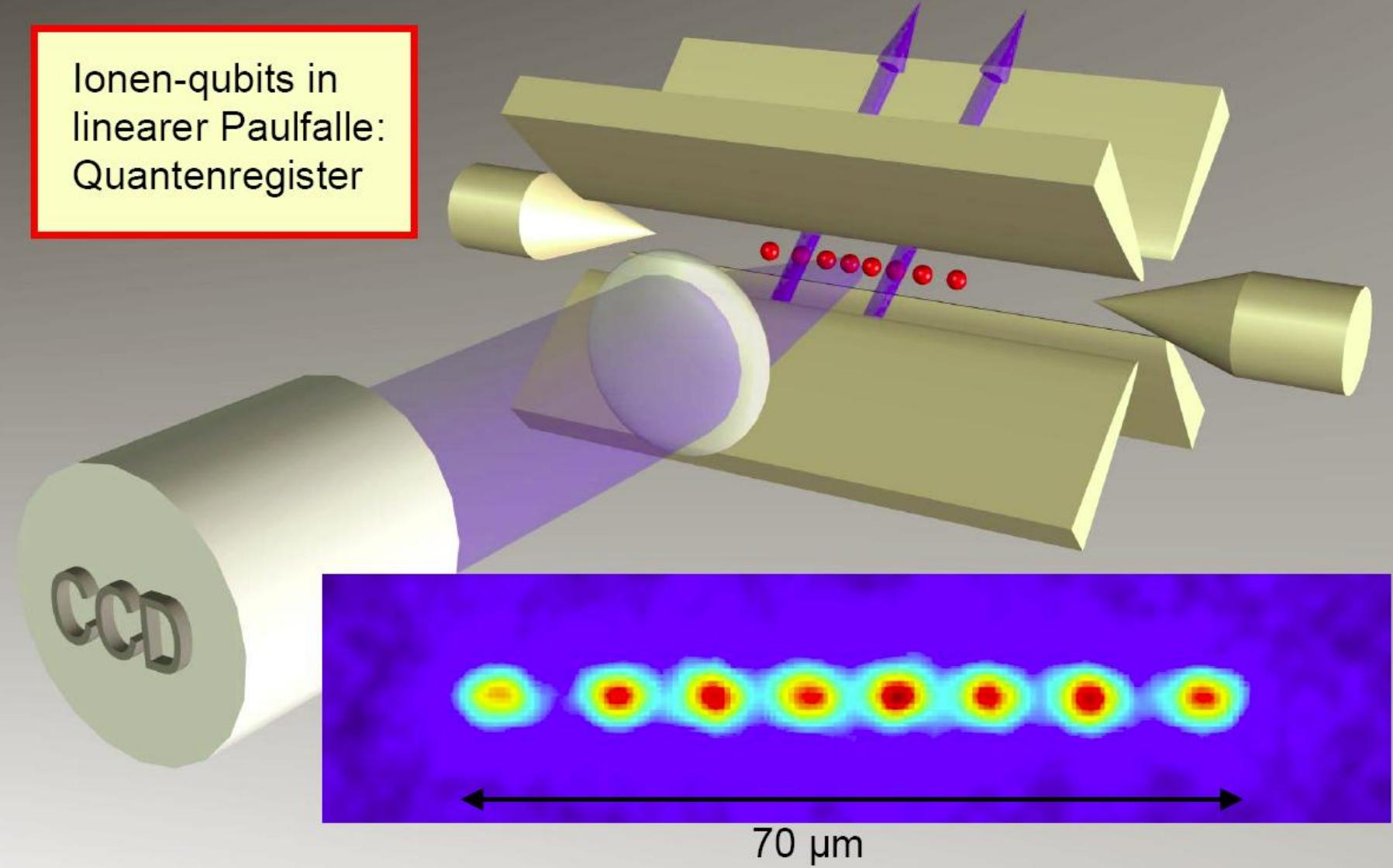
+ weiter Algorithmen Jones Polynomial, Potts model etc.

Grenzen zwischen klassische Computer – QC ?
Welche Probleme kann ein Quantencomputer (effizient) lösen?

P – OK, NP – unwahrscheinlich; Geschwindigkeitsgewinn ????

Kette aus Ca^+ Ionen in der linearen Paulfalle

Ionen-qubits in
linearer Paulfalle:
Quantenregister



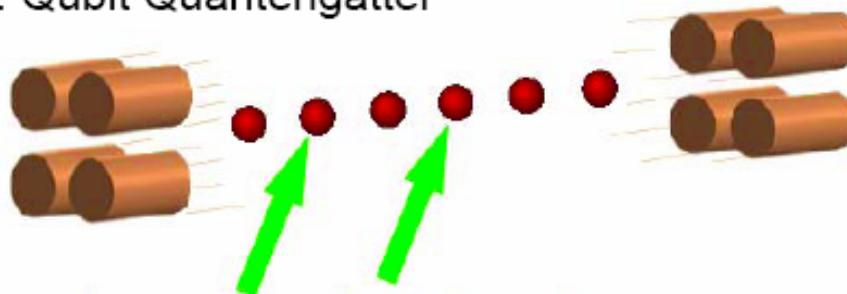
Entfernung aus lizenzrechtlichen Gründen!
Autoren haben die Möglichkeit die
Veröffentlichungsrechte nachzuweisen.

Quantencomputer mit gespeicherten Ionen

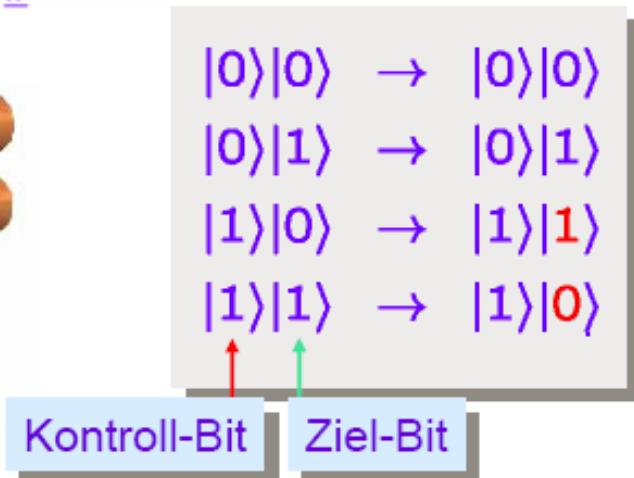
J. I. Cirac, P. Zoller; Phys. Rev. Lett. 74, 4091 (1995)

L Ionen in linearer Falle

- Quantenbits, Quantenregister
 - schmale optische Übergänge
 - Zeeman-Kohärenzen (RF)
- Zustandsvektor des Quantencomputers
$$|\Psi\rangle = \sum_{\underline{x}} c_{\underline{x}} |x_{L-1}, \dots, x_0\rangle \otimes |0\rangle_{CM}$$
- 2-Qubit Quantengatter



Laserimpulse verschränken Ionenpaare



- braucht individuelle Adressierung, effiziente Ein-qubit Operationen
- kleine Dekohärenz der internen und Bewegungs-Zustände
- Quantencomputer als Serie von Gatteroperationen

Ionenfallen

**1- und 2-qubit Quantengatter mit Fidelity >99.3%
Verschränkung von bis zu 14 qubits (GHZ Zustand)
„Quantensimulatoren“ (Dirac Gleichung)**

**Derzeit: lineare Fallen, nur begrenzt skalierbar - Erste Experimente:
segmentierte Fallen**

Optische Gitter

**Ultrakalte neutrale Atome/polare Moleküle werden in optischen
Gitter gespeichert und mit Laser manipuliert**

Quantenpunkte

Elektronenspin in elektr. Potential, Austausch-WW

Photonen

**Polarisationsfreiheitsgrad; Besonders für Kommunikation geeignet
(>100km); Wechselwirkung schwierig!**

Messbasiertes Quantenrechnen (MQC)

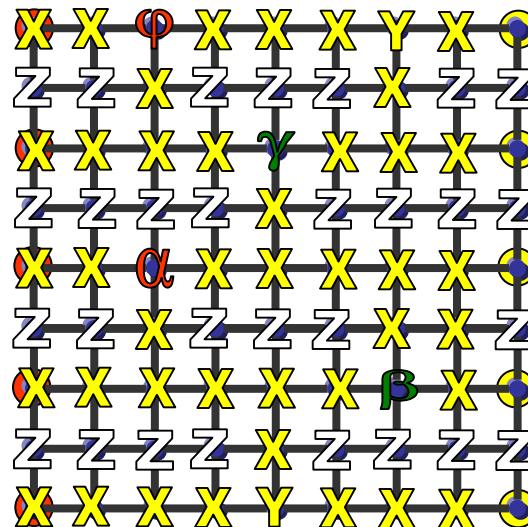
Einweg-Quantencomputer

(R. Raussendorf and H.-J. Briegel)

(i) Präparation eines verschränkten Zustands (2D cluster)

(ii) Sequenz von adaptiven Ein-qubit Messungen

(iii) verbleibenden qubits sind –bis auf lokale Drehung- im gewünschten Zustand



$$|\psi\rangle = U|+\rangle^{\otimes N}$$

Messbasiertes Quantenrechnen

- Wahl der Messbasis/Messmuster + Reihenfolge bestimmen Zustand der restlichen Teilchen
- Man kann, ausgehend von einem bestimmten „universellen“ Zustand (z.B. 2D Clusterzustand) durch die richtige Wahl der Messbasis (i) jeden beliebigen Quantenzustand herstellen; (ii) jede beliebige unitäre Operation durchführen; (iii) jede Quantenrechnung durchführen

Bem: Die Messergebnisse sind vollkommen zufällig! Trotzdem erhält man am Ende den gewünschten Zustand mit Wahrscheinlichkeit $p=1$.

Messergebnis bestimmt (i) nächste Messbasis (zeitliche Reihenfolge);
(ii) notwendige (Pauli) Korrektur
-> adaptives Messmuster
-> klassisches side-processing notwendig (Korrekturoperationen)

Eigenschaften & Vorteile von MQC

(i) Neues Modell für QC:

Einsichten in die fundamentale Struktur von QC
(QM-Eigenschaften, die für Geschwindigkeitsgewinn verantwortlich sind,
Rolle von Verschränkung)

(ii) Neue experimentelle Möglichkeiten

Präparation eines bestimmten verschränkten Zustand, dann nur noch Ein-qubit Messungen – Vorteile für viele Systeme
(optische Gitter, Photonen mit linearer Optik etc.)

(iii) Neuer Zugang zur Entwicklung von Algorithmen/fehlertolerantem rechnen

Topologische Fehlerkorrektur – Threshold 0.75%

Kann der Grundzustand eines „einfachen“ Systems für universelles QC verwendet werden? Welche Zustände sind überhaupt für MQC geeignet?
Welche (Verschränkungs-)Eigenschaften sind notwendig? Wann ist klassische Simulation möglich? (Grenze klass. Computer – QC)

Grundprinzipien von MQC

(i) Teleportation

(ii) Teleportation unter Verwendung eines anderen Zustands

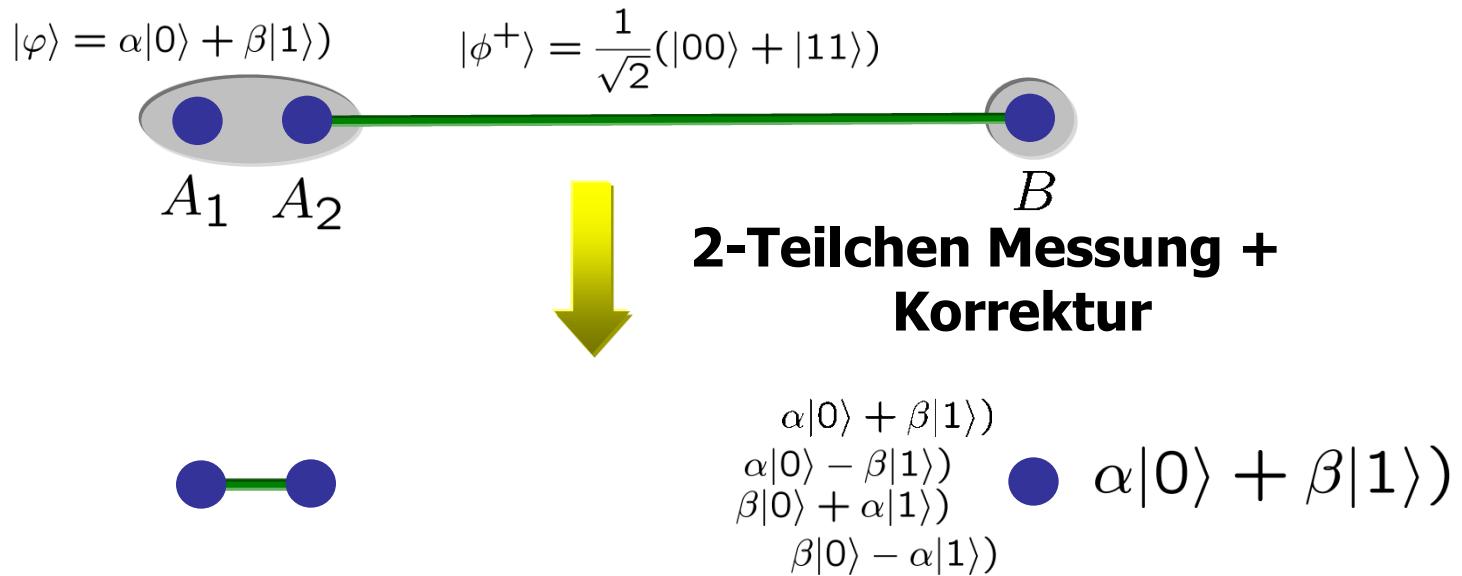
(iii) Wahl des Drehwinkels - Hilfsteilchen

(iv) Deterministische Operationen

(v) Sequenzen von Operationen

Teleportation

Ziel: Übertragung von Quanteninformation von Alice zu Bob



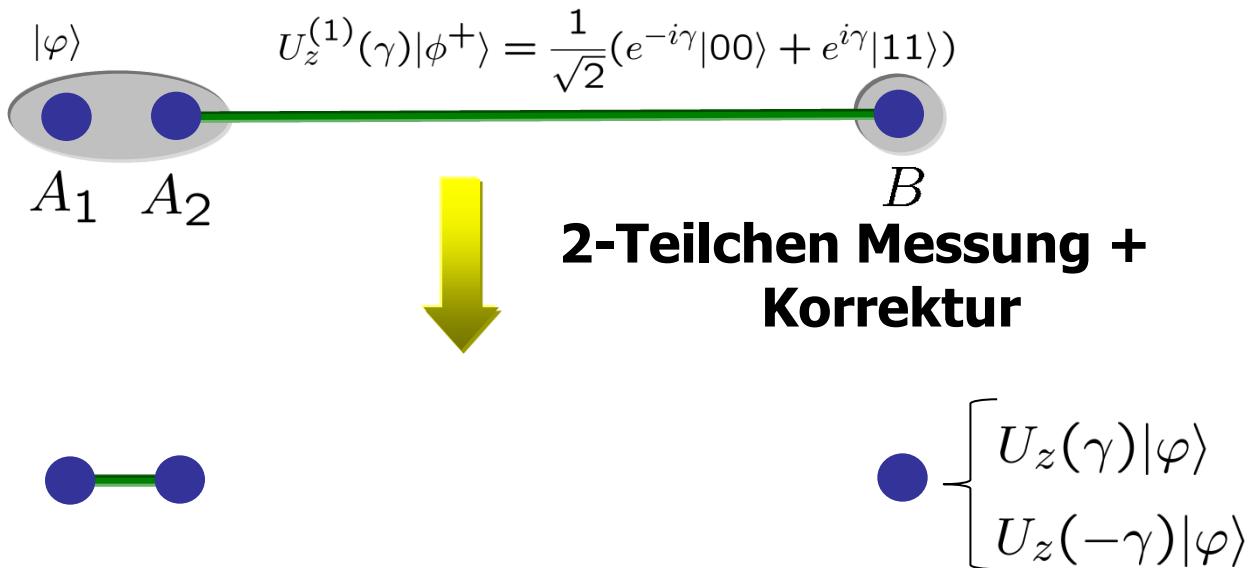
**Verwende max. verschränkten Zustand als Ressource
Messung in verschränkten Basis bei Alice – 4 mögliche Ergebnisse
bekomme Zustand bei Bob –abhängig vom Messergebnis rotiert**

Bemerkungen:

**Es findet kein Transport von Teilchen/Materie statt – nur
Informationstransport. Benötige klass. Information über Messergebnis**

Teleportationsbasiertes Gatter

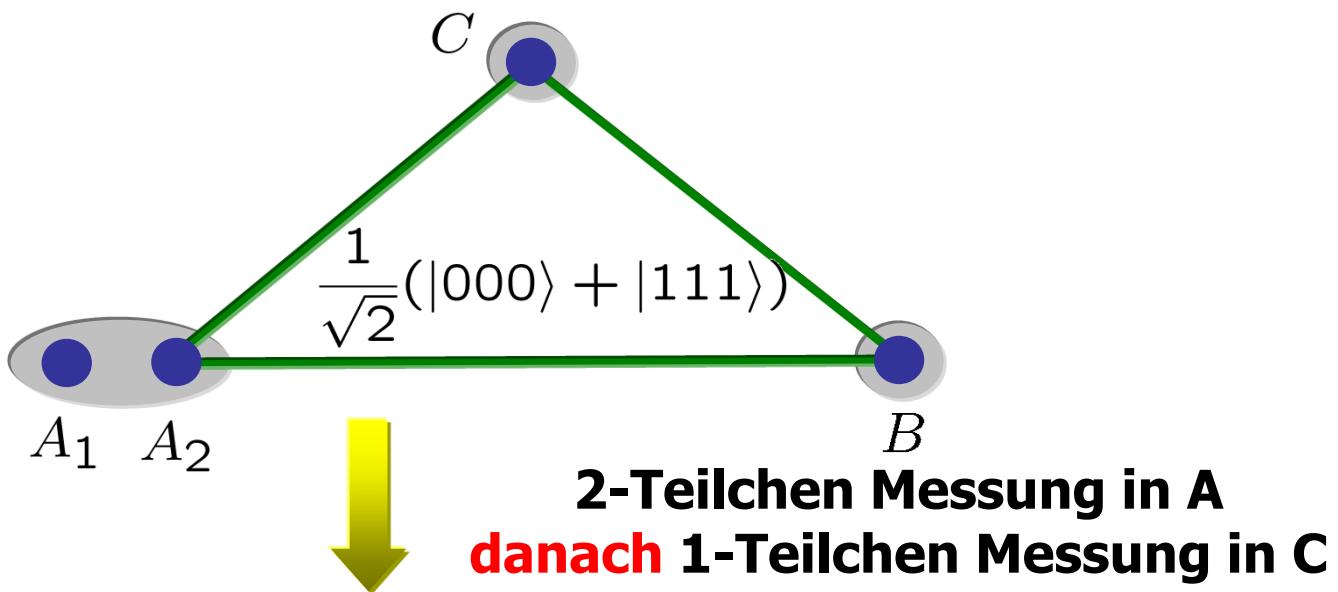
Verwende anderen verschränkten Zustand zur Teleportation



Probleme

- Erhalte mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ den um die z-Achse gedrehten Anfangszustand, mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ aber Drehung in die falsche Richtung !
- Drehwinkel durch Zustand fixiert, nicht wählbar

Programmierbares Quantengatter

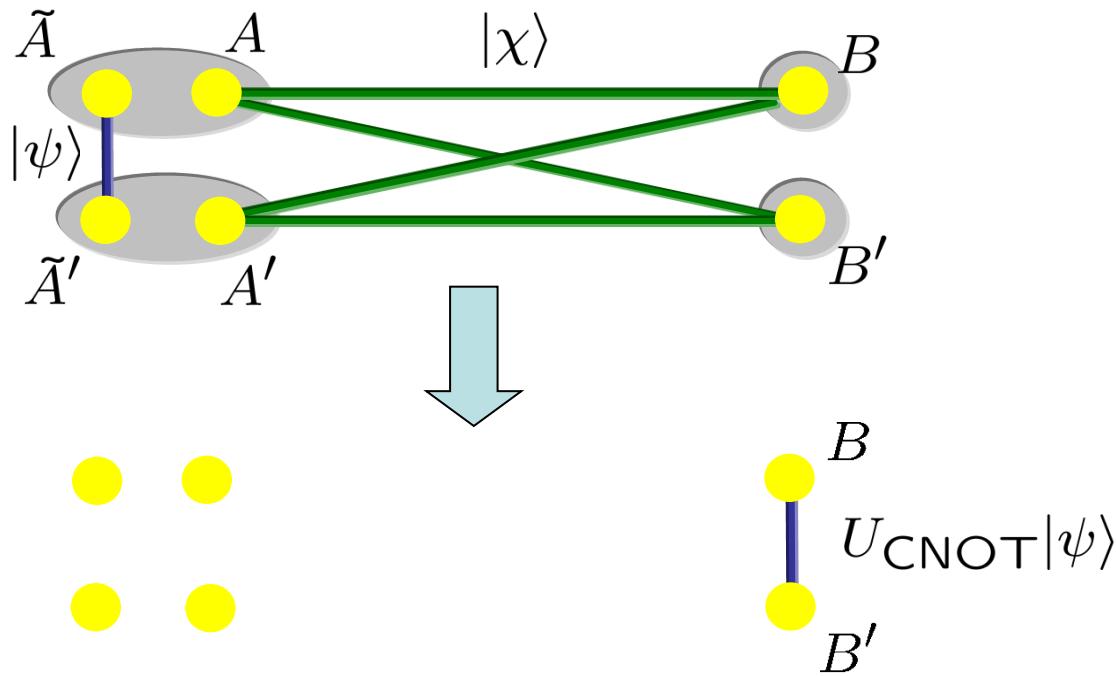


● $U_z(\alpha)|\varphi\rangle$

Durch Messung an Teichen C kann Zustand $e^{-i\gamma}|00\rangle + e^{i\gamma}|11\rangle$ erzeugt werden. Wahl von γ durch Messrichtung in C!

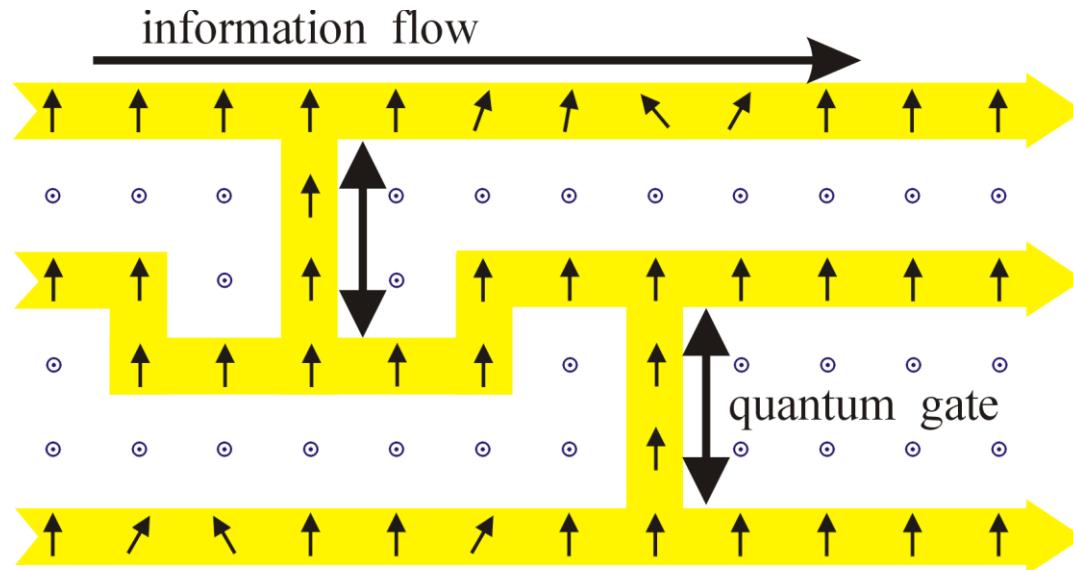
Erhalte mit Wahrscheinlichkeit 1 den gewünschten gedrehten Zustand, freie Wahl des Drehwinkels

2-qubit Gatter: CNOT



$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{AA'}|\phi^+\rangle_{BB'} + |11\rangle_{AA'}|\psi^+\rangle_{BB'})$$

Simulation eines Quantennetzwerkes



measurements:

- in Z direction
- ↑ in X direction
- ↖ in X-Y plane

Raussendorf & HJB, Phys. Rev. Lett. 86, 5188 (2001)

Aktuelle Forschung

Notwendige und hinreichende Bedingungen für Universalität für MQC

- Welche Verschränkungseigenschaften sind notwendig/hinreichend?
- Grundlegende Eigenschaften eines Quantenrechners – was macht einen Quantenrechner aus? Woher kommt der Geschwindigkeitsgewinn?
- Quantenrechnen vs. klassische Simulation

M. Van den Nest, A. Miyake, W. Dür, and H.-J. Briegel, Universal resources for MQC, Phys. Rev. Lett. 97, 150504 (2006); New J. Phys. 9, 204 (2007); PRA 80, 052334 (2009).
J.-M. Cai, W. Dür, M. Van den Nest, A. Miyake and H.-J. Briegel, Quantum computation in correlation space and extremal entanglement, Phys. Rev. Lett. 103, 050503 (2009).

Neue Ressourcen und Hybridschemata für QC

- angepasst an bestimmte experimentelle Realisierung
- Grundzustände von stark korrelierten Systemen

Querverbindungen zu klassische Statistische Physik/Gittertheorien

Mit Hilfe der Universalität von MQC kann man zeigen, dass jedes (thermische) klassische Spinsystem in beliebigen Dimensionen als Spezialfall eines (vergrößerten) 2D Ising-Modells (mit komplexen Parametern) bzw. einer 4D-Ising-Gittertheorie gesehen werden kann.

M. Van den Nest, W. Dür, and H.-J. Briegel, Classical spin models and the quantum stabilizer formalism, Phys. Rev. Lett. 98, 117207 (2007)

M. Van den Nest, W. Dür and H.-J. Briegel, Completeness of the classical 2D Ising model and universal quantum computation, Phys. Rev. Lett. 100, 110501 (2008)

G. De las Cuevas, W. Dür, M. Van den Nest and H. J. Briegel, Completeness of classical spin models and universal quantum computation, J. Stat. Mech., P07011 (2009)

G. De las Cuevas, W. Dür, H. J. Briegel and M. A. Martin-Delgado, Unifying all classical spin models in a Lattice Gauge Theory Phys. Rev. Lett. 102, 230502 (2009); E-print: arXiv:0911.2096 (to appear in New J. Phys. (2010))

Zusammenfassung

Quanteninformation bietet einen neuen, mathematisch einfachen Zugang zur Quantenphysik

Elementare Prinzipien (Überlagerungen, stochastisches Verhalten & Zustandsänderung bei Messung) können illustriert werden

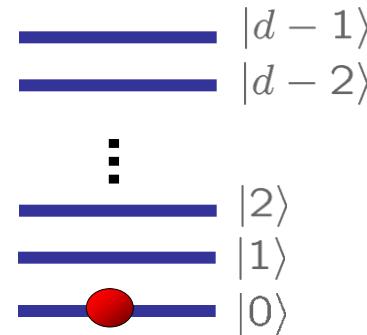
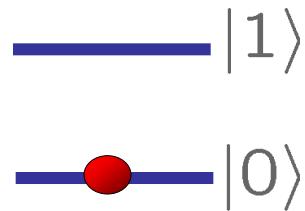
**Moderne Anwendungen der Prinzipien
(Quantenkryptographie, Quantencomputer)**

Brückenschlag zur "klassischen" Quantenmechanik (Wellenfunktion) möglich

**Messbasierter Quantenrechner:
Alternatives Modell zum Quantenrechnen
Ermöglicht neuartige experimentelle Zugänge & konzeptionelle Einsichten**

Von qubits zu Wellenfunktionen

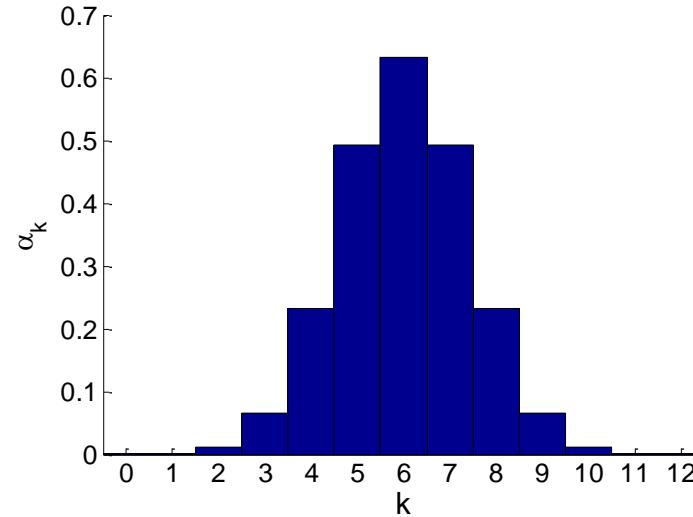
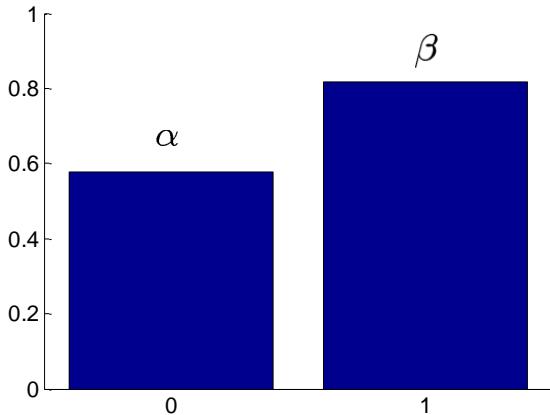
2-Niveausystem (qubit) -> d-Niveau System (qudit)

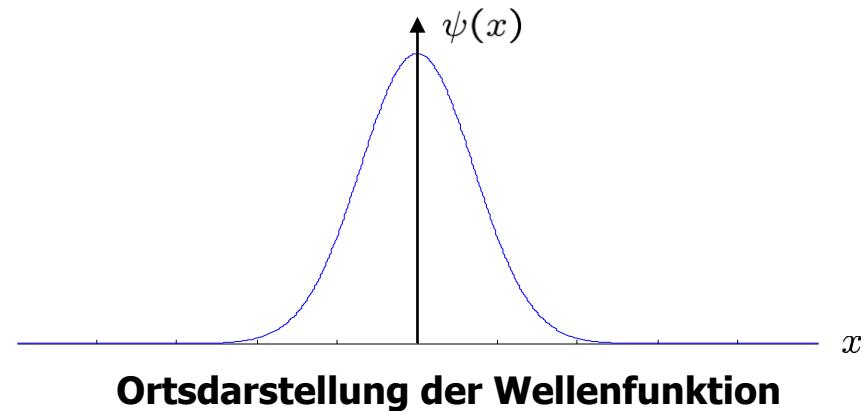
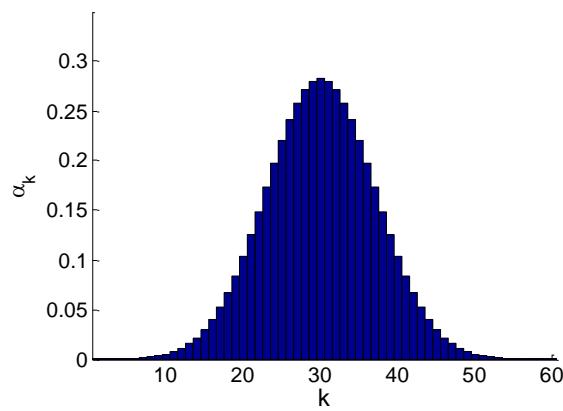
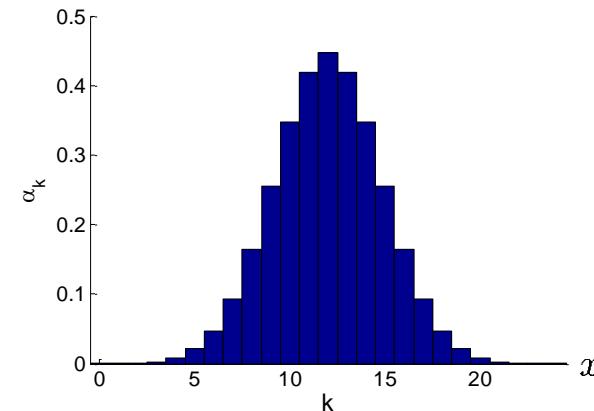
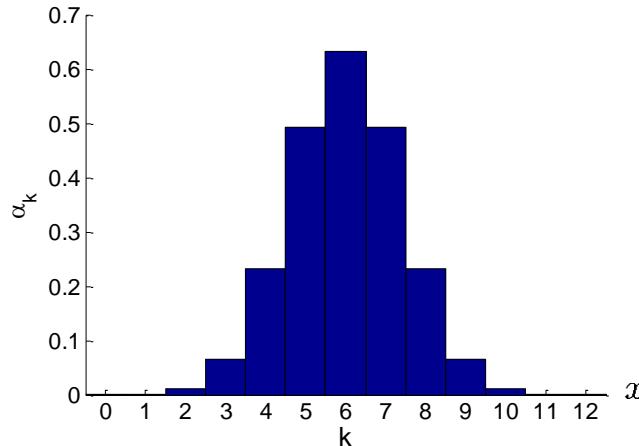


$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k|x\rangle = (\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle + \alpha_2|2\rangle + \dots + \alpha_{d-1}|d-1\rangle)$$

weiterhin: Überlagerungen von Basiszuständen erlaubt





Wahrscheinlichkeit, Teilchen im Intervall Δx zu finden: $|\alpha_k|^2$.

Verhalten: wie Welle -> Interferenz
Messung: Lokalisierung