Die skalare Multiplikation von Vektoren als äußeres Produkt

Martin Erik Horn

IU – Internationale Hochschule, Campus Berlin
ISM – International School of Management, Campus Berlin
m.horn@iubh.de – martin.horn@dozent.ism.de

Kurzfassung

Die skalare Multiplikation von Vektoren ist ein äußeres Produkt, denn das innere Produkt eines Skalars und eines Vektors ist immer Null.

Und das gilt auch für die skalare Multiplikation von Bivektoren, die skalare Multiplikation von Trivektoren oder die skalare Multiplikation anderer höher-dimensionaler k-Vektoren.

1. Geometrische Grundlagen

Die Geometrische Algebra ist einfach. Sie ist außerordentlich einfach[1]. Und sie ist deshalb so außerordentlich einfach, weil geometrische und algebraische Beschreibungen [3] außerordentlich elegant ineinander greifen.

Und diese Beziehungen zwischen geometrischen und algebraischen Eigenschaften mathematischer Objekte soll im folgenden am Beispiel der Multiplikation veranschaulicht und dargestellt werden.

Starten wir mit dem Produkt zweier Vektoren, am besten anhand eines Beispiels: Der erste Vektor **a** weist fünf Einheitsschritte in x-Richtung σ_x und zwei Einheitsschritte in y-Richtung σ_y auf. Und der zweite Vektor **b** weist drei Schritte in x-Richtung σ_x und acht Einheitsschritte in y-Richtung σ_y

$$\mathbf{a} = 5\,\sigma_x + 2\,\sigma_y \qquad \mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 8\,\sigma_x \tag{1}$$

auf. Das Produkt dieser beiden Vektoren ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\,\mathbf{b} &= (5\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\,(3\,\sigma_x + 8\,\sigma_y)\\ &= 15 + 16 + (40 - 6)\,\sigma_x\sigma_y\\ &= 31 + 34\,\sigma_x\sigma_y\end{aligned} \tag{2}$$

Dieses geometrische Produkt besitzt somit zwei Bestandteile: Zum einen haben wir das innere Produkt als skalaren Anteil:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 31 \tag{3}$$

Die beiden Vektoren als eindimensionale Gebilde reduzieren dabei ihre Dimension und ergeben eine dimensionslose, skalare Größe.

Und zum anderen haben wir das äußere Produkt, das den bivektoriellen Anteil beschreibt:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 34\,\sigma_x\sigma_y \tag{4}$$

Die beiden Vektoren erhöhen hier zusammen ihre Dimension, so dass eine zweidimensionale, flächenhafte Größe, der Bivektor 34 $\sigma_x\sigma_y$, entsteht.

Und wir ziehen ein erstes, einfaches Fazit: **Durch die innere Multiplikation mit einem Vektor reduziert sich die Dimension eines mathematischen Objekts um eins**, wobei in diesem Beispiel zwei Sichtweisen erlaubt sind: Das mathematische Objekt **a** wird mit dem Vektor **b** durch eine innere Multiplikation verknüpft, so dass das eindimensionale Objekt **a** in das dimensionslose Objekt $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ überführt wird. Oder aber: Das mathematische Objekt **b** wird linksseitig mit dem Vektor **a** durch eine innere Multiplikation verknüpft, so dass das eindimensionale Objekt **b** in das dimensionslose Objekt $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ überführt wird.

Und der zweite Teil des Fazits lautet: **Durch die äußere Multiplikation mit einem Vektor erhöht sich die Dimension eines mathematischen Objekts um eins**, wobei in diesem Beispiel wieder zwei Sichtweisen erlaubt sind: Das mathematische Objekt **a** wird durch eine äußere Multiplikation rechtsseitig mit dem Vektor **b** verknüpft, so dass das eindimensionale Objekt **a** in das zweidimensionale Objekt $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ überführt wird. Oder aber: Das mathematische Objekt **b** wird durch eine äußere Multiplikation linksseitig mit dem Vektor **a** verknüpft, so dass das eindimensionale Objekt **b** in das zweidimensionale Objekt $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ überführt wird.

Und diese beiden Beobachtungen nutzen wir zur recht simplen geometrischen Definition der unterschiedlichen Anteile eines geometrischen Produkts:

Das äußere Produkt eines mathematischen Objekts der Dimension n mit einem Vektor erhöht die Dimension des mathematischen Objekts auf n + 1.

Das innere Produkt eines mathematischen Objekts der Dimension n mit einem Vektor reduziert die Dimension des mathematischen Objekts auf n – 1.

[1] „Much of Clifford algebra is quite simple“ [1] bzw. „Much of Clifford algebra is quite simple minded.“ [2]

Und eigentlich sind das erst einmal Beschreibungen aus dem geometrischen Darstellungsfeld, also Dinge, die wir uns graphisch anschaulich vorstellen und auch (da höchstens zweidimensional) auf einem Blatt Papier zeichnen können. Anstelle der Rechnung {2}, die wir ja erst im Abschnitt 2 richtig verstehen, erhalten wir die Multiplikation

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 31 + 36\,\sigma_x\sigma_y \qquad \{5\}$$

in der realen Welt Einsteins im Sinne seiner „praktischen Geometrie“ [4] schlicht durch Messung des Winkels und der Vektorlängen (inneres Produkt: $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\alpha = 31$) und durch Messung des Flächeninhalts (äußeres Produkt: 36 Einheits-Flächenstücke in der xy-Ebene).

Diesen gemessenen geometrischen Größen in Form dimensionsloser Objekte (nulldimensionale Punkte bzw. Skalare), eindimensionaler Objekte (orientierte Streckenelemente bzw. Vektoren) und zweidimensionaler Objekte (orientierte Flächenstücke bzw. Bivektoren) werden nun im folgenden Abschnitt algebraische Beschreibungen zur Seite gestellt.

2. Algebraische Grundlagen

Also fassen wir nun das ganze geometrische Zeugs algebraisch abstrakt. Der zentrale Kern dieser algebraischen Sichtweise wird durch die Vertauschungseigenschaften beschrieben: Senkrecht zueinander stehende Vektoren (also insbesondere auch Basisvektoren) sind anti-kommutativ. Wird die Multiplikationsreihenfolge vertauscht, tritt ein zusätzliches Minuszeichen auf:

$$\sigma_i\sigma_j = \begin{cases} -\sigma_j\sigma_i & \text{für } i \neq j \qquad \{5a\} \\ 1 & \text{für } i = j \qquad \{5b\} \end{cases}$$

Damit ist klar, was in Gl. {2} passierte

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\,\mathbf{b} &= 15\,\sigma_x^2 + 16\,\sigma_y^2 + 40\,\sigma_x\sigma_y + 6\,\sigma_y\sigma_x \\ &= 31 + 34\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned} \qquad \{6\}$$

und was bei Reversion (also der Reihenfolgenumkehr von Faktoren) passieren wird:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}\,\mathbf{a} &= 15\,\sigma_x^2 + 16\,\sigma_y^2 + 40\,\sigma_y\sigma_x + 6\,\sigma_x\sigma_y \\ &= 31 - 34\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned} \qquad \{7\}$$

Solches geometrisches Zeugs wie die Orthogonalität wird jetzt durch den algebraischen Krempel der Anti-Kommutativität ausgedrückt. Dies lesen wir aus der oberen Teilgleichung {5a}. Und die untere Teilgleichung {5b} sagt uns, dass solches geometrisches Zeugs wie die Parallelität durch den algebraischen Krempel der Kommutativität ausgedrückt wird, wenn wir Vektoren betrachten.

Schnurstracks führt dies dann zur Symmetrie der unterschiedlichen Produkte. Das innere Produkt ist symmetrisch, da es sich durch Addition von {6} und {7} bildet:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathbf{a}) = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a} \qquad \{8\}$$

Und das äußere Produkt ist anti-symmetrisch, da die Subtraktion von {6} und {7} zu einer Vorzeichenumkehr bei einer Reihenfolgenumkehr führt:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\mathbf{a}) = -\,\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \qquad \{9\}$$

Wir haben für Vektoren also eine überzeugende Verknüpfung von Geometrie und Algebra gefunden.

Parallelität:

Inneres Produkt $\Leftrightarrow$ Kommutativität

Orthogonalität:

Äußeres Produkt $\Leftrightarrow$ Anti-Kommutativität

Das geometrische Zeugs und der algebraische Krempel passen perfekt zusammen. Doch Pustekuchen! Das naive Fazit blendet: Die innere Multiplikation ist symmetrisch, die äußere Multiplikation ist anti-symmetrisch. Leider ist das nur die halbe Wahrheit, wie die Analyse höher-dimensionaler Objekte zeigen wird.

3. Multiplikation von Vektoren und Bivektoren

Wieder erst ein Beispiel: Jetzt starten wir mit dem Produkt des Vektors **a** {1} und eines Bivektors **B**, der beispielsweise eine orientierte Fläche in der yz-Ebene repräsentiert, die die Größe von zehn Einheits-Flächenelementen $\sigma_y\sigma_z$ aufweisen soll:

$$\mathbf{a} = 5\,\sigma_x + 2\,\sigma_y \qquad \mathbf{B} = 10\,\sigma_y\sigma_z \qquad \{10\}$$

Das Produkt dieser beiden geometrischen Größen ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\,\mathbf{B} &= (5\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\,10\,\sigma_y\sigma_z \\ &= 50\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 20\,\sigma_y\sigma_y\sigma_z \\ &= 20\,\sigma_z + 50\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z \end{aligned} \qquad \{11\}$$

Auch hier finden wir wieder zwei Anteile: Der erste Anteil, das dimensionsreduzierende innere Produkt ist nun ein Vektor

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{B} = 20\,\sigma_z \qquad \{12\}$$

während das dimensionserhöhende äußere Produkt nun ein Trivektor und damit ein orientiertes Volumenelement darstellt:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{B} = 50\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z \qquad \{13\}$$

Die Vertauschung der Multiplikationsreihenfolge zeigt allerdings ein gänzlich anderes Symmetrieverhalten:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\,\mathbf{a} &= 50\,\sigma_y\sigma_z\sigma_x + 20\,\sigma_y\sigma_z\sigma_y \\ &= -\,20\,\sigma_z + 50\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z \end{aligned} \qquad \{14\}$$

Nun ist das innere Produkt anti-kommutativ

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{B} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\mathbf{a}) = -\,\mathbf{B} \bullet \mathbf{a} \qquad \{15\}$$

und das äußere Produkt ist kommutativ:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{B} + \mathbf{B}\,\mathbf{a}) = \mathbf{B} \wedge \mathbf{a} \qquad \{16\}$$

Auch für Produkte aus Vektoren und Bivektoren findet sich eine sehr überzeugende Verknüpfung von Geometrie und Algebra.

Parallelität:

Inneres Produkt $\Leftrightarrow$ Anti-Kommutativität

Orthogonalität:

Äußeres Produkt $\Leftrightarrow$ Kommutativität

Die Mathematik ist gemein zu uns!

Denken wir in geometrischen Strukturen (so Zeugs wie Dimensionserhöhungen, etc.), dann erhalten wir ein anderes Ordnungsmuster als wenn wir in algebraischen Strukturen denken (also solchen Krempel wie die Vertauschung von Faktoren, etc.). Je nachdem, ob wir unsere Welt anhand von Dimensionsänderungen sortieren oder anhand von Vertauschungsbeziehungen, erhalten wir eine unterschiedliche mathematische Kategorisierung unserer Welt und der sie beschreibenden Gesetzmäßigkeiten. Das setzt sich fort bei der Analyse der Produkte mathematischer Objekte, die eine noch höhere Dimension aufweisen.

4. Höherdimensionale Multiplikationen

Ein Vektor $\mathbf{a}_\perp$ der senkrecht zu einem fünfdimensionalen, orientierten Hypervolumenelement, einem Pentavektor **P**, steht, wird bei der Multiplikation mit diesem Pentavektor antikommutativ vertauschen, genauso wie der Multiplikation **mit anderen ungeradzahlig dimensionierten Objekten** (z.B. Vektoren oder Trivektoren, sofern diese senkrecht stehen). Für diesen Orthogonalteil und das so gebildete äußere Produkt muss somit

$$\mathbf{a}_\perp\, \mathbf{P} = \mathbf{a}_\perp \wedge \mathbf{P} = -\,\mathbf{P} \wedge \mathbf{a}_\perp = -\,\mathbf{P}\, \mathbf{a}_\perp \qquad \{17\}$$

erfüllt sein (weil der senkrecht stehende Vektor $\mathbf{a}_\perp$ ungeradzahlig oft – nämlich hier fünf mal – mit senkrecht zu ihm stehenden Vektoren vertauscht werden muss). Und für den Parallelteil und das entsprechend gebildete innere Produkt

$$\mathbf{a}_\parallel\, \mathbf{P} = \mathbf{a}_\parallel \bullet \mathbf{P} = \mathbf{P} \bullet \mathbf{a}_\parallel = \mathbf{P}\, \mathbf{a}_\parallel \qquad \{18\}$$

ergibt sich eine kommutatives Vertauschung.

Und bei der Multiplikation eines Vektors **mit einem geradzahlig dimensionierten Objekt**, auf dem dieser Vektor senkrecht steht (also beispielsweise einem Quadvektor **Q**), verhält es sich genau umgekehrt:

$$\mathbf{a}_\perp\, \mathbf{Q} = \mathbf{a}_\perp \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \wedge \mathbf{a}_\perp = \mathbf{Q}\, \mathbf{a}_\perp \qquad \{19\}$$

$$\mathbf{a}_\parallel\, \mathbf{Q} = \mathbf{a}_\parallel \bullet \mathbf{Q} = -\,\mathbf{Q} \bullet \mathbf{a}_\parallel = -\,\mathbf{Q}\, \mathbf{a}_\parallel \qquad \{20\}$$

Das äußere Produkt ist jetzt kommutativ, während sich das innere Produkt als anti-kommutativ erweist.

Innere Produkte	Äußere Produkte
(Vektor) • (Pentavektor) = (Quadvektor) $\mathbf{a} \bullet \mathbf{P} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{P} + \mathbf{P}\,\mathbf{a}) = \mathbf{P} \bullet \mathbf{a}$ **Kommutativität**	(Vektor) ∧ (Pentavektor) = (Hexavektor) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{P} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{P} - \mathbf{P}\,\mathbf{a}) = -\,\mathbf{P} \wedge \mathbf{a}$ **Anti-Kommutativität**
(Vektor) • (Quadvektor) = (Trivektor) $\mathbf{a} \bullet \mathbf{Q} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\,\mathbf{a}) = -\,\mathbf{Q} \bullet \mathbf{a}$ **Anti-Kommutativität**	(Vektor) ∧ (Quadvektor) = (Pentavektor) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{Q} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\,\mathbf{a}) = \mathbf{Q} \wedge \mathbf{a}$ **Kommutativität**
(Vektor) • (Trivektor) = (Bivektor) $\mathbf{a} \bullet \mathbf{T} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{T} + \mathbf{T}\,\mathbf{a}) = \mathbf{T} \bullet \mathbf{a}$ **Kommutativität**	(Vektor) ∧ (Trivektor) = (Quadvektor) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{T} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{T} - \mathbf{T}\,\mathbf{a}) = -\,\mathbf{T} \wedge \mathbf{a}$ **Anti-Kommutativität**
(Vektor) • (Bivektor) = (Vektor) $\mathbf{a} \bullet \mathbf{B} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\mathbf{a}) = -\,\mathbf{B} \bullet \mathbf{a}$ **Anti-Kommutativität**	(Vektor) ∧ (Bivektor) = (Trivektor) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{B} + \mathbf{B}\,\mathbf{a}) = \mathbf{B} \wedge \mathbf{a}$ **Kommutativität**
(Vektor) • (Vektor) = (Skalar) $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathbf{a}) = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a}$ **Kommutativität**	(Vektor) ∧ (Vektor) = (Bivektor) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\mathbf{a}) = -\,\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ **Anti-Kommutativität**
(Vektor) • (Skalar) = 0 $\mathbf{a} \bullet \mathrm{k} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathrm{k} - \mathrm{k}\,\mathbf{a}) = -\,\mathrm{k} \bullet \mathbf{a} = \mathbf{0}$ **Anti-Kommutativität**	(Vektor) ∧ (Skalar) = (Vektor) $\mathbf{a}\,\mathrm{k} = \mathbf{a} \wedge \mathrm{k} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathrm{k} + \mathrm{k}\,\mathbf{a}) = \mathrm{k} \wedge \mathbf{a} = \mathrm{k}\,\mathbf{a}$ **Kommutativität**

5. Schlussfolgerung

Kommutativität und Anti-Kommutativität wechseln somit alternierend, wie die auf der vorangegangenen Seite abgedruckte Übersicht zeigt. Das äußere Produkt zweier Vektoren ist anti-kommutativ. Also ist das äußere Produkt eine Stufe tiefer zwischen Vektor und Skalar kommutativ – was ja auch logisch erscheint:

Die Multiplikation eines Vektors und eines Skalars führt zum einen zu keiner Vorzeichenänderung, wenn die Multiplikationsreihenfolge der beiden Faktoren vertauscht wird. Zum anderen muss es sich dabei um eine äußere Multiplikation handeln, denn die Multiplikation des Skalars mit einem Vektor erhöht die Dimension des Skalars von Null auf die Dimension eins, da das Multiplikationsergebnis ein Vektor sein wird.

Und das passiert ja auch bei der Multiplikation eines Bivektors (oder eines Trivektors oder eines noch höher-dimensionalen k-Vektors) mit einem Skalar: Diese Multiplikation ist kommutativ und sie erhöht die Dimension des Skalars von Null auf die Dimension zwei (oder drei oder k). Auch diese äußeren Produkte sind kommutativ.

6. Bivektoren sind langweilig

Da so schön und gleichzeitig so schön fad aussieht, wird im folgenden auch die Übersicht für die Bivektor-Multiplikationen gezeigt. Hier sind jetzt drei Fälle zu unterscheiden,

Dimensionsreduktion um zwei ⇔ Inneres Produkt

Keine Dimensionsänderung ⇔ Mittleres Produkt

Dimensionserhöhung um zwei ⇔ Äußere Produkt

wobei das mittlere Produkt manchmal auch – so wie in [5, S. 44] – als Kommutator-Produkt bezeichnet wird (weil's halt verschwindet, wenn die beiden Bivektoren kommutieren).

Und jetzt wird auch klar, warum Quaternionen so hochgradig langweilig sind (… äußerst langweilig zumindest im Vergleich mit der Geometrischen Algebra). Sie zeigen nämlich nur einen kleinen Teil des großen, ganzen Bildes, das Grassmann entworfen hat.

Quaternionen sind in der Geometrischen Algebra Grassmanns enthalten [6, S. 257], [7, Abschnitt 1.4]. Sie bleiben übrig, wenn man alles Ungeradzahlige, also Dreiviertel der Geometrischen Algebra, wegstreicht oder blind ignoriert.

Innere Produkte	**Mittlere Produkte**	**Äußere Produkte**
(Bivektor) • (Pentavektor) = (Trivektor) $\mathbf{B} \bullet \mathbf{P} = \mathbf{P} \bullet \mathbf{B}$ **Kommutativität**	(Bivektor) **x** (Pentavektor) = (Pentavektor) $\mathbf{B} \times \mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\,\mathbf{P} - \mathbf{P}\,\mathbf{B}) = -\,\mathbf{P} \times \mathbf{B}$ **Anti-Kommutativität**	(Bivektor) ∧ (Pentavektor) = (Septavektor) $\mathbf{B} \wedge \mathbf{P} = \mathbf{P} \wedge \mathbf{B}$ **Kommutativität**
(Bivektor) • (Quadvektor) = (Bivektor) $\mathbf{B} \bullet \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \bullet \mathbf{B}$ **Kommutativität**	(Bivektor) **x** (Quadvektor) = (Quadvektor) $\mathbf{B} \times \mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\,\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\,\mathbf{B}) = -\,\mathbf{Q} \times \mathbf{B}$ **Anti-Kommutativität**	(Bivektor) ∧ (Quadvektor) = (Hexavektor) $\mathbf{B} \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \wedge \mathbf{B}$ **Kommutativität**
(Bivektor) • (Trivektor) = (Vektor) $\mathbf{B} \bullet \mathbf{T} = \mathbf{T} \bullet \mathbf{B}$ **Kommutativität**	(Bivektor) **x** (Trivektor) = (Trivektor) $\mathbf{B} \times \mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\,\mathbf{T} - \mathbf{T}\,\mathbf{B}) = -\,\mathbf{T} \times \mathbf{B}$ **Anti-Kommutativität**	(Bivektor) ∧ (Trivektor) = (Pentavektor) $\mathbf{B} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{B}$ **Kommutativität**
(Bivektor) • (Bivektor) = (Skalar) $\mathbf{B} \bullet \mathbf{A} = \mathbf{A} \bullet \mathbf{B}$ **Kommutativität**	(Bivektor) **x** (Bivektor) = (Bivektor) $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\,\mathbf{A} - \mathbf{A}\,\mathbf{B}) = -\,\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ **Anti-Kommutativität**	(Bivektor) ∧ (Bivektor) = (Quadvektor) $\mathbf{B} \wedge \mathbf{A} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ **Kommutativität**
(Bivektor) • (Vektor) = 0 $\mathbf{B} \bullet \mathbf{a} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{0}$ **Kommutativität**	(Bivektor) **x** (Vektor) = (Vektor) $\mathbf{B} \times \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\,\mathbf{a} - \mathbf{a}\,\mathbf{B}) = -\,\mathbf{a} \times \mathbf{B}$ **Anti-Kommutativität**	(Bivektor) ∧ (Vektor) = (Trivektor) $\mathbf{B} \wedge \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\,\mathbf{a} + \mathbf{a}\,\mathbf{B}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{B}$ **Kommutativität**
(Bivektor) • (Skalar) = 0 $\mathbf{B} \bullet \mathrm{k} = \mathrm{k} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{0}$ **Kommutativität**	(Bivektor) **x** (Skalar) = (Skalar) = 0 $\mathbf{B} \times \mathrm{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\,\mathrm{k} - \mathrm{k}\,\mathbf{B}) = -\,\mathrm{k} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ **Anti-Kommutativität**	(Bivektor) ∧ (Skalar) = (Bivektor) $\mathbf{B} \wedge \mathrm{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\,\mathrm{k} + \mathrm{k}\,\mathbf{B}) = \mathrm{k} \wedge \mathbf{B}$ **Kommutativität**

Und wenn man halt nur quaternionenartige, also geradzahlige Algebren betrachtet, ergeben sich auch keine Probleme mehr mit einem alternierenden Symmetrieverhalten. Man hat es ja schlicht mit weggestrichen.

7. Literatur

[1] Lounesto, Pertti (1998): Book Review – Clifford Algebra: A Computational Tool for Physicists. In: Foundations of Physics, Vol. 28, No. 6, S. 1021.

[2] Snygg, John (1997): Clifford Algebra. A Computational Tool for Physicists. Oxford University Press, New York, Oxford.

[3] Parra Serra, Josep Manel (2009): Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. In: Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 19, No. 3/4, S. 819-834.

[4] Einstein, Albert (1921): Geometrie und Erfahrung. Erweiterte Fassung des Festvortrages gehalten an der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 27. Januar 1921. Verlag von Julius Springer, Berlin.

[5] Hestenes, David (2002): New Foundations for Classical Mechanics. 2nd ed., Kluwer Academic Publishers, New York, Boston, Dordrecht.

[6] Agarwal, Ravi P.; Sen, Syamal K. (2014): Creators of Mathematical and Computational Sciences. Springer International Publishing, Cham, Switzerland.

[7] Doran, Chris; Lasenby Anthony (2003): Geometric Algebra for Physicists. Cambridge University Press, Cambridge.