Ergänzungsfolien 01: Matrizenrechnung für doofe Computer

Mathematik 1 des Bachelor-Studiengangs Ingenieurinformatik der HTW Berlin

Corona-Semester Sommer 2020

– Dr. M. Horn –

Hallo !

Hallo!

In den Corona-Vorlesungsfolien 15 hatte ich Ihnen den Screenshot des einführenden Motto-Spruchs zu Kapitel 12 „Rationale Zahlen im Computer“ des Buches

Edmund Weitz: Konkrete Mathematik (nicht nur) für Informatiker. Mit vielen Grafiken und Algorithmen in Python. Springer Spektrum / Springer Fachmedien, Wiesbaden 2018.

auf S. 111 eingefügt.

Dieser Spruch stammt von Leo Cherne. Ich glaube, das war kein Computerwissenschaftler.

12

Rationale Zahlen im Computer

> Computers are incredibly fast, accurate, and stupid. Human beings are incredibly slow, inaccurate, and brilliant. Together they are powerful beyond imagination.
>
> Leo Cherne

Wir wollen uns jetzt anschauen, wie Computer typischerweise rationale Zahlen repräsentieren. Wir werden dazu verschiedene Modelle diskutieren, wie man es machen könnte. Nur das letzte (im Folgekapitel) wird der Realität

Leo Cherne

Über den zweiten Satz und die Schlussfolgerung kann man ja streiten. Auf Eigenlob soll ja nicht so viel zu geben sein, Menschen können sehr oft auch sehr un-brilliant sein.

Computers are incredibly fast, accurate, and stupid. Human beings are incredibly slow, inaccurate, and brilliant. Together they are powerful beyond imagination.

Aber der erste Satz stimmt. Computer sind stupide, sie sind doof.

Computer sind doof

Computer sind stupide, doof und unheimlich fleißig. Sie verstehen nur Nullen und Einsen: 0 oder 1. Davon verstehen sie aber eine Menge.

0010110101010101000001111101001011100111 1000101100000010101001000000101011000000101 0110110101111011011010100101010011010101010 1011011010111110111111111000101111111000101 0010000000101001000100100100000010010010101 1010010101010111111000000001000001111001011 0000111001000101001001010010001010100101010 1001010101001000000000000111010000011111010 10011001010101010

Computer sind doof

Computer sind stupide, doof und unheimlich fleißig. Sie verstehen nur Nullen und Einsen: 0 oder 1. Davon verstehen sie aber eine Menge – mit Betonung auf Menge!

Sie machen ja nichts anderes den ganzen lieben langen Tag. Sie verarbeiten jede Mengen binäre Nullen und Einsen:

Sie schieben sie hin und her, von einem Speicherfeld zu einem anderen. Sie können auch recht schnell einfache Operationen durchführen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, nichts Kompliziertes also.

Computer sind doof

Und den Titel dieser Folien „Matrizenrechnung für doofe Computer“ habe ich deshalb gewählt, weil ich die Mathematik der Matrizenrechnung im Folgenden so ausgestalten will, dass es auch ein ganz doofer Computer versteht.

Der Computer soll beispielsweise noch nichts von komplexen Zahlen gehört haben. Der wurde dafür einfach nicht programmiert. Versteht er nicht.

Mein doofer Computer soll überhaupt gar nicht auf einzelne Zahlen stehen, der ist halt ganz super-doof.

Mein Computer ist super-doof

Mein doofer Computer soll überhaupt gar nicht auf einzelne Zahlen stehen, der ist halt ganz super-doof programmiert worden:

Im ersten Teil dieser Folienserie stellen wir uns vorläufig einen Computer vor, der nur für (2 x 2)-Matrizen programmiert wurde. Andere mathematische Objekte kennt er einfach nicht.

Mein Computer ist super-doof

Unser Computer soll nur mit reellen (2 x 2)-Matrizen arbeiten. Er kennt also nur mathematische Objekte der Art:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} sind dabei reelle Zahlen, denn wie gesagt: Andere mathematische Objekte (komplexe Zahlen oder anderes solches Zeugs, selbst wir Menschen wussten Jahrtausende davon nichts – soviel zu Thema Eigenlob bzw. „brilliant“) kennt er einfach nicht. Dafür ist er einfach nicht programmiert.

Mein Computer ist super-doof

Was können wir also mit einem Computer anfangen, der beispielsweise nicht einmal die einzelnen Zahlen 7 oder minus 4 verarbeiten kann?

Die Lösung ist einfach: Wir müssen diese Zahlen so schreiben, dass sie durch (2 x 2)-Matrizen repräsentiert werden.

Unser Computer versteht ja nur die einzelne Zahl 7 oder die einzelne Zahl -4 nicht.

Mein Computer ist super-doof

Unser Computer versteht ja nur die einzelne Zahl 7 oder die einzelne Zahl – 4 nicht.

Er versteht aber die (2 x 2)-Matrizen

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Und diese Diagonal-Matrizen verhalten sich so wie die reellen Zahlen sieben und minus vier.

Mein Computer ist super-doof

Anstelle von

$$7 + (-4) = ?$$

müssen wir halt mit unserem doofen Computer die Rechnung

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = ?$$

durchführen.

Das Ergebnis ist dann:

Mein Computer ist super-doof

Das Ergebnis ist dann

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und wir wissen sofort:

$$\mathbf{7} + (-\,\mathbf{4}) = \mathbf{3}$$

Aber wir haben hier keine normal gedruckten reellen Zahlen 7 + (– 4) = 3, sondern fett gedruckte Symbole als Abkürzungen für …

Skalare

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -\mathbf{2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{2} \quad \text{etc…}$$

Diese Diagonal-Matrizen werden Skalare genannte, denn sie verhalten sich wie ganz normale Zahlen.

Skalare

Skalare sind für unseren doofen Computer also (2 x 2)-Diagonal-Matrizen, mit denen man genau so wie mit den reellen Zahlen rechnen kann.

Weitere Beispiele wären also die Subtraktion:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$$

oder als Abkürzung fett gedruckt $\mathbf{7} - (-\,\mathbf{4}) = \mathbf{11}$

an Stelle von normal gedruckten $7 - (-\,4) = 11$

Skalare

Skalare sind für unseren doofen Computer also (2 x 2)-Diagonal-Matrizen, mit denen man genau so wie mit den reellen Zahlen rechnen kann.

Weitere Beispiele wären also die Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & 0 \\ 0 & -28 \end{pmatrix}$$

oder als Abkürzung fett gedruckt $\mathbf{7}\,(-\,\mathbf{4}) = -\,\mathbf{28}$

an Stelle von normal gedruckten $7\,(-\,4) = -\,28$

Diese Multiplikation hat der Computer natürlich mit dem

Skalare

Diese Multiplikation hat der Computer natürlich mit dem Falkschen Schema ausgerechnet. Denn

		– 4	0
		0	– 4
7	0	– 28	0
0	7	0	– 28

ergibt wie erwartet:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & 0 \\ 0 & -28 \end{pmatrix}$$

Skalare

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -\mathbf{2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \quad \leftarrow \quad \text{Einheitsmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{2} \quad \text{etc…}$$

Unter den Skalaren hat die Einheitsmatrix übrigens eine herausragende Rolle. Ihr Quadrat ergibt nämlich wieder die Einheitsmatrix **1**.

Skalare

Die Einheitsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

kann deshalb als ein Basiselement für die (2 x 2)-Matrizen, die unser Computer verarbeiten kann, angesehen werden. Weil

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

gilt, wird die Einheitsmatrix auch „Einheitsskalar“ genannt.

Skalare

Die Einheitsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

kann deshalb als ein Basiselement für die (2 x 2)-Matrizen, die unser Computer verarbeiten kann, angesehen werden. Weil

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

gilt, wird die Einheitsmatrix auch „Einheitsskalar“ genannt, denn sie hat einen Betrag von 1.

Weitere Basiselemente

Die Mathematiker haben nun weitere Basiselemente der (2 x 2)-Matrizen gesucht, die ebenfalls als Quadrat das Einheitsskalar **1** ergeben.

Das erste weitere Basiselement war ganz leicht zu finden. Es musste nur ein Minuszeichen in das Einheits-skalar reingeschummelt werden, so dass es sich beim Quadrieren weghebt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

Weitere Basiselemente

Die (2 x 2)-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1}$$

quadriert ebenfalls zu **1** und stellt deshalb ein weiteres Basiselement der (2 x 2)-Matrizen dar.

Das ist auch sinnvoll, denn zusammen mit der Einheitsmatrix **1** können dann beliebige Diagonal-Matrizen gebildet werden.

Weitere Basiselemente

Beliebige Diagonal-Matrizen lassen sich so als Linearkombinationen der Basiselemente **1** und $\mathbf{e_1}$ darstellen.

Beispielsweise lässt sich die Matrix $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ folgendermaßen in die Basiselemente $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$

und $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1}$

zerlegen:

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \dots$$

(siehe folgende Seite)

Zerlegung einer beliebigen Diagonal-Matrix

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{7} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{7}\,(\mathbf{1}) + \mathbf{2}\,\mathbf{e_1}$$

Die Diagonal-Matrix $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ entspricht somit dem Siebenfachen der Einheitsmatrix plus dem Doppelten des Basiselements $\mathbf{e_1}$.

Kein Multiplikationszeichen trotz Multiplikation!

Da es verschiedene Multiplikationsarten gibt und dies für Mathematikerinnen und Mathematiker recht verwirrend ist, haben sich die Mathematiker entschieden, bei den beiden Matrizenmultiplikationen **7** mal **1** und **2** mal $\mathbf{e_1}$ in der Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{7}\ (\mathbf{1}) + \mathbf{2}\ \mathbf{e_1}$$

einfach gar kein Multiplikationszeichen hinzuschreiben. Sie müssen sich das Multiplikationszeichen aber im Kopf natürlich trotzdem immer mitdenken! Und manchmal wird eine zusätzliche Klammer benötigt (beispielsweise um **7** mal **1** von **71** zu unterscheiden.)

Weitere Basiselemente

Nachdem die Sache mit der Hauptdiagonalen geklärt war, haben die Mathematiker die noch fehlenden Basiselemente der (2 x 2)-Matrizen gesucht, mit denen Elemente auf der Nebendiagonalen dargestellt werden können.

Auch das war zuerst ganz einfach, denn wenn die Positionen der Nebendiagonalen mit Werten von Eins

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_2}$$

belegt werden, entsteht ein weiteres Basiselement $\mathbf{e_2}$, dessen Quadrat ebenfalls das Einheitsskalar **1** ergibt.

Weitere Basiselemente

Wenn die Positionen der Nebendiagonalen mit Werten von Eins

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_2}$$

belegt werden, entsteht ein weiteres Basiselement $\mathbf{e_2}$, dessen Quadrat ebenfalls das Einheitsskalar **1** ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

Weitere Basiselemente

Wenn die Positionen der Nebendiagonalen mit Werten von Eins

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_2}$$

belegt werden, entsteht ein weiteres Basiselement $\mathbf{e_2}$, dessen Quadrat ebenfalls das Einheitsskalar **1** ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

Und dann kam die Katastrophe!

Die Katastrophe

Zum Schluss haben die Mathematikerinnen und Mathematiker noch das letzte Basiselement gesucht, das ebenfalls zum Einheitsskalar **1** quadrieren sollte.

Und sie haben gesucht und gesucht und gesucht und sich gewundert und gesucht und weitergesucht und geschimpft und gesucht und lauter geschimpft „Das gibt‘s doch nicht!“ und gezetert „Doch das muss es geben!“ und gezankt „Nein, das gibt es nicht!“ und gesucht und noch mehr gesucht und gesucht und gesucht…

…und gesucht…und gesucht…und und und gesucht …

Die Katastrophe

Nein, die Mathematiker haben kein weiteres Basiselement $\mathbf{e_3}$ gefunden, für das gilt: $\mathbf{e_3}^2 = \mathbf{1}$

Ganz wichtiges Zwischenergebnis

$\mathbf{e_3}^2 = \mathbf{1}$ gibt es nicht! (Falls nur reelle Zahlen in der (2 x 2)-Matrix zugelassen sind.)

Das letzte Basiselement, das die Mathematiker finden wollten, muss ja folgendermaßen aussehen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Und dieses Basiselement quadriert nicht zu + $\mathbf{1}$.

Die Katastrophe

Und dieses Basiselement quadriert nicht zu + **1**.

Das letzte Basiselement $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist ganz anderes. Es quadriert zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{1}$$

Es ist imaginär!

Das letzte Basiselement quadriert zu einem negativen Einheitsskalar – **1**. Größen, deren Quadrate negativ sind, werden imaginär genannt.

Not this name, please!

Dieses letzte Basiselement $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ bekommt auch gar keinen neuen Namen. Es wird nicht als $\mathbf{e_3}$ bezeichnet, denn es gilt:

$$\mathbf{e_1}\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Das kann man mit Hilfe des Falkschen Schemas auch schnell noch einmal hinschreiben:

(siehe folgende Folie)

No new name, please!

Das kann man mit Hilfe des Falkschen Schemas auch schnell noch einmal hinschreiben:

$$
\begin{array}{cc|cc}
 & & 0 & 1 \\
 & & 1 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & -1 & 0
\end{array}
$$

Das letzte Basiselement ist einfach das Produkt $\mathbf{e_1 e_2}$ und heißt auch so:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1 e_2}$$

Zerlegung einer beliebigen Matrix

Mit Hilfe der vier Basiselemente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1 e_2}$$

lässt sich jede beliebige (2 x 2)-Matrix nun als eindeutige Zerlegung darstellen.

Zerlegung einer beliebigen Matrix

Beispielsweise wird die gegebene Matrix

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{+} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{+} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{7}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{+} \mathbf{5}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{7}\,(\mathbf{1}) + \mathbf{2}\,\mathbf{e_1} + \mathbf{5}\,\mathbf{e_2} + \mathbf{3}\,\mathbf{e_1 e_2}$$

Zerlegung einer beliebigen Matrix

Beispielsweise wird die gegebene Matrix

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{7}\ (\mathbf{1}) + \mathbf{2}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{5}\ \mathbf{e_2} + \mathbf{3}\ \mathbf{e_1 e_2}$$

eindeutig als das Siebenfache des Einheitsskalars plus dem Doppelten des Basiselements $\mathbf{e_1}$ plus dem Fünffachen des Basiselements $\mathbf{e_2}$ plus dem Dreifachen des Basiselements $\mathbf{e_1 e_2}$ dargestellt.

Interpretation der Basiselemente

Doch was bedeuten diese vier Basiselemente?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1 e_2}$$

Wie können sie auf eine sinnvolle Art und Weise interpretiert werden?

Interpretation der Basiselemente

Die Interpretation des ersten Basiselements

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

kennen wir schon. Es ist ein Einheitsskalar, der sich ganz genau so wie die reelle Zahl 1 verhält.

Insbesondere ist dieses Einheitsskalar bezüglich der Multiplikation kommutativ. Wenn **A** eine beliebige (2 x 2)-Matrix ist, gilt immer und überall:

$$\mathbf{1\,A = A\,1}$$

Achtung, Multiplikationsschreibweise! (Siehe Folie 26)

Interpretation der Basiselemente

Um die Interpretation der beiden Basiselemente $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_2}$ zu finden, kann auch deren Symmetrieverhalten untersucht werden: Was passiert, wenn diese beiden Basiselemente miteinander multipliziert werden?

Also was ergibt sich bei $\mathbf{e_1 e_2} = ?$

Und was ergibt sich bei $\mathbf{e_2 e_1} = ?$

In Folie 34 hatten wir schon herausgefunden, dass gilt:

$$\mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Interpretation der Basiselemente

Mit Hilfe des Falkschen Schemas lässt sich auch $\mathbf{e_2}\,\mathbf{e_1}$ schnell ermitteln:

$$
\begin{array}{cc|cc}
 & & 1 & 0 \\
 & & 0 & -1 \\
\hline
0 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

Also:

$$\mathbf{e_2}\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Interpretation der Basiselemente

Die Ergebnisse der beiden letzten Folien lassen sich also folgendermaßen zusammenfassen:

$$\mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\,\mathbf{e_2 e_1}$$

Oder kurz und knapp: $\mathbf{e_1 e_2} = -\,\mathbf{e_2 e_1}$

Die beiden Basiselemente $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_2}$ sind **anti-kommutativ**! Bei Vertauschung der Reihenfolge der Faktoren $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_2}$ taucht ein **zusätzliches Minuszeichen** auf.

Schlussfolgerung: Die beiden Basiselemente $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_2}$ verhalten sich wie Vektoren!

Basisvektoren

Da sich die beiden Basiselemente $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_2}$ wie Vektoren verhalten, werden sie als Basisvektoren bezeichnet.

Geometrisch kann man sie sich in einem Koordinaten-system eingezeichnet vorstellen:

Der Basisvektor $\mathbf{e_1}$ zeigt in die x-Richtung und hat die Länge 1 (da ja sein Quadrat den Einheitsskalar **1** ergibt).

Und der Basisvektor $\mathbf{e_2}$ zeigt in die y-Richtung und hat ebenfalls eine Länge von 1 (da sein Quadrat ja ebenfalls den Einheitsskalar **1** ergibt).

Basisvektoren

Die (2 x 2)-Matrix

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{2}\ \mathbf{e_1}$$

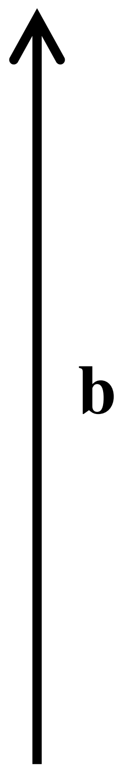
repräsentiert somit einen Vektor in x-Richtung, der eine Länge von 2 Längeneinheiten (LE) aufweist:

a

Nebenbemerkung zur Schreibweise: Vektoren werden üblicherweise durch Kleinbuchstaben bezeichnet.

Basisvektoren

Und die (2 x 2)-Matrix

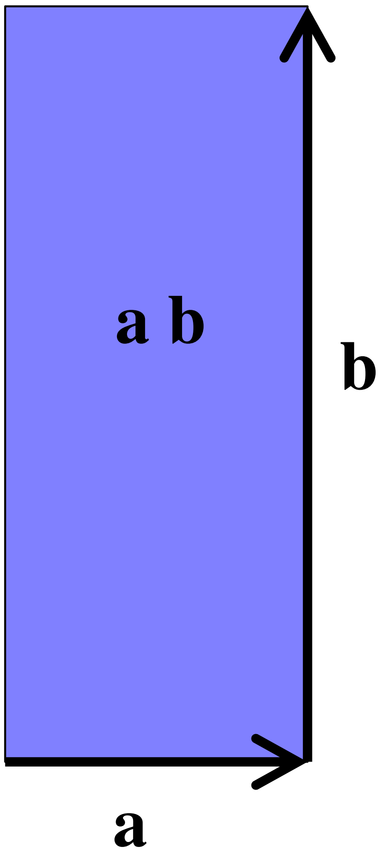


$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_2}$$

repräsentiert einen Vektor in y-Richtung, der eine Länge von 5 LE aufweist.

Basis-Bivektor

Multipliziert man nun die beiden (2 x 2)-Matrizen **a** und **b**



$$\mathbf{a\,b} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$$

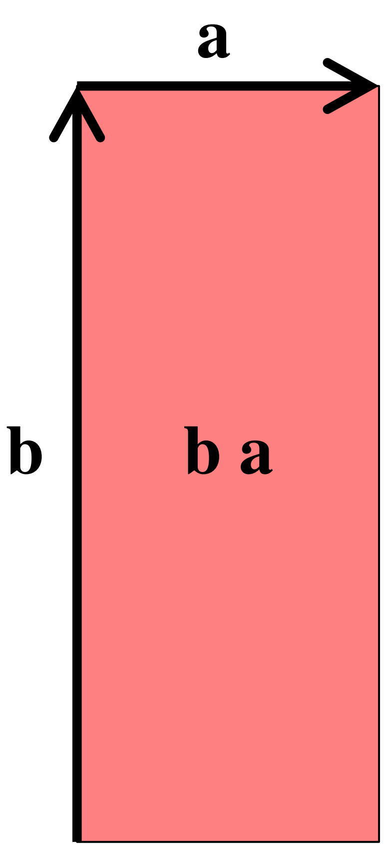
$$= \mathbf{10} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{10\ e_1 e_2}$$

entsteht ein **orientiertes Flächen-stück** mit einem Flächeninhalt von 10 Flächeneinheiten LE^2.

Basis-Bivektor

Und multipliziert man die beiden (2 x 2)-Matrizen **b** und **a** in umgekehrter Reihenfolge



$$\mathbf{b\,a} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

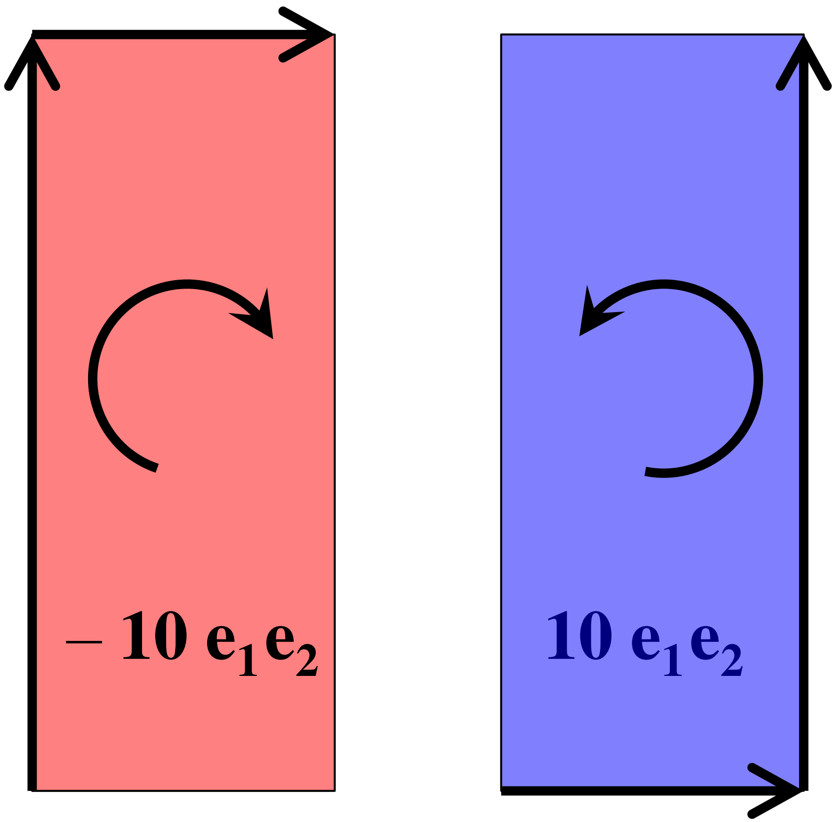
$$= -\,\mathbf{10} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\,\mathbf{10}\ \mathbf{e_1 e_2}$$

entsteht ebenfalls ein **orientiertes Flächenstück** in gleicher Größe.

Basis-Bivektor

Allerdings weisen beide Flächenstücke eine entgegengesetzte Orientierung auf. Deshalb besitzen sie ein unterschiedliches Vorzeichen:



im Uhrzeigersinn (negatives Vorzeichen)

entgegen dem Uhrzeigersinn (positives Vorzeichen)

Basis-Bivektor

Das Produkt der beiden Vektoren **a** und **b**

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{10}\ \mathbf{e_1 e_2}$$

repräsentiert ein entgegen dem Uhrzeigersinn orientiertes Flächenstück der Größe 10 LE^2.

Deshalb repräsentiert das Produkt der beiden Basisvektoren $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_2}$

$$\mathbf{e_1 e_2}$$

eine orientierte Einheitsfläche der Größe 1 LE^2. Dieses Produkt $\mathbf{e_1 e_2}$ ist das letzte Basiselement und wird als Basis-Bivektor bezeichnet.

Basis-Bivektor

Das Produkt der beiden Basisvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$$

stellt das letzte Basiselement dar und wird als Basis-Bivektor bezeichnet.

Die Silbe „Bi“ bedeutet ja „zwei“, denn ein Bivektor ist das Produkt zweier senkrecht zueinander stehender Vektoren.

Und der Basis-Bivektor ist eben das Produkt der beiden senkrecht zueinander stehenden Basisvektoren.

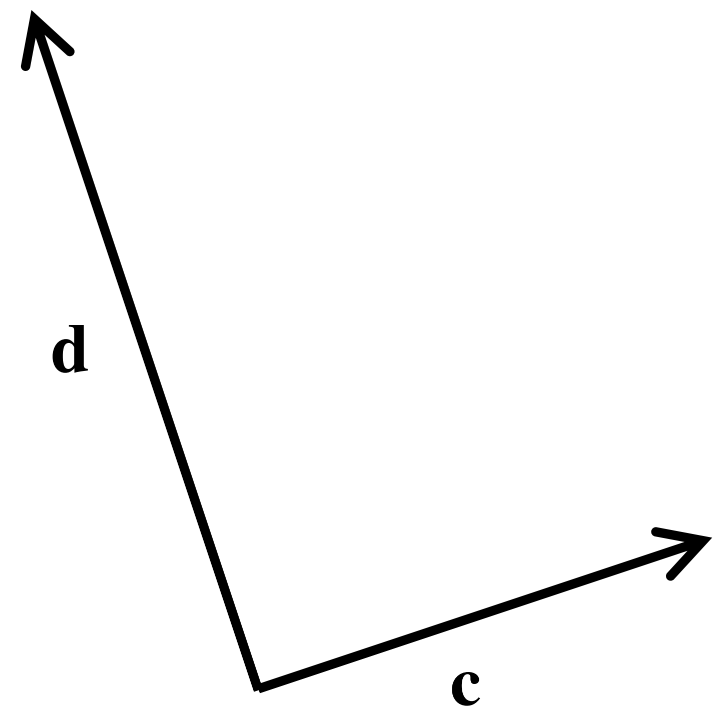
Weiteres Beispiel

Als ein weiteres Beispiel können wir uns das Produkt der beiden Vektoren **c** und **d**

$$\mathbf{c} = \mathbf{6}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{-\,3}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{9}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

ansehen. Auch diese beiden Vektoren stehen senkrecht zueinander.



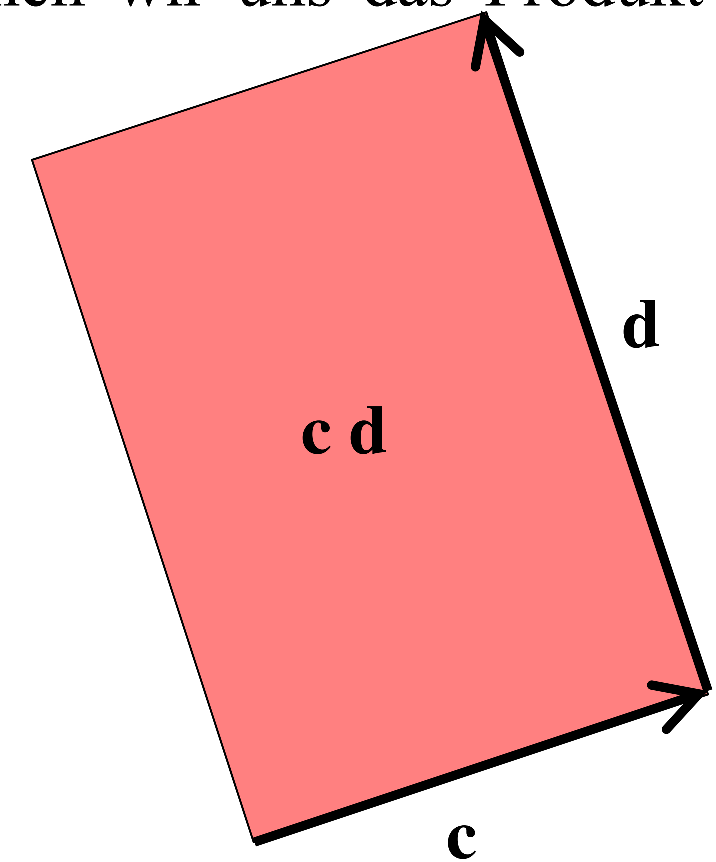
Weiteres Beispiel

Als ein weiteres Beispiel können wir uns das Produkt der beiden Vektoren **c** und **d**

$$\mathbf{c} = \mathbf{6}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d} = -\ \mathbf{3}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{9}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

ansehen. Auch diese beiden Vektoren stehen senkrecht zueinander. Werden sie multipliziert, entsteht also wieder ein Rechteck.



Weiteres Beispiel

Produkt der beiden Vektoren **c** und **d** zuerst im Falkschen Schema:

		-3	9
		9	3
6	2	0	60
2	-6	-60	0

$$\Rightarrow \ \mathbf{c}\,\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 60 \\ -60 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{60\ e_1 e_2}$$

Weiteres Beispiel

Das gleiche Rechenergebnis kann natürlich auch algebraisch mit Hilfe der Anti-Kommutativität ohne direktes Hinschreiben der Matrizen durch

$$\mathbf{c\,d} = (\mathbf{6\,e_1} + \mathbf{2\,e_2}\,)\,(\mathbf{-\,3\,e_1} + \mathbf{9\,e_2})$$

$$= \mathbf{6\,(-\,3)\,e_1^2} + \mathbf{6\,(9)\,e_1e_2} + \mathbf{2\,(-\,3)\,e_2e_1} + \mathbf{2\,(9)\,e_2^2}$$

$$= \mathbf{-\,18\,(1)} + \mathbf{54\,e_1e_2 - 6\,(-\,e_1e_2)} + \mathbf{18\,(1)}$$

$$= \mathbf{-\,18} + \mathbf{18} + \mathbf{(54 + 6)\,e_1e_2}$$

$$= \mathbf{60\,e_1e_2}$$

gefunden werden. Und natürlich sind beide Ergebnisse identisch.

Weiteres Beispiel

Das gleiche Rechenergebnis kann natürlich auch algebraisch mit Hilfe der **Anti-Kommutativität** ohne direktes Hinschreiben der Matrizen durch

$$\mathbf{c\,d} = (\mathbf{6\,e_1} + \mathbf{2\,e_2}\,)\,(\mathbf{-\,3\,e_1} + \mathbf{9\,e_2})$$

$$= \mathbf{6\,(-\,3)\,e_1^{\,2}} + \mathbf{6\,(9)\,e_1e_2} + \mathbf{2\,(-\,3)\,e_2e_1} + \mathbf{2\,(9)\,e_2^{\,2}}$$

$$= \mathbf{-\,18\,(1)} + \mathbf{54\,e_1e_2 - 6\,(-\,e_1e_2)} + \mathbf{18\,(1)}$$

$$= \mathbf{-\,18} + \mathbf{18} + (\mathbf{54 + 6})\,\mathbf{e_1e_2}$$

$$= \mathbf{60\,e_1e_2}$$

gefunden werden. Und natürlich sind beide Ergebnisse identisch.

Ergebnis

Das Produkt der beiden Vektoren

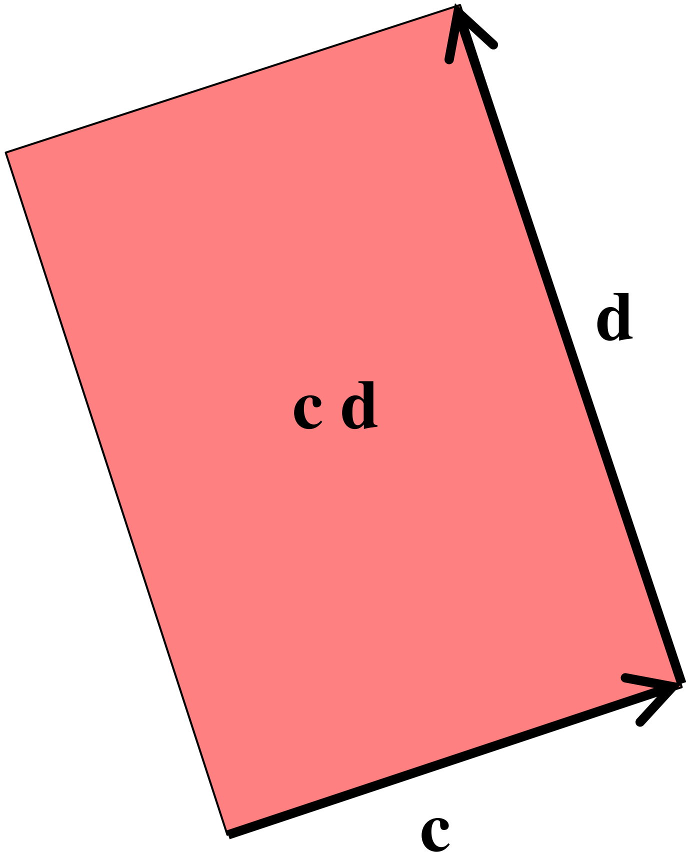
$\mathbf{c} = \mathbf{6}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

$\mathbf{d} = -\ \mathbf{3}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{9}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

ergibt ein orientiertes Rechteck,
das als Bivektor

$\mathbf{c\ d} = \mathbf{60}\ \mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 60 \\ -60 & 0 \end{pmatrix}$

geschrieben werden kann. Es besitzt einen Flächeninhalt von 60 LE^2.



Nächstes Beispiel

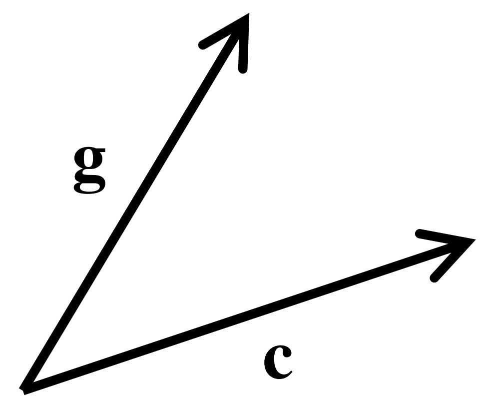
Doch was passiert, wenn zwei Vektoren, die schräg zueinander stehen, miteinander multipliziert werden?

Schauen wir uns beispielsweise das Produkt der beiden Vektoren **c** und **g**

$$\mathbf{c} = \mathbf{6}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{3}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{5}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

an.



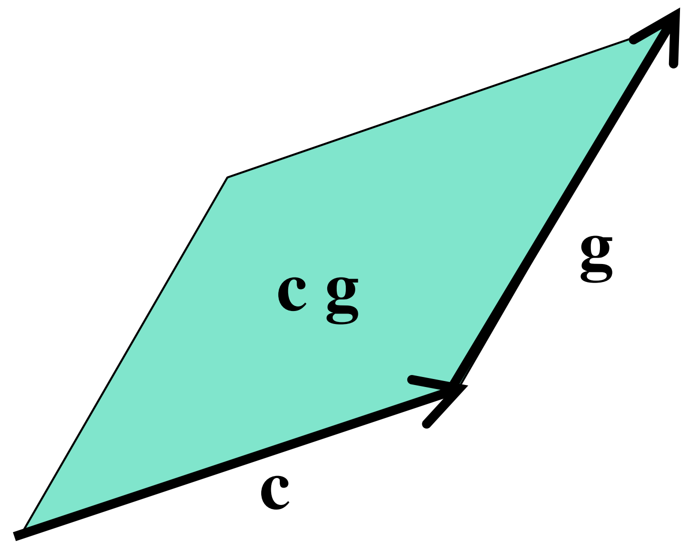
Nächstes Beispiel

Doch was passiert, wenn zwei Vektoren, die schräg zueinander stehen, miteinander multipliziert werden?

Schauen wir uns beispielsweise das Produkt der beiden Vektoren **c** und **g**

$$\mathbf{c} = \mathbf{6}\ \mathbf{e}_1 + \mathbf{2}\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{3}\ \mathbf{e}_1 + \mathbf{5}\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$



an. Werden sie multipliziert, entsteht kein Rechteck mehr, …

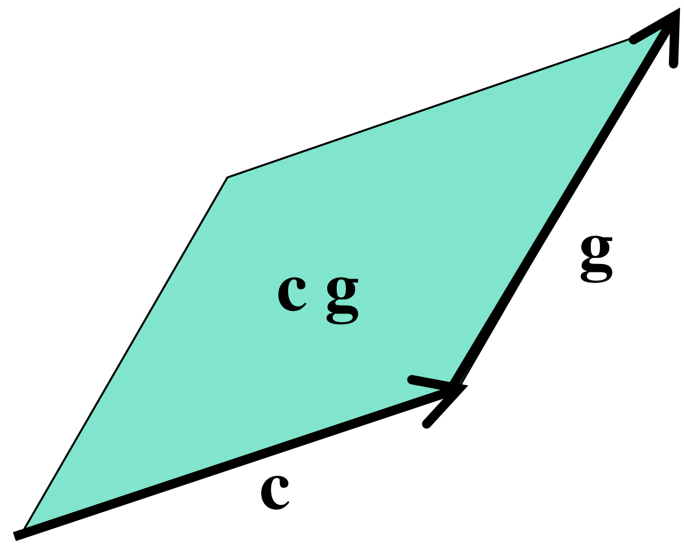
Nächstes Beispiel

Doch was passiert, wenn zwei Vektoren, die schräg zueinander stehen, miteinander multipliziert werden?

Schauen wir uns beispielsweise das Produkt der beiden Vektoren **c** und **g**

$$\mathbf{c} = \mathbf{6}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{3}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{5}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$



an. Werden sie multipliziert, entsteht kein Rechteck mehr, sondern ein Parallelogramm.

Nächstes Beispiel

Hier das Produkt der beiden Vektoren **c** und **g** zuerst im Falkschen Schema:

		3	5
		5	– 3
6	2	28	24
2	– 6	– 24	28

$$\Rightarrow \ \mathbf{c}\,\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 24 \\ -24 & 28 \end{pmatrix} = \mathbf{28} + \mathbf{24}\ \mathbf{e_1 e_2}$$

Nächstes Beispiel

Das gleiche Rechenergebnis kann natürlich auch wieder algebraisch mit Hilfe der Anti-Kommutativität ohne direktes Hinschreiben der Matrizen durch

$$\mathbf{c\,g} = (\mathbf{6\,e_1} + \mathbf{2\,e_2})\,(\mathbf{3\,e_1} + \mathbf{5\,e_2})$$

$$= \mathbf{6\,(3)\,e_1^2} + \mathbf{6\,(5)\,e_1e_2} + \mathbf{2\,(3)\,e_2e_1} + \mathbf{2\,(5)\,e_2^2}$$

$$= \mathbf{18\,(1)} + \mathbf{30\,e_1e_2 + 6\,(-\,e_1e_2)} + \mathbf{10\,(1)}$$

$$= \mathbf{18} + \mathbf{10} + \mathbf{(30 - 6)\,e_1e_2}$$

$$= \mathbf{28 + 24\,e_1e_2}$$

gefunden werden. Und natürlich sind beide Ergebnisse wieder identisch.

Nächstes Beispiel

Das gleiche Rechenergebnis kann natürlich auch wieder algebraisch mit Hilfe der **Anti-Kommutativität** ohne direktes Hinschreiben der Matrizen durch

$$\mathbf{c\,g} = (\mathbf{6\,e_1} + \mathbf{2\,e_2}\,)\,(\mathbf{3\,e_1} + \mathbf{5\,e_2})$$

$$= \mathbf{6\,(3)\,e_1{}^2} + \mathbf{6\,(5)\,e_1e_2} + \mathbf{2\,(3)\,e_2e_1} + \mathbf{2\,(5)\,e_2{}^2}$$

$$= \mathbf{18\,(1)} + \mathbf{30\,e_1e_2} + \mathbf{6\,(-\,e_1e_2)} + \mathbf{10\,(1)}$$

$$= \mathbf{18} + \mathbf{10} + (\mathbf{30} - \mathbf{6})\,\mathbf{e_1e_2}$$

$$= \mathbf{28} + \mathbf{24\,e_1e_2}$$

gefunden werden. Und natürlich sind beide Ergebnisse wieder identisch.

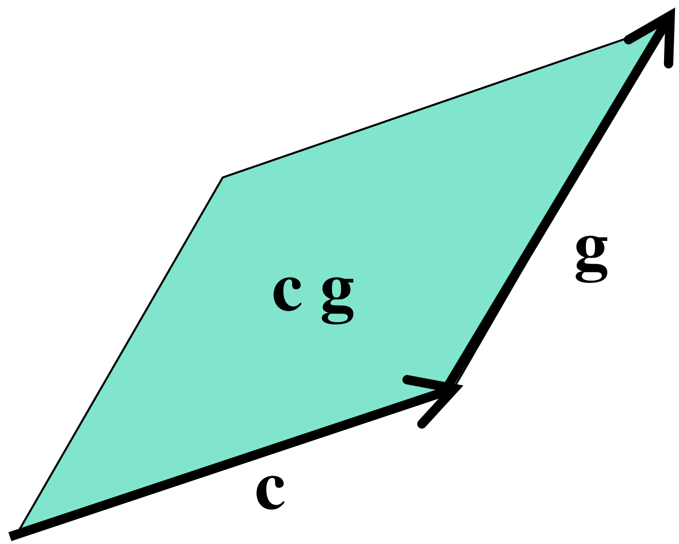
Ergebnis

Das Produkt der zwei schräg zueinander stehenden Vektoren

$$\mathbf{c} = \mathbf{6}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{3}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{5}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

ergibt ein orientiertes Parallelogramm, das als Summe eines Skalars und eines Bivektors



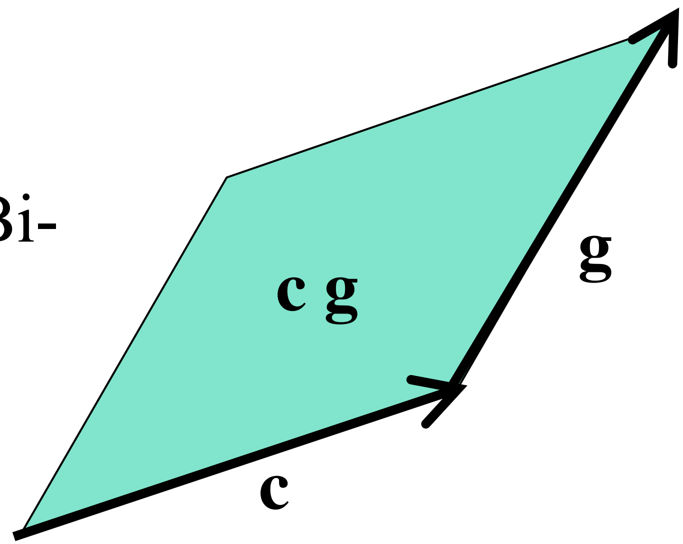
$$\mathbf{c}\ \mathbf{g} = \mathbf{28} + \mathbf{24}\ \mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 28 & 24 \\ -24 & 28 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann.

Ergebnis

Das Produkt der zwei schräg zueinander stehenden Vektoren $\mathbf{c} = \mathbf{6}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2}$ und $\mathbf{g} = \mathbf{3}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{5}\ \mathbf{e_2}$ ergibt ein orientiertes Parallelogramm, das als Summe eines Skalars und eines Bivektors als

$$\mathbf{c}\,\mathbf{g} = \mathbf{28} + \mathbf{24}\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 28 & 24 \\ -24 & 28 \end{pmatrix}$$



geschrieben werden kann. Der Bivektor beschreibt die Fläche.

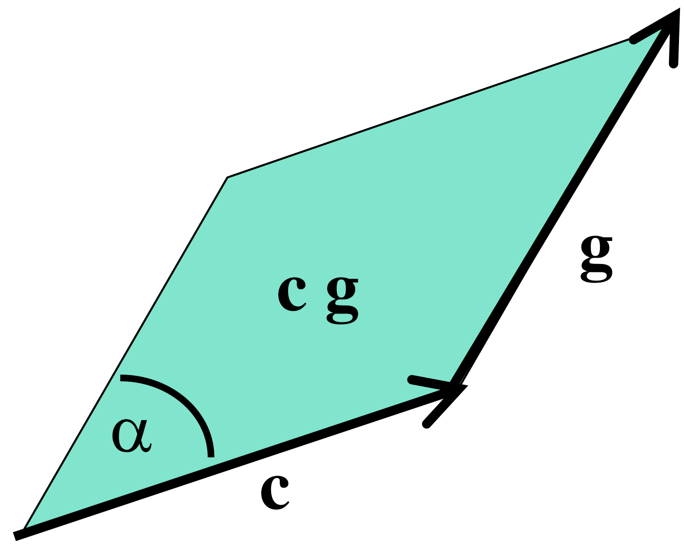
Das Parallelogramm hat also einen Flächeninhalt von insgesamt 24 LE^2.

Ergebnis

Das Produkt der zwei schräg zueinander stehenden Vektoren $\mathbf{c} = \mathbf{6}\ \mathbf{e}_1 + \mathbf{2}\ \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{g} = \mathbf{3}\ \mathbf{e}_1 + \mathbf{5}\ \mathbf{e}_2$ ergibt ein orientiertes Parallelogramm, das als Summe eines Skalars und eines Bivektors als

$$\mathbf{c}\ \mathbf{g} = \mathbf{28} + \mathbf{24}\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 28 & 24 \\ -24 & 28 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann. Und der Wert des Skalars enthält die Information über den Winkel α zwischen den beiden Vektoren **c** und **g**.



Hier das Ergebnis noch einmal groß gedruckt:

Das Produkt aus zwei schräg zueinander stehenden Vektoren

=

Summe aus Skalar und Bivektor

Mathematiker sagen dazu:

Das Produkt aus zwei schräg zueinander stehenden Vektoren

=

Linearkombination aus Skalar und Bivektor

Nein, nein, nein, die eigentliche Wahrheit ist:

Mathematiker sagen das nur sehr, sehr selten.

Denn die Mathematiker mögen es, andere Leute zu verwirren. Und um uns alle richtig schön zu verwirren, erfinden die Mathematiker einfach zwei verschiedene Produkte, die sie in (fast allen) Mathematikbüchern getrennt beschreiben, getrennt darstellen und getrennt behandeln.

Nur sehr selten addieren sie sie wirklich – obwohl das meistens recht einfach und dazu noch recht übersichtlich wäre.

Nein, nein, nein, die eigentliche Wahrheit ist:

Mathematiker sagen das nur sehr, sehr selten.

Denn die Mathematiker mögen es, andere Leute zu verwirren. Und um uns alle richtig schön zu verwirren, erfinden die Mathematiker einfach zwei verschiedene Produkte, die sie in (fast allen) Mathematikbüchern getrennt beschreiben, getrennt darstellen und getrennt behandeln: Skalarprodukt und Vektorprodukt.

Diese beiden Namen, die Sie vielleicht aus der Schule kennen, sollten Sie nicht so ernst nehmen. In der modernen Linearen Algebra werden die beiden Produkte nämlich anderes bezeichnet.

Und hier sind unsere beiden neuen Produkte:

Das Produkt aus zwei schräg zueinander stehenden Vektoren

=

Summe aus Skalar und Bivektor

Der skalare Anteil wird als inneres Produkt bezeichnet. Und den bivektoriellen Anteil bezeichnet man als äußeres Produkt.

Und hier sind unsere beiden neuen Produkte:

Das Produkt aus zwei schräg zueinander stehenden Vektoren

=

Summe aus Skalar und Bivektor

=

Summe aus innerem Produkt und äußerem Produkt

Inneres Produkt aus zwei Vektoren

Das innere Produkt zweier Vektoren ist symmetrisch. Es wird durch einen großen, dicken Punkt • bezeichnet.

Die Definition des inneren Produkts lautet:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathbf{a})$$

Vertauscht man die Multiplikationsreihenfolge beim inneren Produkt zweier Vektoren, ergibt sich wieder das gleiche Ergebnis:

$$\mathbf{b} \bullet \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}\,\mathbf{a} + \mathbf{a}\,\mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathbf{a}) = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

Äußeres Produkt aus zwei Vektoren

Das äußere Produkt zweier Vektoren ist anti-symmetrisch. Es wird durch einen Keil $\wedge$ bezeichnet.

Die Definition des äußeren Produkts lautet:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\mathbf{a})$$

Vertauscht man die Multiplikationsreihenfolge beim äußerem Produkt zweier Vektoren, ergibt sich eine Vorzeichenumkehr:

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}\,\mathbf{a} - \mathbf{a}\,\mathbf{b}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{a}\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\mathbf{a}) = -\,\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

Geometrisches Produkt aus zwei Vektoren

Diese beiden Produkte gehen auf Clifford und Grassmann zurück. Sie haben diese beiden Produkte bereits addiert und das übliche Gesamtprodukt (moderne Schreibweise ohne Multiplikationszeichen!)

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

erhalten. Bei dieser Addition bleiben ja nur die **a b**-Terme in der Definition übrig. Die **b a**-Terme heben sich aufgrund des Minuszeichens weg.

Dieses Gesamtprodukt wurde schon von Clifford und Grassmann als **Geometrisches Produkt** bezeichnet.

Interpretation des inneren Produkts

Mit Hilfe des inneren Produkts $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ kann der Winkel α zwischen beiden Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ bestimmt werden, denn der Quotient aus dem inneren Produkt und den Längen der beiden Vektoren entspricht dem Kosinus dieses Winkels:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

Die Länge der beiden Vektoren entspricht dem Betrag dieser Vektoren, den man erhält, wenn die Wurzel des Quadrats gebildet wird:

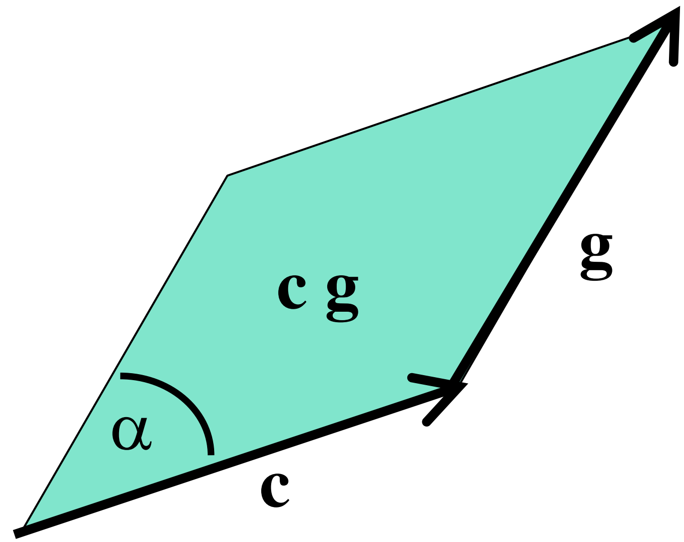
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2} \quad \text{bzw.} \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{b}^2}$$

Zurück zum Beispiel

Wie groß ist also der Winkel zwischen den beiden Vektoren **c** und **g**?

$$\mathbf{c} = \mathbf{6}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{3}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{5}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$



Zur Beantwortung dieser Frage muss zuerst die Länge der beiden Vektoren berechnet werden.

Länge der Vektoren

Mit Hilfe des Falkschen Schemas lautet das Quadrat des Vektors **c**:

			6	2
			2	– 6
6	2		40	0
2	– 6		0	40

$$\Rightarrow \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}^{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix} = \mathbf{40}$$

Länge der Vektoren

Das gleiche Ergebnis ergibt sich natürlich auch wieder algebraisch mit Hilfe der Anti-Kommutativität ohne direktes Hinschreiben der Matrizen:

$$\mathbf{c}^2 = (6\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2)\,(6\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2)$$

$$= 6\,(6)\,\mathbf{e}_1^{\,2} + 6\,(2)\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + 2\,(6)\,\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + 2\,(2)\,\mathbf{e}_2^{\,2}$$

$$= 36\,(1) + 12\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + 12\,(-\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) + 4\,(1)$$

$$= 36 + 4 + (12 - 12)\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$$

$$= 40$$

Bei Quadratur eines Vektors heben sich die Mischterme gegenseitig immer weg und es ergibt sich ein Skalar.

Und nochmal: Länge der Vektoren

Mit Hilfe des Falkschen Schemas lautet das Quadrat des Vektors **g**:

$$
\begin{array}{cc|cc}
 & & 3 & 5 \\
 & & 5 & -3 \\
\hline
3 & 5 & 34 & 0 \\
5 & -3 & 0 & 34
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{g}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 34 & 0 \\ 0 & 34 \end{pmatrix} = \mathbf{34}$$

Und nochmal: Länge der Vektoren

Das gleiche Ergebnis ergibt sich natürlich auch wieder algebraisch mit Hilfe der Anti-Kommutativität ohne direktes Hinschreiben der Matrizen:

$$\mathbf{g}^2 = (3\,\mathbf{e}_1 + 5\,\mathbf{e}_2)\,(3\,\mathbf{e}_1 + 5\,\mathbf{e}_2)$$

$$= 3\,(3)\,\mathbf{e}_1^{\,2} + 3\,(5)\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + 5\,(3)\,\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + 5\,(5)\,\mathbf{e}_2^{\,2}$$

$$= 9\,(1) + 15\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + 15\,(-\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) + 25\,(1)$$

$$= 9 + 25 + (15 - 15)\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$$

$$= 34$$

Bei Quadratur eines Vektors heben sich die Mischterme immer gegenseitig weg und es ergibt sich ein Skalar.

Und nochmal: Länge der Vektoren

Damit erhält man die folgenden Vektorenlängen:

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{40} \qquad \Rightarrow \qquad |\mathbf{c}| = \sqrt{40}\,(\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} \sqrt{40} & 0 \\ 0 & \sqrt{40} \end{pmatrix}$$

und:

$$\mathbf{g}^2 = \mathbf{34} \qquad \Rightarrow \qquad |\mathbf{g}| = \sqrt{34}\,(\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} \sqrt{34} & 0 \\ 0 & \sqrt{34} \end{pmatrix}$$

Eine Länge bzw. ein Betrag ist somit immer ein Skalar.

Berechnung des inneren Produkts

Da wir das Geometrische Produkt der zwei beiden schräg zueinander stehenden Vektoren $\mathbf{c} = \mathbf{6}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2}$ und $\mathbf{g} = \mathbf{3}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{5}\ \mathbf{e_2}$ schon kennen, kann auch das innere Produkt ohne Probleme ermittelt werden:

$$\mathbf{c\ g} = \mathbf{28} + \mathbf{24}\ \mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 28 & 24 \\ -24 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g\ c} = \mathbf{28} - \mathbf{24}\ \mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 28 & -24 \\ 24 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} (\mathbf{c\ g} + \mathbf{g\ c}) = \mathbf{28} = \begin{pmatrix} 28 & 0 \\ 0 & 28 \end{pmatrix}$$

Wie erwartet ist das innere Produkt ein Skalar.

Winkelberechnung

Jetzt kann die Winkelberechnung erfolgen:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{c} \bullet \mathbf{g}}{|\mathbf{c}||\mathbf{g}|} = \frac{\mathbf{28}}{\sqrt{40}\,\sqrt{34}} \approx \mathbf{0{,}7593}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0{,}7593 & 0 \\ 0 & 0{,}7593 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\alpha = \arccos \mathbf{0{,}7593} = \mathbf{40{,}60°}$

$\Rightarrow$ Der Winkel zwischen den beiden Vektoren **c** und **g** beträgt 40,60°.

Für Mathe-Freaks noch eine Andeutung zum Schluss:

Das Geometrische Produkt der beiden Vektoren **c** und **g** hatten wird zu

$$\mathbf{c}\,\mathbf{g} = \mathbf{28} + \mathbf{24}\,\mathbf{e_1 e_2}$$

berechnet.

Dividieren wir durch die beiden Vektorenlängen

$$\frac{\mathbf{c}\,\mathbf{g}}{\sqrt{40}\,\sqrt{34}} = \underset{\cos\alpha}{\underset{\uparrow}{\frac{\mathbf{28}}{\sqrt{40}\,\sqrt{34}}}} + \underset{\uparrow}{\frac{\mathbf{24}}{\sqrt{40}\,\sqrt{34}}}\,\underset{\text{imaginäre Einheit}}{\underset{\uparrow}{\mathbf{e_1 e_2}}}$$

erinnert das alles doch sehr …

Für Mathe-Freaks noch eine Andeutung zum Schluss:

Das Geometrische Produkt der beiden Vektoren **c** und **g** hatten wird zu

$$\mathbf{c\,g} = \mathbf{28} + \mathbf{24\;e_1e_2}$$

berechnet.

Dividieren wir durch die beiden Vektorenlängen

$$\frac{\mathbf{c\,g}}{\sqrt{40}\,\sqrt{34}} = \frac{\mathbf{28}}{\sqrt{40}\,\sqrt{34}} + \frac{\mathbf{24}}{\sqrt{40}\,\sqrt{34}}\,\mathbf{e_1e_2}$$

$$\text{Euler} \quad = \quad \cos\alpha \quad + \quad \sin\alpha \quad \text{imaginäre Einheit}$$

erinnert das alles doch sehr an Eulers schönste Formel.

Alternative Winkelberechnung

Der Winkel α zwischen beiden Vektoren **a** und **b** kann auch mit Hilfe des äußeren Produkts $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ bestimmt werden, denn der Flächeninhalt eines Parallelogramms entspricht dem Produkt aus den beiden Seitenlängen und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels:

$$\sin \alpha = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \mathbf{e_2 e_1}$$

Und mit Hilfe der An-Multiplikation von $\mathbf{e_2 e_1}$ wird der Basis-Bivektor $\mathbf{e_1 e_2}$ in ein Basis-Skalar **1** überführt:

$$\mathbf{e_1 e_2\, e_2 e_1 = e_1\, e_2{}^2\, e_1 = e_1 e_1 = e_1{}^2 = 1}$$

Alternative Winkelberechnung

Also:

$$\sin\alpha = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\,\mathbf{e_2 e_1}$$

$$= \frac{\mathbf{24}}{\sqrt{40}\,\sqrt{34}}\,\mathbf{e_1 e_2 e_2 e_1}$$

$$= \frac{\mathbf{24}}{\sqrt{40}\,\sqrt{34}} \approx \mathbf{0{,}6508}$$

$\Rightarrow$ $\alpha = \arcsin \mathbf{0{,}6508} = \mathbf{40{,}60°}$

$\Rightarrow$ Der Winkel zwischen den beiden Vektoren **c** und **g** beträgt 40,60°.

Schlussfolgerung:

Euler lebt!

Euler lebt

Eulers schönste Formel lebt auch in der Geometrischen Algebra an zentraler Stelle weiter.

Da kommen selbst hartgesottene Mathematikerinnen und Mathematiker ins esoterische Schwärmen:

Die Konstanten der Analysis: mystisch vereint

Ja, Mathematikerinnen und Mathematiker sehen in dieser Formel von Euler etwas Mystisches, Magisches, mysteriös Monumentales, von mythischem Nebel manisch umhüllt!

Und nicht nur für Mathe-Freaks:

Auch für Normalsterbliche hier zum Schluss deshalb der folgende Literaturhinweis, der nicht nur die Mathematik, sondern auch die Mystik hinter dieser Formel beleuchtet:

Pierre Basieux: Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze. Rororo science 60883, Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg 2000,

→ **Die Konstanten der Analysis: mystisch vereint, S. 71 – 79.**

Ergänzungsfolien 02:
Der doofe Computer kann was

Mathematik 1 des Bachelor-Studiengangs Ingenieurinformatik der HTW Berlin

Corona-Semester Sommer 2020

– Dr. M. Horn –

Hallo !

Der kleine, doofe Computer

In den Ergänzungsfolien 02 hatten wir über einen kleinen, doofen und unbeholfenen Computer nachgedacht, der nur für Rechnungen mit reellen (2 x 2)-Matrizen programmiert wurde.

Andere mathematische Objekte versteht er nicht. Mit anderen mathematischen Objekten kann er nichts anfangen.

Der kleine, doofe Computer

Unser kleiner, doofer Computer kennt also nur mathematische Objekte der Art:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} sind dabei reelle Zahlen.

Für andere mathematische Objekte ist er einfach nicht programmiert.

Wiederholung: Die vier Basiselemente

Jede reelle (2 x 2)-Matrix **A** kann dann als Summe dieser vier Basiselemente ausgedrückt werden:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$	skalare, dimensionslose Basiseinheit
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1}$	Basisvektor in x-Richtung
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_2}$	Basisvektor in y-Richtung
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1 e_2}$	Basis-Bivektor der xy-Ebene

Wiederholung: Die vier Basiselemente

Die skalare, dimensionslose Basiseinheit **1** ist ein Einheitsskalar und wirkt deshalb genauso wie die reelle Zahl 1 als neutrales Element der Multiplikation.

Die Basisvektoren $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_2}$ sind Einheitsvektoren, die orthogonal zueinander stehen. Es sind also orientierte Streckenstücke der Länge **1** LE.

Der Basis-Bivektor $\mathbf{e_1 e_2}$ ist ein orientiertes Flächenstück mit einem Flächeninhalt von **1** LE^2.

(LE ist dabei die Abkürzung für Längeneinheit.)

Wiederholung: Produkt zweier Vektoren

Das Produkt zweier Vektoren **a b** wird als **Geometrisches Produkt** bezeichnet. Es kann in ein inneres Produkt $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ und ein äußeres Produkt $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ zerlegt werden:

$$\mathbf{a\,b} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

Dies wird übrigens **kanonische Dekomposition** genannt.

Das Geometrische Produkt zweier Vektoren setzt sich also aus einem skalaren Anteil und einem flächenartigen Anteil zusammen, weil…

Wiederholung: Produkt zweier Vektoren

Das Geometrische Produkt zweier Vektoren setzt sich aus einem skalaren Anteil und einem flächenartigen Anteil zusammen, weil bei der Multiplikation von Vektoren die folgenden Regeln für die Multiplikation der Basisvektoren angewendet werden:

Normierung: $\mathbf{e_1}^2 = \mathbf{e_2}^2 = \mathbf{1}$

(Die Basisvektoren haben eine Länge von **1** LE.)

Anti-Kommutativität: $\mathbf{e_1 e_2} = -\,\mathbf{e_2 e_1}$

(Die Basisvektoren stehen orthogonal zueinander.)

Wiederholung: Inneres und äußeres Produkt

Das innere Produkt zweier Vektoren ist symmetrisch. Es ist folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathbf{a}) = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a}$$

Das äußere Produkt zweier Vektoren ist anti-symmetrisch. Es wird durch einen Keil $\wedge$ bezeichnet und ist folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\mathbf{a}) = -\,\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$$

Wiederholung: Äußeres Produkt

Mit Hilfe des äußeren Produkts zweier Vektoren kann der orientierte Flächeninhalt

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

eines Parallelogramms berechnet werden, das durch die beiden Vektoren **a** und **b** aufgespannt wird.

Diese Flächeninhaltsberechnungen wenden wir jetzt an: Wir wollen mit Hilfe des kleinen, doofen Computers auf Grundlage einer solcher Flächenberechnungen ein Lineares Gleichungssystem (LGS) lösen, das aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten besteht.

Cramer und Grassmann

Jetzt wollen wir mit Hilfe des kleinen, doofen Computers auf Grundlage einer solcher Flächenberechnungen ein Lineares Gleichungssystem lösen, das aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten besteht.

Das haben übrigens schon Grassmann 1844 und vor ihm Cramer (in modifizierter Form) so gemacht.

Das folgende Beispiel (siehe nächste Folie) zeigt, wie das geht.

Beispiel eines Linearen Gleichungssystems

$$5\,x + 3\,y = 41$$
$$2\,x + 6\,y = 50$$

Frage: Welche Werte haben die Variablen x und y?

Beispiel eines Linearen Gleichungssystems

$5\,x + 3\,y = 41$
$2\,x + 6\,y = 50$

Frage: Welche Werte haben die Variablen x und y?

Natürlich können Sie dieses Gleichungssystem so lösen, wie Sie es in der Schule gelernt haben. Oder so, wie es in anderen Mathematikbüchern gemacht wird.

Um es aber mit Hilfe des kleinen, doofen Computers zu lösen, greifen wir auf die Lösungsmethode von Grassmann und Cramer zurück. (Und es schadet auch nie, mehrere verschiedene Lösungsmethoden zu kennen.)

Beispiel eines Linearen Gleichungssystems

$$5x + 3y = 41$$
$$2x + 6y = 50$$

Zur Lösung dieses Linearen Gleichungssystems fassen wir die beiden Gleichungen in einer einzigen Gleichung zusammen. In dieser zusammengefassten Gleichung müssen die einzelnen Bestandteile jedoch noch erkennbar sein. (Es hilft uns nämlich nicht weiter, wenn wir beide Gleichungen einfach zu $7x + 9y = 91$ addieren, da diese Gleichung nicht mehr die eine gesuchte Lösung aufweist, sondern auf einmal unendlich viele Lösungen hat.)

Geometrisierung

$5x + 3y = 41$
$2x + 6y = 50$

Zur Lösung dieses Linearen Gleichungssystems fassen wir die beiden Gleichungen in einer einzigen Gleichung zusammen. In dieser zusammengefassten Gleichung müssen die einzelnen Bestandteile jedoch noch erkennbar sein. Deshalb „geometrisieren“ wir die beiden Gleichungen, indem wir ihnen Richtungen zuordnen und sie so unterscheidbar machen.

Geometrisierung

$5\,x + 3\,y = 41 \qquad \leftarrow \quad \text{mal } \mathbf{e_1} \quad$ (erste Richtung)
$2\,x + 6\,y = 50 \qquad \leftarrow \quad \text{mal } \mathbf{e_2} \quad$ (zweite Richtung)

Zur Lösung dieses Linearen Gleichungssystems fassen wir die beiden Gleichungen in einer einzigen Gleichung zusammen. In dieser zusammengefassten Gleichung müssen die einzelnen Bestandteile jedoch noch erkennbar sein. Deshalb „geometrisieren“ wir die beiden Gleichungen, indem wir ihnen Richtungen zuordnen und sie so unterscheidbar machen.

Eine algebraische Situation wird dadurch in eine geometrische Situation umgewandelt.

Geometrisierung

$5\,x + 3\,y = 41 \qquad \leftarrow \quad$ mal $\mathbf{e_1}$ (erste Richtung)
$2\,x + 6\,y = 50 \qquad \leftarrow \quad$ mal $\mathbf{e_2}$ (zweite Richtung)

$$(5\,x + 3\,y)\,\mathbf{e_1} = 41\,\mathbf{e_1}$$
$$(2\,x + 6\,y)\,\mathbf{e_2} = 50\,\mathbf{e_2}$$

$$5\,\mathbf{e_1}\,x + 3\,\mathbf{e_1}\,y = 41\,\mathbf{e_1}$$
$$2\,\mathbf{e_2}\,x + 6\,\mathbf{e_2}\,y = 50\,\mathbf{e_2}$$

Eine algebraische Situation wird dadurch in eine geometrische Situation umgewandelt.

Geometrisierung

$5\,x + 3\,y = 41 \qquad \leftarrow \quad \text{mal } \mathbf{e_1} \quad$ (erste Richtung)

$2\,x + 6\,y = 50 \qquad \leftarrow \quad \text{mal } \mathbf{e_2} \quad$ (zweite Richtung)

$$(5\,x + 3\,y)\,\mathbf{e_1} = 41\,\mathbf{e_1}$$
$$(2\,x + 6\,y)\,\mathbf{e_2} = 50\,\mathbf{e_2}$$

$$5\,\mathbf{e_1}\,x + 3\,\mathbf{e_1}\,y = 41\,\mathbf{e_1}$$
$$2\,\mathbf{e_2}\,x + 6\,\mathbf{e_2}\,y = 50\,\mathbf{e_2}$$

Addition: $5\,\mathbf{e_1}\,x + 3\,\mathbf{e_1}\,y + 2\,\mathbf{e_2}\,x + 6\,\mathbf{e_2}\,y = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$

Eine algebraische Situation wird dadurch in eine geometrische Situation umgewandelt.

Geometrisierung

Natürlich wird das für unseren kleinen Computer dann extra mit Hilfe von (2 x 2)-Matrizen geschrieben:

$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(5\,x + 3\,y)\,\mathbf{e_1} = 41\,\mathbf{e_1}$$

$$(2\,x + 6\,y)\,\mathbf{e_2} = 50\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5\,x + 3\,y & 0 \\ 0 & -5\,x - 3\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 0 \\ 0 & -41 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\,x + 6\,y \\ 2\,x + 6\,y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 50 \\ 50 & 0 \end{pmatrix}$$

Addition: $5\,\mathbf{e_1}\,x + 3\,\mathbf{e_1}\,y + 2\,\mathbf{e_2}\,x + 6\,\mathbf{e_2}\,y = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$

Zwischenbemerkung

Denn unser kleiner Computer versteht ja das gegebene Gleichungssystem

$$5\,x + 3\,y = 41$$
$$2\,x + 6\,y = 50$$

überhaupt nicht. Dort stehen ja einzelne reelle Zahlen 5, 3, 2, 6, 41 und 50 und die einzelnen reellen Unbekannten x und y. Unser kleiner Computer versteht nur:

$$\mathbf{5\,x} + \mathbf{3\,y} = \mathbf{41}$$
$$\mathbf{2\,x} + \mathbf{6\,y} = \mathbf{50}$$

Unser kleiner Computer versteht nur:

$$\mathbf{5\ x} + \mathbf{3\ y} = \mathbf{41}$$
$$\mathbf{2\ x} + \mathbf{6\ y} = \mathbf{50}$$

Hier ist alles fett gedruckt, denn die einzelnen Skalare werden für den kleinen Computer als (2 x 2)-Matrizen geschrieben.

Beispielsweise sind: $\mathbf{5} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{41} = \begin{pmatrix} 41 & 0 \\ 0 & 41 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

Alle diese skalaren Größen müssen für unseren kleinen Computer durch (2 x 2)-Matrizen ausgedrückt werden.

Unser kleiner Computer versteht nur:

$$\mathbf{5\ x} + \mathbf{3\ y} = \mathbf{41}$$
$$\mathbf{2\ x} + \mathbf{6\ y} = \mathbf{50}$$

Wenn wir also irgendwo 5 x schreiben, müssen wir das für unseren kleinen Computer als

$$5\ x\ \mathbf{1} = 5\ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\ x & 0 \\ 0 & 5\ x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$
$$= \mathbf{5\ x}$$

darstellen.

Unser kleiner Computer versteht nur:

$$\mathbf{5\ x + 3\ y = 41}$$
$$\mathbf{2\ x + 6\ y = 50}$$

Und wenn wir irgendwo 5 x $\mathbf{e_1}$ schreiben, müssen wir das für unseren kleinen Computer als

$$5\ \mathrm{x}\ \mathbf{e_1} = 5\ \mathrm{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\ \mathrm{x} & 0 \\ 0 & -5\ \mathrm{x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} & 0 \\ 0 & \mathrm{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{5\ x\ e_1}$$

darstellen.

Und so geht es weiter: Geometrisierung

Natürlich wird das für unseren kleinen Computer dann extra mit Hilfe von (2 x 2)-Matrizen geschrieben:

$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(5\,x + 3\,y)\,\mathbf{e_1} = 41\,\mathbf{e_1}$$

$$(2\,x + 6\,y)\,\mathbf{e_2} = 50\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5\,x + 3\,y & 0 \\ 0 & -5\,x - 3\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 0 \\ 0 & -41 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\,x + 6\,y \\ 2\,x + 6\,y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 50 \\ 50 & 0 \end{pmatrix}$$

Addition: $5\,\mathbf{e_1}\,x + 3\,\mathbf{e_1}\,y + 2\,\mathbf{e_2}\,x + 6\,\mathbf{e_2}\,y = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$

Und so geht es weiter: Geometrisierung

Natürlich wird das für unseren kleinen Computer dann extra mit Hilfe von (2 x 2)-Matrizen geschrieben:

$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(5\ x + 3\ y)\ \mathbf{e_1} = 41\ \mathbf{e_1}$$
$$(2\ x + 6\ y)\ \mathbf{e_2} = 50\ \mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Addition: $$\begin{pmatrix} 5\ x + 3\ y & 2\ x + 6\ y \\ 2\ x + 6\ y & -5\ x - 3\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 50 \\ 50 & -41 \end{pmatrix}$$

Addition: $5\ \mathbf{e_1}\ x + 3\ \mathbf{e_1}\ y + 2\ \mathbf{e_2}\ x + 6\ \mathbf{e_2}\ y = 41\ \mathbf{e_1} + 50\ \mathbf{e_2}$

Und so geht es weiter: Geometrisierung

Addition: $$\begin{pmatrix} 5\,x + 3\,y & 2\,x + 6\,y \\ 2\,x + 6\,y & -5\,x - 3\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 50 \\ 50 & -41 \end{pmatrix}$$

Addition: $5\,\mathbf{e_1}\,x + 3\,\mathbf{e_1}\,y + 2\,\mathbf{e_2}\,x + 6\,\mathbf{e_2}\,y = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$

Und jetzt sortieren wir um, indem wir die Unbekannten x und y ausklammern:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 41 & 50 \\ 50 & -41 \end{pmatrix}$$

$(5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2})\,x + (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2})\,y = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$

Zwischenergebnis

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 41 & 50 \\ 50 & -41 \end{pmatrix}$$

$$(5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2})\,x + (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2})\,y = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$$

Dieses Zwischenergebnis vergleichen wir mit unserem ursprünglichen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 5\,x + 3\,y &= 41 \\ 2\,x + 6\,y &= 50 \end{aligned}$$

Zwischenergebnis

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 41 & 50 \\ 50 & -41 \end{pmatrix}$$

$$(5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2})\,x + (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2})\,y = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$$

$$\begin{aligned} 5\,x + 3\,y &= 41 \\ 2\,x + 6\,y &= 50 \end{aligned}$$

Zwischenergebnis

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 41 & 50 \\ 50 & -41 \end{pmatrix}$$

$$(5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2})\,x + (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2})\,y = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$$

$$5\,x + 3\,y = 41$$
$$2\,x + 6\,y = 50$$

Das Gleichungssystem wird als eine einzige Vektorgleichung geschrieben.

Zwischenergebnis

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \mathrm{x} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \mathrm{y} = \begin{pmatrix} 41 & 50 \\ 50 & -41 \end{pmatrix}$$

$$(5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2})\,\mathrm{x} + (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2})\,\mathrm{y} = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$$

Koeffizientenvektoren Ergebnisvektor

$$5\,\mathrm{x} + 3\,\mathrm{y} = 41$$
$$2\,\mathrm{x} + 6\,\mathrm{y} = 50$$

Das Gleichungssystem wird als eine einzige Vektorgleichung geschrieben.

Zwischenergebnis

$$\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & -5\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}3 & 6\\ 6 & -3\end{pmatrix} y = \begin{pmatrix}41 & 50\\ 50 & -41\end{pmatrix}$$

$$(5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2})\,x + (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2})\,y = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$$

Koeffizientenvektoren:

$$\mathbf{a} = 5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & -5\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = 3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix}3 & 6\\ 6 & -3\end{pmatrix}$$

Ergebnisvektor:

$$\mathbf{r} = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$$

$$= \begin{pmatrix}41 & 50\\ 50 & -41\end{pmatrix}$$

(**r** steht für englisch „result“.)

Zwischenergebnis

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 41 & 50 \\ 50 & -41 \end{pmatrix}$$

$$(5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2})\,x + (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2})\,y = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$$

Koeffizientenvektoren:

$$\mathbf{a} = 5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = 3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Ergebnisvektor:

$$\mathbf{r} = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$$

$$= \begin{pmatrix} 41 & 50 \\ 50 & -41 \end{pmatrix}$$

(**r** steht für englisch „result“.)

Das Gleichungssystem hat jetzt also die Form:

$$\mathbf{a}\ x + \mathbf{b}\ y = \mathbf{r}$$

Zwischenergebnis

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \mathrm{x} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \mathrm{y} = \begin{pmatrix} 41 & 50 \\ 50 & -41 \end{pmatrix}$$

$$(5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2})\,\mathrm{x} + (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2})\,\mathrm{y} = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{a}\ \mathrm{x} + \mathbf{b}\ \mathrm{y} = \mathbf{r}$$

Der Trick

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 41 & 50 \\ 50 & -41 \end{pmatrix}$$

$$(5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2})\,x + (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2})\,y = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$$

Um diese Vektorgleichung lösen zu können, erinnern wir uns: Ein Parallelogramm, das aus zwei schräg zueinander stehenden Vektoren **a** und **b** aufgespannt wird, besitzt einen Flächeninhalt: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq 0$

Aber: Ein Parallelogramm, das aus zwei parallel zueinander stehenden Vektoren **a** und **a** aufgespannt wird, hat keinen Flächeninhalt: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$

Der Trick

$$\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & -5\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}3 & 6\\ 6 & -3\end{pmatrix} y = \begin{pmatrix}41 & 50\\ 50 & -41\end{pmatrix}$$

$$(5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2})\,x + (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2})\,y = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$$

Wir wissen: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq 0$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$

Wenn die Vektorgleichung

$$\mathbf{a}\;x + \mathbf{b}\;y = \mathbf{r}$$

in einer äußeren Multiplikation mit **a** multipliziert wird, dann verschwindet der Term mit der Unbekannten x.

Der Trick

Wir lassen x verschwinden!

$$\mathbf{a}\, x + \mathbf{b}\, y = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a}\, x + \mathbf{b}\, y) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{a})\, x + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\, y = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$$

Sie erinnern sich an die Definition des äußeren Produkts?

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}\, \mathbf{b} - \mathbf{b}\, \mathbf{a})$$

Der Trick

Wir lassen x verschwinden!

$$\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{a})\,x + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,y = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$$

Sie erinnern sich an die Definition des äußeren Produkts? Wenn $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ gesetzt wird, folgt:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{a}\,\mathbf{a} - \mathbf{a}\,\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

Der Trick

Wir lassen x verschwinden!

$$\mathbf{a}\, x + \mathbf{b}\, y = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a}\, x + \mathbf{b}\, y) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{a})\, x + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\, y = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\, y = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$$

$\mathbf{0}$

Der Trick

Wir lassen x verschwinden!

$$\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{a})\,x + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,y = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,y = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$$

Und jetzt müssen wir nur noch durch $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ dividieren.

$\mathbf{0}$

Der Trick

Wir lassen x verschwinden!

$$\mathbf{a}\, x + \mathbf{b}\, y = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a}\, x + \mathbf{b}\, y) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{a})\, x + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\, y = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\, y = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$$

(zweite) Lösung: $y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r})$

Der Trick

Genau auf die gleiche Art und Weise kann x berechnet werden: Wir lassen y verschwinden!

$$\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r}$$

$$(\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,x + \underbrace{(\mathbf{b} \wedge \mathbf{b})}_{\mathbf{0}}\,y = \mathbf{r} \wedge \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,x = \mathbf{r} \wedge \mathbf{b}$$

Der Trick

Genau auf die gleiche Art und Weise kann x berechnet werden: Wir lassen y verschwinden!

$$\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r}$$

$$(\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,x + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{b})\,y = \mathbf{r} \wedge \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,x \qquad\qquad = \mathbf{r} \wedge \mathbf{b}$$

(erste) Lösung: $\quad x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b})$

Zusammenfassung

Ein Lineares Gleichungssystem (LGS) aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, das als Vektorgleichung

$$\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r}$$

geschrieben wird, kann mit Hilfe der äußeren Produkte folgendermaßen gelöst werden:

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b})$$

$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r})$$

Es müssen also nur Flächeninhalte berechnet und verglichen werden.

Und jetzt rechnen wir diese Flächen aus

$5\,x + 3\,y = 41$

$2\,x + 6\,y = 50$

$\mathbf{a} = \ 5\,\mathbf{e_1} + \ 2\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{b} = \ 3\,\mathbf{e_1} + \ 6\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{r} = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$

Äußere Produkte:

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}) \wedge (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2}) = 24\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2}$

$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = \ldots$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = \ldots$

Und jetzt rechnen wir diese Flächen aus

$5\ x + 3\ y = 41$

$2\ x + 6\ y = 50$

$\mathbf{a} = \ \ 5\,\mathbf{e_1} + \ \ 2\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{b} = \ \ 3\,\mathbf{e_1} + \ \ 6\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{r} = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$

Äußere Produkte:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}) \wedge (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2}) = 24\,\mathbf{e_1 e_2}$$

weil $\quad 5 \cdot 6\,\mathbf{e_1 e_2} + 2 \cdot 3\,\mathbf{e_2 e_1} = 30\,\mathbf{e_1 e_2} + 6\,\mathbf{e_2 e_1}$

$$= 30\,\mathbf{e_1 e_2} - 6\,\mathbf{e_1 e_2}$$

$$= (30 - 6)\,\mathbf{e_1 e_2}$$

Und der kleine Computer rechnet natürlich mit seinen (2 x 2)-Matrizen

$$\mathbf{a} = 5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = 3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

a b		3	6
		6	– 3
5	2	27	24
2	– 5	– 24	27

Und der kleine Computer rechnet natürlich mit seinen (2 x 2)-Matrizen

$$\mathbf{a} = 5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = 3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

a b		3	6
		6	– 3
5	2	27	24
2	– 5	– 24	27

b a		5	2
		2	– 5
3	6	27	– 24
6	– 3	24	27

Und der kleine Computer rechnet natürlich mit seinen (2 x 2)-Matrizen

$$\mathbf{a} = 5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = 3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a\,b} = \begin{pmatrix} 27 & 24 \\ -24 & 27 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b\,a} = \begin{pmatrix} 27 & -24 \\ 24 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{a\,b} - \mathbf{b\,a}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\begin{pmatrix} 0 & 48 \\ -48 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{24\,e_1 e_2}$$

Und jetzt rechnen wir diese Flächen aus

$5\,x + 3\,y = 41$

$2\,x + 6\,y = 50$

$\mathbf{a} = 5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{b} = 3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{r} = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$

Äußere Produkte:

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}) \wedge (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2}) = 24\,\mathbf{e_1 e_2}$

$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = (41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}) \wedge (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2}) = 96\,\mathbf{e_1 e_2}$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = \ldots$

Und jetzt rechnen wir diese Flächen aus

$5\,x + 3\,y = 41$

$2\,x + 6\,y = 50$

$\mathbf{a} = 5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{b} = 3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{r} = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$

Äußere Produkte:

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = (41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}) \wedge (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2}) = 96\,\mathbf{e_1 e_2}$$

weil $41 \cdot 6\,\mathbf{e_1 e_2} + 50 \cdot 3\,\mathbf{e_2 e_1} = 246\,\mathbf{e_1 e_2} + 150\,\mathbf{e_2 e_1}$

$= 246\,\mathbf{e_1 e_2} - 150\,\mathbf{e_1 e_2}$

$= (246 - 150)\,\mathbf{e_1 e_2}$

Und der kleine Computer rechnet natürlich mit seinen (2 x 2)-Matrizen

$$\mathbf{r} = 41\ \mathbf{e_1} + 50\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 41 & 50 \\ 50 & -41 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = 3\ \mathbf{e_1} + 6\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

r b		3	6
		6	– 3
41	50	423	96
50	– 41	– 96	423

Und der kleine Computer rechnet natürlich mit seinen (2 x 2)-Matrizen

$$\mathbf{r} = 41\ \mathbf{e_1} + 50\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 41 & 50 \\ 50 & -41 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = 3\ \mathbf{e_1} + 6\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

r b		3	6
		6	– 3
41	50	423	96
50	– 41	– 96	423

b r		41	50
		50	– 41
3	6	423	– 96
6	– 3	96	423

Und der kleine Computer rechnet natürlich mit seinen (2 x 2)-Matrizen

$$\mathbf{r} = 41\ \mathbf{e_1} + 50\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 41 & 50 \\ 50 & -41 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \ \ 3\ \mathbf{e_1} + \ \ 6\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r\,b} = \begin{pmatrix} 423 & 96 \\ -96 & 423 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b\,r} = \begin{pmatrix} 423 & -96 \\ 96 & 423 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{r\,b} - \mathbf{b\,r}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\begin{pmatrix} 0 & 192 \\ -192 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 96 \\ -96 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{96\ e_1 e_2}$$

Und jetzt rechnen wir diese Flächen aus

$5\,x + 3\,y = 41$

$2\,x + 6\,y = 50$

$\mathbf{a} = 5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{b} = 3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{r} = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$

Äußere Produkte:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}) \wedge (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2}) = 24\,\mathbf{e_1 e_2}$$

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = (41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}) \wedge (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2}) = 96\,\mathbf{e_1 e_2}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = (5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}) \wedge (41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}) = 168\,\mathbf{e_1 e_2}$$

Und jetzt rechnen wir diese Flächen aus

$5\ x + 3\ y = 41$

$2\ x + 6\ y = 50$

$\mathbf{a} = \ \ 5\, \mathbf{e_1} + \ \ 2\, \mathbf{e_2}$

$\mathbf{b} = \ \ 3\, \mathbf{e_1} + \ \ 6\, \mathbf{e_2}$

$\mathbf{r} = 41\, \mathbf{e_1} + 50\, \mathbf{e_2}$

Äußere Produkte:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = (5\, \mathbf{e_1} + 2\, \mathbf{e_2}) \wedge (41\, \mathbf{e_1} + 50\, \mathbf{e_2}) = 168\, \mathbf{e_1 e_2}$$

weil $5 \cdot 50\, \mathbf{e_1 e_2} + 2 \cdot 41\, \mathbf{e_2 e_1} = 250\, \mathbf{e_1 e_2} + 82\, \mathbf{e_2 e_1}$

$$= 250\, \mathbf{e_1 e_2} - 82\, \mathbf{e_1 e_2}$$

$$= (250 - 82)\, \mathbf{e_1 e_2}$$

Und der kleine Computer rechnet natürlich mit seinen (2 x 2)-Matrizen

$\mathbf{a} = 5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

$\mathbf{r} = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 41 & 50 \\ 50 & -41 \end{pmatrix}$

a r		41	50
		50	– 41
5	2	305	168
2	– 5	– 168	305

Und der kleine Computer rechnet natürlich mit seinen (2 x 2)-Matrizen

$$\mathbf{a} = 5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 41 & 50 \\ 50 & -41 \end{pmatrix}$$

a r			
		41	50
		50	– 41
5	2	305	168
2	– 5	– 168	305

r a			
		5	2
		2	– 5
41	50	305	– 168
50	– 41	168	305

Und der kleine Computer rechnet natürlich mit seinen (2 x 2)-Matrizen

$$\mathbf{a} = 5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 41 & 50 \\ 50 & -41 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a\,r} = \begin{pmatrix} 305 & 168 \\ -168 & 305 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r\,a} = \begin{pmatrix} 305 & -168 \\ 168 & 305 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{a\,r} - \mathbf{r\,a}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\begin{pmatrix} 0 & 336 \\ -336 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 168 \\ -168 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{168\ e_1 e_2}$$

Zwischenergebnisse

$5\,x + 3\,y = 41$

$2\,x + 6\,y = 50$

$\mathbf{a} = 5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{b} = 3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{r} = 41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}$

Äußere Produkte:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}) \wedge (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2}) = 24\,\mathbf{e_1 e_2}$$

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = (41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}) \wedge (3\,\mathbf{e_1} + 6\,\mathbf{e_2}) = 96\,\mathbf{e_1 e_2}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = (5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}) \wedge (41\,\mathbf{e_1} + 50\,\mathbf{e_2}) = 168\,\mathbf{e_1 e_2}$$

Wiederholung: Zusammenfassung von Folie 43

Ein Lineares Gleichungssystem (LGS) aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, das als Vektorgleichung

$$\mathbf{a}\, x + \mathbf{b}\, y = \mathbf{r}$$

geschrieben wird, kann mit Hilfe der äußeren Produkte folgendermaßen gelöst werden:

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\, (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b})$$

$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r})$$

Es müssen also nur Flächeninhalte berechnet und verglichen werden.

Division durch Flächen (Bivektoren)

Durch ein orientiertes Flächenstück $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ kann dividiert werden, indem mit dem Inversen bzw. Reziprokem dieses Flächenstücks

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}$$

multipliziert wird.

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b})$$

$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r})$$

Division durch Flächen (Bivektoren)

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 24\,\mathbf{e_1 e_2}$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{24\,\mathbf{e_1 e_2}} = \frac{\mathbf{1}}{24}\;\frac{\mathbf{e_2 e_1}}{\mathbf{e_1 e_2}\;\mathbf{e_2 e_1}} = \frac{\mathbf{1}}{24}\;\mathbf{e_2 e_1}$$

Probe:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} = 24\,\mathbf{e_1 e_2}\,\frac{\mathbf{1}}{24}\;\mathbf{e_2 e_1}$$

$$= \mathbf{1}\;\mathbf{e_1}\underbrace{\mathbf{e_2 e_2}}_{\mathbf{1}}\mathbf{e_1} = \mathbf{1}\;\underbrace{\mathbf{e_1 e_1}}_{\mathbf{1}} = \mathbf{1} \quad \surd$$

Lösung des LGS

$$5\,x + 3\,y = 41 \qquad\qquad \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = 96\ \mathbf{e_1 e_2}$$

$$2\,x + 6\,y = 50 \qquad\qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = 168\ \mathbf{e_1 e_2}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 24\ \mathbf{e_1 e_2}$$

$$\Rightarrow \quad x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \frac{96}{24}\ \mathbf{e_2 e_1 e_1 e_2} = 4$$

$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = \frac{168}{24}\ \mathbf{e_2 e_1 e_1 e_2} = 7$$

Probe: Einsetzen in das ursprüngliche LGS

$$5\,x + 3\,y = 5 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 20 + 21 = 41$$

$$2\,x + 6\,y = 2 \cdot 4 + 6 \cdot 7 = \ \ 8 + 42 = 50 \quad \surd$$

Division durch Flächen (Bivektoren)

Natürlich führt der kleine Computer diese Division mit seinen (2 x 2)-Matrizen aus, denn er weiß, wie inverse Matrizen gebildet werden:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 24\, \mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & 0 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \quad \surd$$

Lösung des LGS

$$5\,x + 3\,y = 41 \qquad \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = 96\,\mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 96 \\ -96 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2\,x + 6\,y = 50 \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = 168\,\mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 168 \\ -168 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 24\,\mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 96 \\ -96 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots$$

$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = \ldots$$

Falksches Schema

$$\mathrm{x} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 96 \\ -96 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 96 \\ & & -96 & 0 \\ \hline 0 & -\dfrac{1}{24} & \dfrac{96}{24} & 0 \\ \dfrac{1}{24} & 0 & 0 & \dfrac{96}{24} \end{array}$$

Lösung des LGS

$5\,x + 3\,y = 41$

$2\,x + 6\,y = 50$

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = \ 96\ \mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 96 \\ -96 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = 168\ \mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 168 \\ -168 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \ 24\ \mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 96 \\ -96 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{4}$$

$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = \ldots$$

Lösung des LGS

$$5\,x + 3\,y = 41 \qquad \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = 96\,\mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 96 \\ -96 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2\,x + 6\,y = 50 \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = 168\,\mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 168 \\ -168 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 24\,\mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{4}$$

$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 168 \\ -168 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{7}$$

Lösung des LGS

$5\,x + 3\,y = 41 \qquad \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = 96\,\mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 96 \\ -96 & 0 \end{pmatrix}$

$2\,x + 6\,y = 50 \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = 168\,\mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 168 \\ -168 & 0 \end{pmatrix}$

$\qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 24\,\mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{4}$$

$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{7}$$

$\Rightarrow$ Es ergeben sich die gleichen Ergebnisse wie in Folie 63, nur eben jetzt in Matrizenschreibweise.

Fazit: Es funktioniert!

Ein Lineares Gleichungssystem (LGS) aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$\mathbf{a}\, x + \mathbf{b}\, y = \mathbf{r}$$

kann mit Hilfe von Flächeninhaltsberechnungen (also mit Hilfe der äußeren Produkte) folgendermaßen gelöst werden:

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\, (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b})$$

$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r})$$

(Vorausgesetzt, die Flächeninhalte sind nicht Null, so dass das LGS eindeutig lösbar ist.)

Fazit: Es funktioniert!

Es funktioniert – und das ist für uns als anwendungsorientierte Wissenschaftler (also für uns Ingenieur/innen, Physiker/innen, Chemiker/innen, etc.) erst einmal das Wichtigste.

Fazit: Es funktioniert!

Es funktioniert – und das ist für uns als anwendungsorientierte Wissenschaftler (also für uns Ingenieur/innen, Physiker/innen, Chemiker/innen, etc.) erst einmal das Wichtigste.

Es funktioniert – und das gefällt nicht allen Mathematikerinnen und Mathematikern. Mathematiker können manchmal sehr eitel und eingebildet sein.

Vordergründig tun sie immer recht höflich und dezent. Aber wenn es zur Sache geht, sind sie knallhart, bis aufs Messer feindselig und uneingeschränkt eigensüchtig.

Fazit: Es funktioniert!

Mathematiker können manchmal sehr eitel und eingebildet sein. Vordergründig tun sie immer recht höflich und dezent. Aber wenn es zur Sache geht, sind sie knallhart, bis aufs Messer feindselig und uneingeschränkt eigensüchtig.

Das musste auch Hermann Grassmann erfahren, nachdem er 1844 seine Ausdehnungslehre veröffentlichte.

In diesem Buch hat er das, was Sie gerade zur Lösung Linearer Gleichungssysteme gelernt haben, ausführlich und sehr, sehr tiefgründig dargestellt.

Fazit: Es funktioniert!

Die Reaktion auf die Art von Hermann Grassmann, Mathematik zu betreiben, beschreibt Gian-Carlo Rota in seinem Buch

Gian-Carlo Rota: (1997). Indiscrete Thoughts. Birkhäuser-Verlag, Boston, Basel, Berlin 1997

sehr offen:

Seine mathematischen Kollegen meldeten sich größtenteils mit offener oder versteckter Feindseligkeit zu Wort.

Fazit: Es funktioniert!

Gian-Carlo Rota schreibt (auf S. 47):

It is not surprising that Grassmann was not entirely welcome among mathematicians. Anyone coming up with a new definition is likely to make enemies. New ideas are often unwelcome and regarded as intrusive. Grassmann made a number of enemies, and the animosity against his great definition has not entirely died out.

Grassmanns Kollegen empfanden die Mathematik, die Sie als Studenten in den Folien gerade gelernt haben, als Angriff auf die Mathematik.

Fazit: Es funktioniert!

Über zwei wirklich außerordentlich begabte, geradezu geniale Mathematiker/innen schreibt Rota (auf S. 233):

In their first textbook of "modern" algebra, they made sure that not a word of tensor algebra, and most of all, no hint of mystifying concoctions of that crackpot Grassmann would be given out.

„Mystifying concoctions“ heißt wohl so viel wie „mystifizierendes Gebräu“ und „crackpot“ heißt wohl irgendwas wie „Spinner“. So geht es zu in der Mathematik, selbst Genies (wie hier Noether und van der Waerden) verhalten sich wie kleine, störrisch blärrende Kinder, denen Grassmann das Spielzeug weggenommen hat.

Fazit: Es funktioniert!

Dabei war Grassmann nicht nur ein Mathematiker, sondern auch ein Sprachkünstler. Es sprach perfekt Sanskrit und übersetzte den Rig-Veda ins Deutsche. Noch heute gilt sein „Wörterbuch zum Rig-Veda“ als ein Grundlagenwerk, das Sanskritforscher ausführlich nutzen.

Grassmanns Sprachgewalt ist enorm. Sie ist so enorm und erschlagend, dass wir Normalsterbliche, selbst wenn wir perfekt die Sprache sprechen, in der Grassmann seine Ausdehnungslehre schrieb, diese oft nicht verstehen.

Fazit: Es funktioniert!

Grassmanns Sprachgewalt ist enorm. Sie ist so enorm und erschlagend, dass wir Normalsterbliche, selbst wenn wir perfekt die Sprache sprechen, in der Grassmann seine Ausdehnungslehre schrieb, diese oft nicht verstehen.

Und auch Mathematikerinnen und Mathematiker verstehen Grassmanns Mathematik sehr oft nicht.

Die Schlussfolgerungen, die Rota daraus zieht, lautet schlicht und simpel:

Fazit: Es funktioniert!

Grassmanns Sprachgewalt ist enorm. Sie ist so enorm und erschlagend, dass wir Normalsterbliche, selbst wenn wir perfekt die Sprache sprechen, in der Grassmann seine Ausdehnungslehre schrieb, diese oft nicht verstehen.

Und auch Mathematikerinnen und Mathematiker verstehen Grassmanns Mathematik sehr oft nicht.

Die Schlussfolgerungen, die Rota daraus zieht, lautet schlicht und simpel:

Mathematiker verstehen die Mathematik nicht.

Mathematiker verstehen die Mathematik nicht

Ja, Mathematikerinnen und Mathematiker verstehen bis heute Grassmanns Mathematik, die Mathematik der Ausdehnungslehre, oft nicht richtig.

Rota verwendet nur andere Worte, wenn er dies beschreibt. Bei ihm liest es sich so:

Mathematiker verstehen die Mathematik nicht

Ja, Mathematikerinnen und Mathematiker verstehen bis heute Grassmanns Mathematik, die Mathematik der Ausdehnungslehre, oft nicht richtig.

Rota verwendet nur andere Worte, wenn er dies beschreibt. Bei ihm liest es sich so (auf S. 232 & 233):

The neglect of exterior algebra is the mathematical tragedy of this century. … No proper textbook presentation of exterior algebra has been written. … A treatise in this fundamental chapter of mathematics is awaiting its author; meanwhile, we have to bear with mathematicians who are exterior algebra-blind.

Mathematiker verstehen die Mathematik nicht

Und die gute Nachricht ist: Der kleine, doofe Computer, der versteht die Mathematik von Grassmann. Wir können ihn mit seinen (2 x 2)-Matrizen so programmieren, dass er damit vernünftige Rechnungen anstellen kann.

Der kleine, unbeholfene und völlig unbedarfte Computer ist nicht blind für die äußere Algebra. Denn die steckt in seinen (2 x 2)-Matrizen mitten drin.

Mathematiker verstehen die moderne Mathematik oft nicht – Sie als Studierende verstehen diese jetzt aber.

Ergänzungsfolien 03: Der kleine, doofe Computer trifft zwei alte Griechen

Mathematik 1 des Bachelor-Studiengangs Ingenieurinformatik der HTW Berlin

Corona-Semester Sommer 2020

– Dr. M. Horn –

Hallo !

Der kleine, doofe Computer

In den Ergänzungsfolien 01 & 02 hatten wir über einen kleinen, doofen und unbeholfenen Computer nachgedacht, der nur für Rechnungen mit reellen (2 x 2)-Matrizen der Art

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

programmiert wurde. a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} sind dabei reelle Zahlen.

Andere mathematische Objekte versteht er nicht. Mit anderen mathematischen Objekten kann er nichts anfangen. Dafür wurde er einfach nicht programmiert.

Der kleine, doofe Computer

Und obwohl dieser kleine, doofe und unbeholfene Computer nur eine einzige Art von mathematischen Objekten kennt, so kann er damit doch auch ganz nützliche Dinge machen:

- Er kann Vektoren und orientierte Flächen berechnen.
- Er kann einfache Lineare Gleichungssysteme lösen.

Zwei alte Griechen konnten dies auch schon:

Pythagoras (ca. 570 v.Chr. – ca. 500 v.Chr.)
Euklid (ca. 365 v.Chr. – ca. 300 v.Chr.)

Allerdings verwendeten sie keine Vektoren.

Mathematatik für die Ewigkeit

Obwohl sich Pythagoras und Euklid extrem gut mit geometrischen Beziehungen und Flächenberechnungen auskannten, verwendeten sie keine Vektoren im modernen Sinn, sondern betrachteten Streckenlängen und Richtungen meist getrennt voneinander.

Das muss kein Nachteil sein: Euklid schrieb trotzdem das einflussreichste und das am weitesten verbreitete Mathematikbuch in der Geschichte der Menschheit. Seit über 2000 Jahren steht es in der Bestseller-Liste aller jemals geschriebenen wissenschaftlichen Bücher an erster Stelle ganz, ganz oben.

Mathematik für die Ewigkeit

Und wenn Mathematiker über dieses Buch und die Mathematik der alten Griechen nachdenken, kommen sie richtig ins Schwärmen.

So schreibt einer der einflussreichsten britischen Mathematiker (heute leider schon tot) in seinem Buch

Godfrey Harold Hardy: A Mathematician‘s Apology. Canto edition, Cambridge University Press, Cambridge 1992

auf S. 80/81: (siehe folgende Folie)

Mathematik für die Ewigkeit

The Greeks were the first mathematicians who are still ‘real’ to us to-day. Oriental mathematics may be an interesting curiosity, but Greek mathematics is the real thing. The Greeks first spoke a language which modern mathematicians can understand: as Littlewood said to me once, they are not clever schoolboys or ‘scholarship candidates’, but ‘Fellows of another college’. So Greek mathematics is ‘permanent’, more permanent even than Greek literature.

Archimedes will be remembered when Aeschylus is forgotten, because languages die and mathematical ideas do not. ‘Immortality’ may be a silly word, but probably a mathematician has the best chance of whatever it may mean.

Mathematik für die Ewigkeit

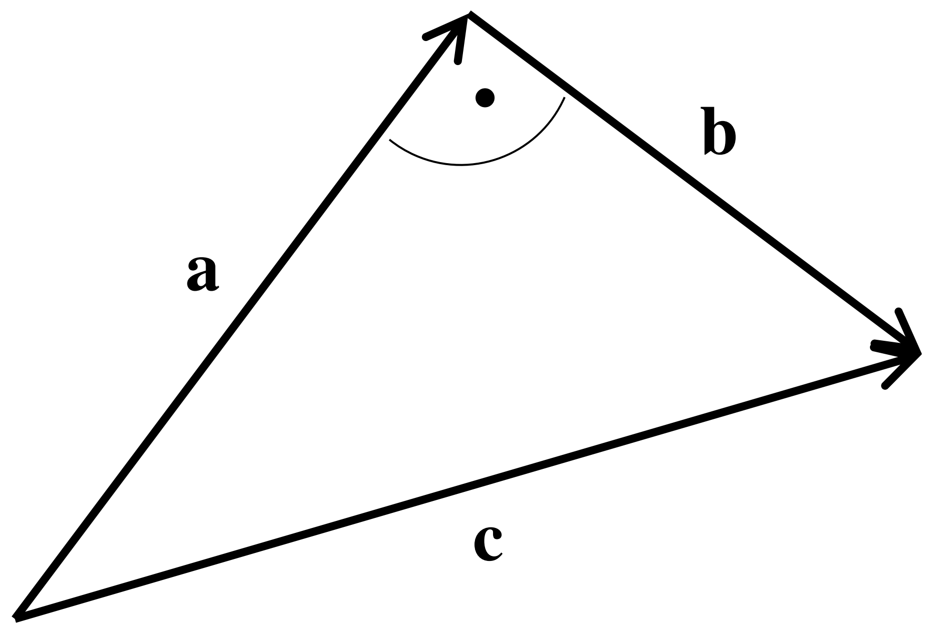
Und ein ganz, ganz kleines Stück dieser Mathematik für die Ewigkeit werden wir jetzt für unseren kleinen, doofen Computer in die Sprache der (2 x 2)-Matrizen übersetzen.

Dieses kleine Stück sind der Satz des Pythagoras, der Kathetensatz und der Höhensatz des Euklid und der Flächensatz. Insgesamt bezeichnet man diese Sätze als die „Satzgruppe des Pythagoras“.

Und da der kleine, doofe Computer so fleißig ist, zeigen wir ihm auch, wie eine Verallgemeinerung dieser Sätze mit Hilfe von (2 x 2)-Matrizen formuliert werden kann.

Der Satz des Pythagoras

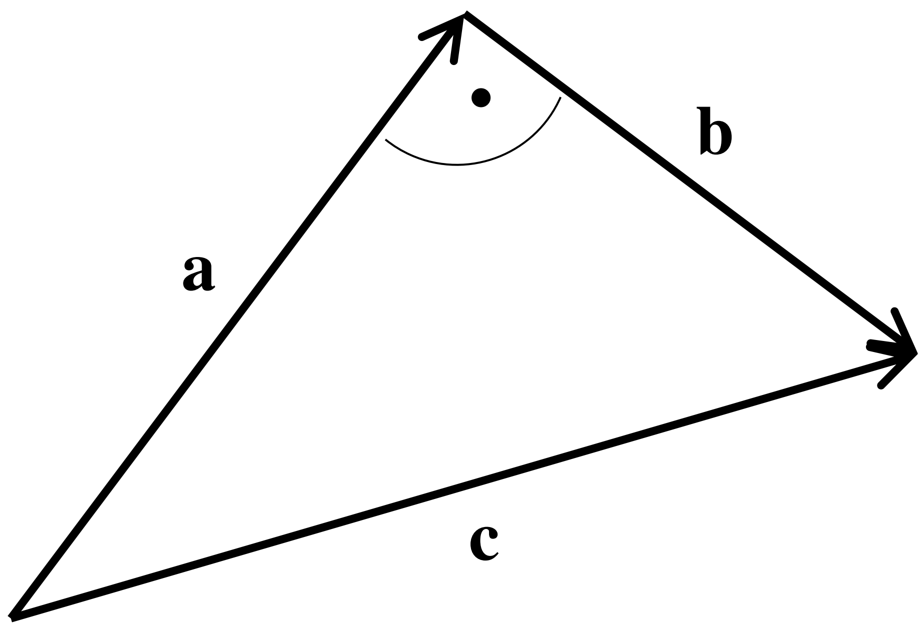
Als erstes übersetzen wir den Satz des Pythagoras. Dieser Satz beschreibt den Zusammenhang zwischen den Längenquadraten der Katheten **a** und **b** sowie der Hypotenuse **c** eines rechtswinkligen Dreiecks:



Der Satz des Pythagoras

Der Zusammenhang ist ganz einfach:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$$



Der Satz des Pythagoras

Der Zusammenhang ist ganz einfach:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

Eigentlich könnten wir diese Vektorsumme schon „Satz des Pythagoras“ nennen. Aber der eigentliche Lehrbuchsatz des Pythagoras ergibt sich, wenn diese Vektorsumme quadriert wird:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2$$

Das ist der „echte“ Satz des Pythagoras. Und natürlich gilt er für alle Dreiecke, nicht nur für rechtswinklige.

Der Satz des Pythagoras

Der „echte“ Satz des Pythagoras gilt für alle Dreiecke, nicht nur für rechtswinklige:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2$$

Aber Pythagoras wollte ja unbedingt rechtwinklige Dreiecke haben. Also rechnen wir weiter:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c}^2$$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathbf{a} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

Auch dieser Zusammenhang gilt noch für alle Dreiecke.

Der Satz des Pythagoras

Der „echte“ Satz des Pythagoras gilt für alle Dreiecke, nicht nur für rechtswinklige:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2$$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathbf{a} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

Auch dieser Zusammenhang gilt noch für alle Dreiecke. Er enthält das innere Produkt, das in den Ergänzungsfolien 01 folgendermaßen definiert wurde:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathbf{a})$$

Damit gilt: $\mathbf{2\,a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathbf{a}$

Der Satz des Pythagoras

Der „echte“ Satz des Pythagoras gilt für alle Dreiecke, nicht nur für rechtswinklige:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2$$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{a\,b} + \mathbf{b\,a} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

Auch dieser Zusammenhang gilt noch für alle Dreiecke. Er enthält das innere Produkt, das in den Ergänzungsfolien 01 folgendermaßen definiert wurde:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a\,b} + \mathbf{b\,a})$$

Damit gilt: $\quad 2\,\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{a\,b} + \mathbf{b\,a}$

Der Verallgemeinerte Satz des Pythagoras

Der „echte“ Satz des Pythagoras gilt für alle Dreiecke, nicht nur für rechtswinklige:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2$$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}\ \mathbf{b} + \mathbf{b}\ \mathbf{a} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{2}\ \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

Er wird „Verallgemeinerter Satz des Pythagoras“ genannt:

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{2}\ \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{c}^2$$

Der Verallgemeinerte Satz des Pythagoras

Diesen „Verallgemeinerten Satz des Pythagoras“

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{2\ a \bullet b} = \mathbf{c}^2$$

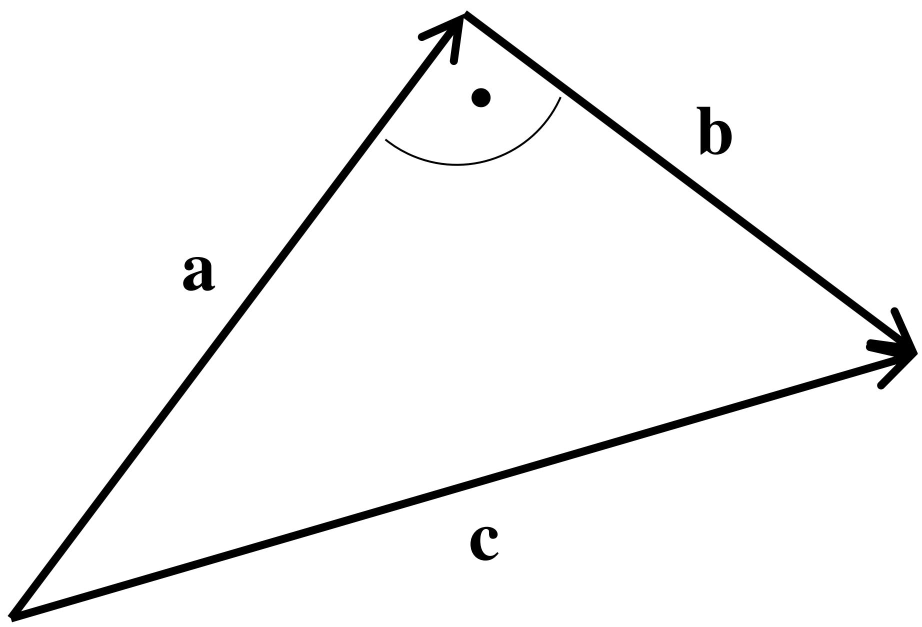
rechnen wir jetzt an einem Beispieldreieck mit Hilfe des kleinen Computers nach.

Zuerst suchen wir uns irgendein beliebiges Dreieck aus, beispielsweise …

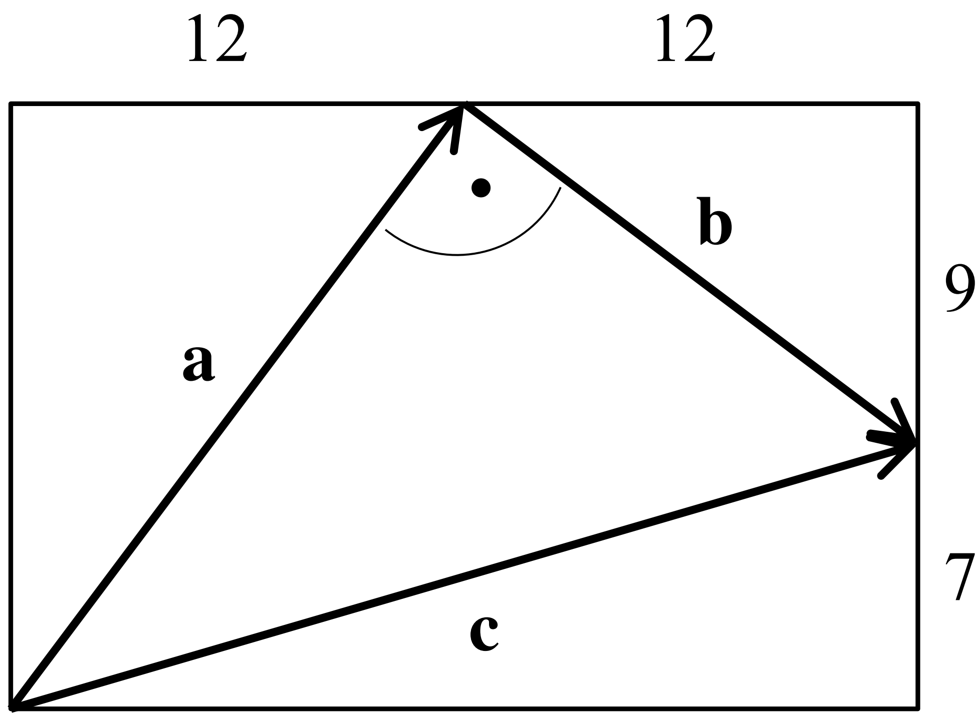
(siehe folgende Folie)

Und danach vergleichen wir die Rechnung mit einem rechtwinkligen Dreieck.

Beispiel: Rechtwinkliges Dreieck

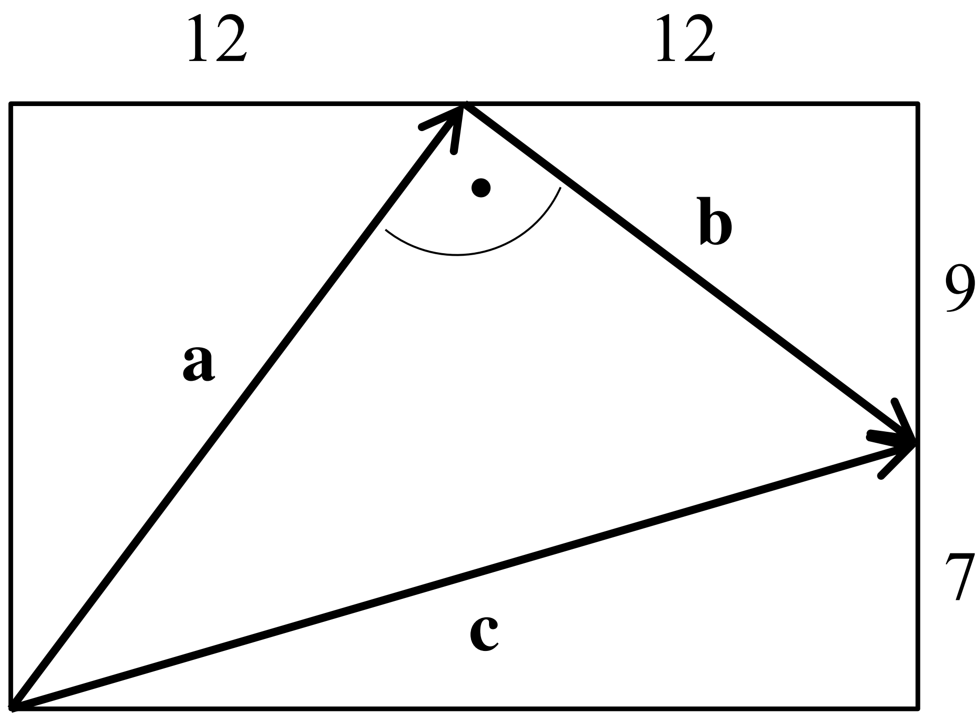


Beispiel: Rechtwinkliges Dreieck



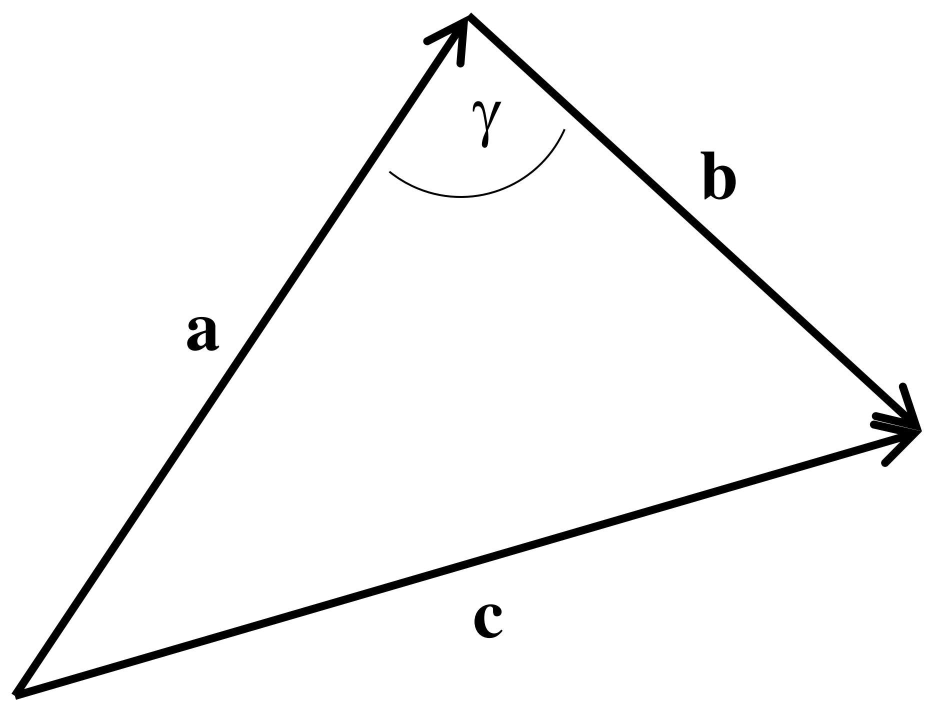
Beispiel: Rechtwinkliges Dreieck

Nein, wir fangen mit einem beliebigen Dreieck ohne rechten Winkel an! (Den Vergleich mit rechtwinkligen Dreiecken machen wir dann später.)



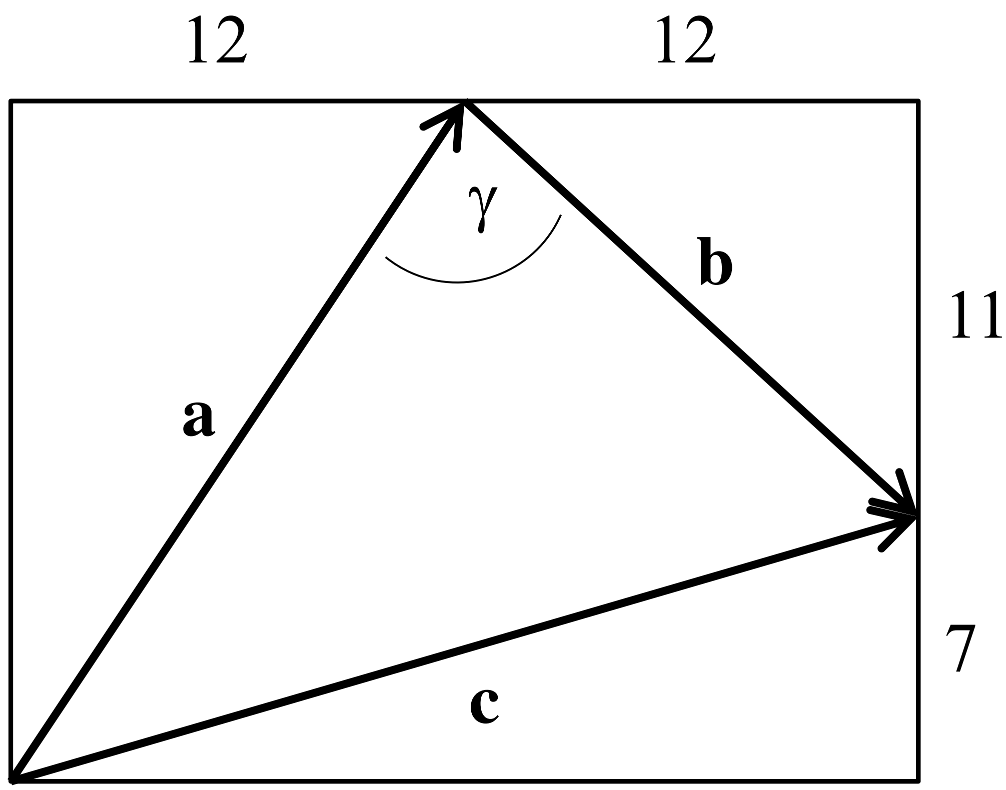
Beispiel: Beliebiges Dreieck

Hiermit fangen wir an:



Beispiel: Beliebiges Dreieck

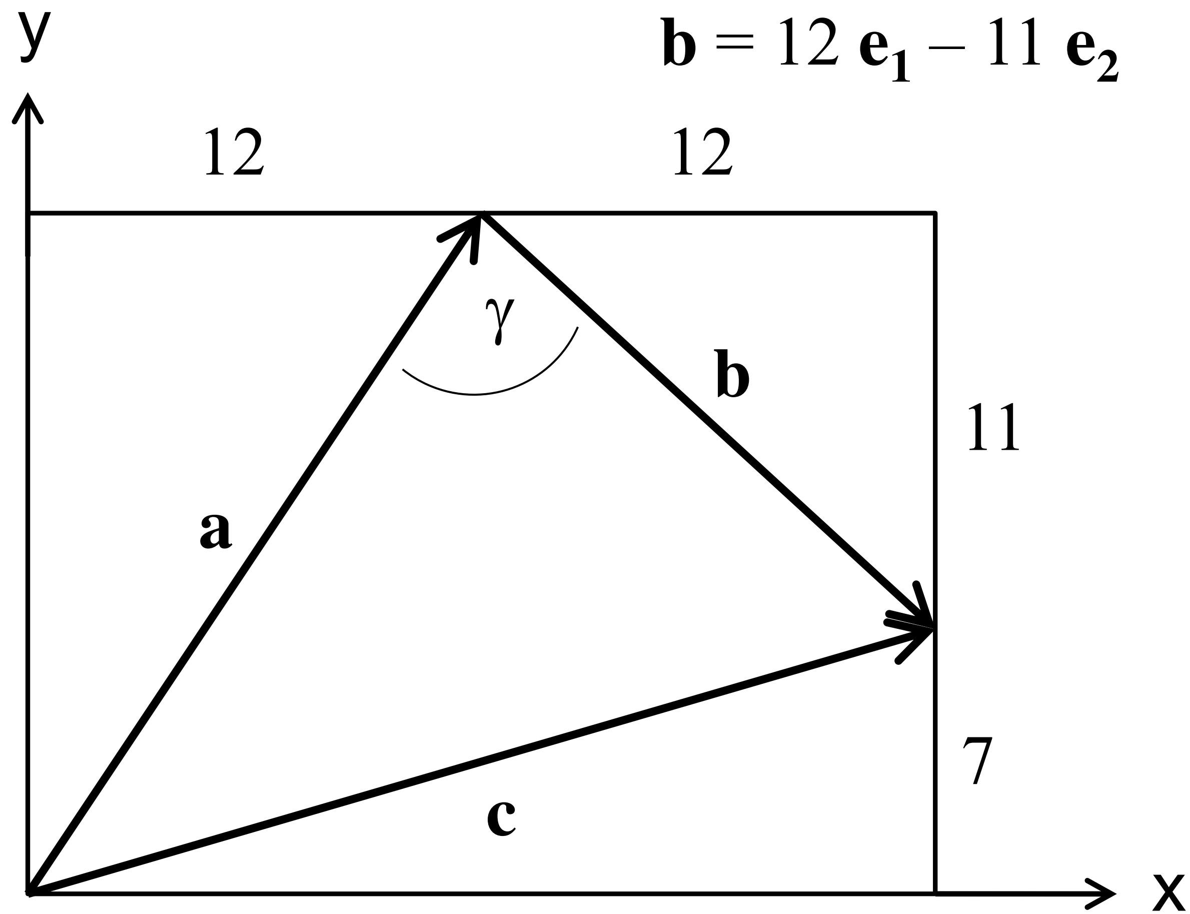
Hiermit fangen wir an:



Beispiel: Beliebiges Dreieck

Die Seitenvektoren lauten somit: $\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2}$

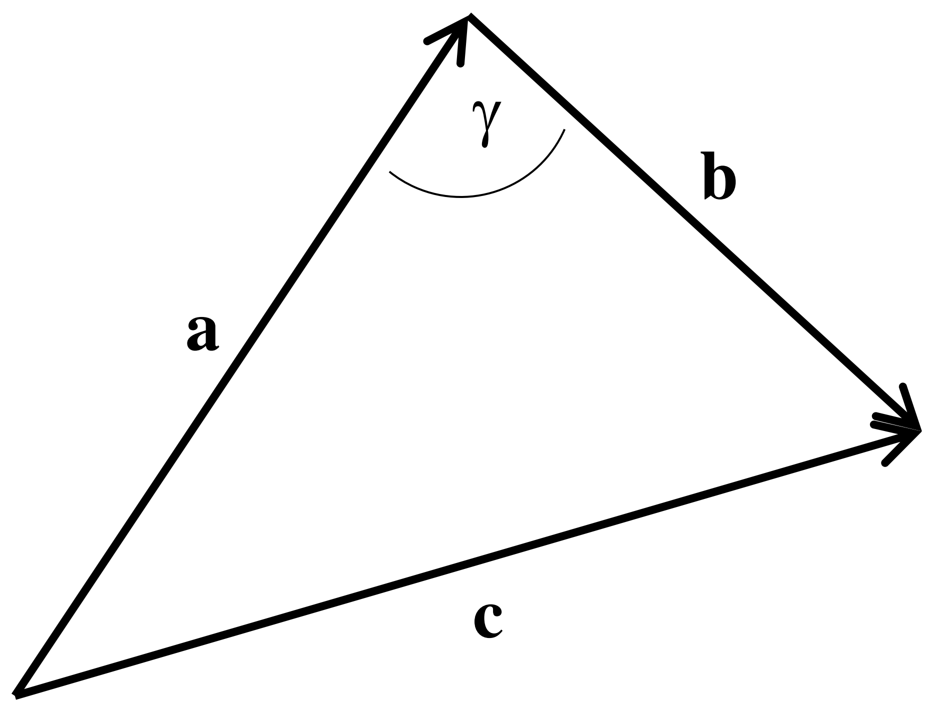


Beispiel: Beliebiges Dreieck

Die Seitenvektoren lauten somit: $\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$



Beispiel: Beliebiges Dreieck

Die Seitenvektoren lauten somit:

$$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2}$$
$$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2}$$
$$\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$$

Um den Verallgemeinerten Satz des Pythagoras nachzurechnen, müssen wir die Seitenvektoren quadrieren:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^2 &= (12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2})^2 \\
&= (12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2})\,(12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2}) \\
&= 144\,\mathbf{e_1}^2 + 216\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} + 216\,\mathbf{e_2}\mathbf{e_1} + 324\,\mathbf{e_2}^2 \\
&= 144 + 216\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} - 216\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} + 324 \\
&= 468
\end{aligned}$$

Beispiel: Beliebiges Dreieck

Seitenvektoren: $\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2}$ $\qquad \mathbf{a}^2 = 468$

$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$

Um den Verallgemeinerten Satz des Pythagoras nachzurechnen, müssen wir die Seitenvektoren quadrieren:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}^2 &= (12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2})^2 \\
&= (12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2})\,(12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2}) \\
&= 144\,\mathbf{e_1}^2 - 132\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} - 132\,\mathbf{e_2}\mathbf{e_1} + 121\,\mathbf{e_2}^2 \\
&= 144 - 132\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} + 132\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} + 121 \\
&= 265
\end{aligned}
$$

Beispiel: Beliebiges Dreieck

Seitenvektoren:

$$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{a}^2 = 468$$

$$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{b}^2 = 265$$

$$\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + \ 7\,\mathbf{e_2}$$

Um den Verallgemeinerten Satz des Pythagoras nachzurechnen, müssen wir die Seitenvektoren quadrieren:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}^2 &= (24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2})^2 \\
&= (24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2})\,(24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}) \\
&= 576\,\mathbf{e_1}^2 + 168\,\mathbf{e_1 e_2} + 168\,\mathbf{e_2 e_1} + 49\,\mathbf{e_2}^2 \\
&= 576 + 168\,\mathbf{e_1 e_2} - 168\,\mathbf{e_1 e_2} + 49 \\
&= 625
\end{aligned}$$

Beispiel: Beliebiges Dreieck

Seitenvektoren:

$$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{a}^2 = 468$$
$$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{b}^2 = 265$$
$$\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + \;\,7\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{c}^2 = 625$$

Und wir benötigen das innere Produkt der beiden Vektoren **a** und **b**:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} &= (12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2}) \bullet (12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2}) \\ &= 12 \cdot 12\,\mathbf{e_1}^2 + 18 \cdot (-\,11)\,\mathbf{e_2}^2 \\ &= 144 - 198 \\ &= -\,54\end{aligned}$$

Beispiel: Beliebiges Dreieck

Seitenvektoren: $\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2}$ $\quad \mathbf{a}^2 = 468$

$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2}$ $\quad \mathbf{b}^2 = 265$

$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -54$ $\quad \mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$ $\quad \mathbf{c}^2 = 625$

Jetzt überprüfen wir den Verallgemeinerten Satz des Pythagoras:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{2\,a} \bullet \mathbf{b} &= 468 + 265 + 2 \cdot (-54) \\
&= 468 + 265 - 108 \\
&= 625 = \mathbf{c}^2
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Das Resultat bestätigt den Verallgemeinerten Satz des Pythagoras.

Und der kleine Computer rechnet:

Seitenvektoren: $\mathbf{a} = \mathbf{12\ e_1} + \mathbf{18\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 18 & -12 \end{pmatrix}$

$\mathbf{b} = \mathbf{12\ e_1} - \mathbf{11\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & -11 \\ -11 & -12 \end{pmatrix}$

$\mathbf{c} = \mathbf{24\ e_1} + \mathbf{7\ e_2} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix}$

$\mathbf{a}^2$		12	18
		18	– 12
12	18	468	0
18	– 12	0	468

$\Rightarrow \quad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 468 & 0 \\ 0 & 468 \end{pmatrix}$

$= \mathbf{468}$

Und der kleine Computer rechnet:

$$\mathbf{a} = \mathbf{12\ e_1} + \mathbf{18\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 18 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 468 & 0 \\ 0 & 468 \end{pmatrix} = \mathbf{468}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{12\ e_1} - \mathbf{11\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & -11 \\ -11 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{24\ e_1} + \mathbf{7\ e_2} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} \mathbf{b}^2 & & 12 & -11 \\ & & -11 & -12 \\ \hline 12 & -11 & 265 & 0 \\ -11 & -12 & 0 & 265 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 265 & 0 \\ 0 & 265 \end{pmatrix} = \mathbf{265}$$

Und der kleine Computer rechnet:

$$\mathbf{a} = \mathbf{12\ e_1} + \mathbf{18\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 18 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 468 & 0 \\ 0 & 468 \end{pmatrix} = \mathbf{468}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{12\ e_1} - \mathbf{11\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & -11 \\ -11 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 265 & 0 \\ 0 & 265 \end{pmatrix} = \mathbf{265}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{24\ e_1} + \mathbf{7\ e_2} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} \mathbf{c}^2 & & 24 & 7 \\ & & 7 & -24 \\ \hline 24 & 7 & 625 & 0 \\ 7 & -24 & 0 & 625 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

Und der kleine Computer rechnet:

$$\mathbf{a} = \mathbf{12\ e_1} + \mathbf{18\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 18 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 468 & 0 \\ 0 & 468 \end{pmatrix} = \mathbf{468}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{12\ e_1} - \mathbf{11\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & -11 \\ -11 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 265 & 0 \\ 0 & 265 \end{pmatrix} = \mathbf{265}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{24\ e_1} + \mathbf{7\ e_2} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

a b		12	– 11
		– 11	– 12
12	18	– 54	– 348
18	– 12	348	– 54

b a		12	18
		18	– 12
12	– 11	– 54	348
– 11	– 12	– 348	– 54

Und der kleine Computer rechnet:

$$\mathbf{a} = \mathbf{12\ e_1} + \mathbf{18\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 18 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 468 & 0 \\ 0 & 468 \end{pmatrix} = \mathbf{468}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{12\ e_1} - \mathbf{11\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & -11 \\ -11 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 265 & 0 \\ 0 & 265 \end{pmatrix} = \mathbf{265}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{24\ e_1} + \mathbf{7\ e_2} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

$$\mathbf{a\ b} = \begin{pmatrix} -54 & -348 \\ 348 & -54 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b\ a} = \begin{pmatrix} -54 & 348 \\ -348 & -54 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} (\mathbf{a\ b} + \mathbf{b\ a}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{pmatrix} -108 & 0 \\ 0 & -108 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -54 \end{pmatrix}$$

$$= -\mathbf{54}$$

Und der kleine Computer rechnet:

Berechnete Größen:

$$\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 468 & 0 \\ 0 & 468 \end{pmatrix} = \mathbf{468}$$

$$\mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 265 & 0 \\ 0 & 265 \end{pmatrix} = \mathbf{265}$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -54 \end{pmatrix} = -\,\mathbf{54} \qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

Jetzt überprüfen wir den Verallgemeinerten Satz des Pythagoras mit Hilfe von (2 x 2)-Matrizen:

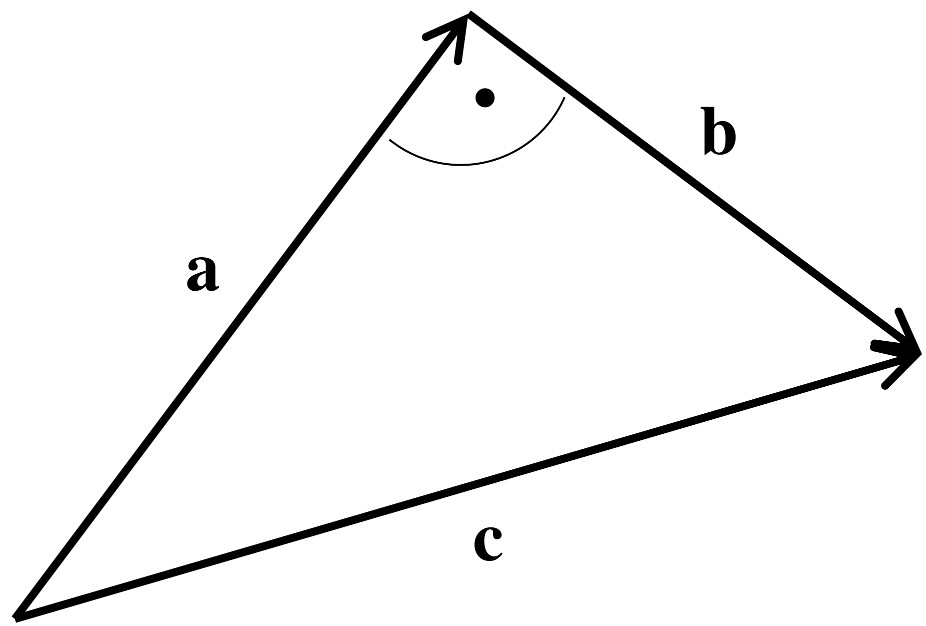
$$\begin{aligned} \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{2\ a} \bullet \mathbf{b} &= \mathbf{468} + \mathbf{265} + \mathbf{2}\ (-\,\mathbf{54}) \\ &= \mathbf{468} + \mathbf{265} - \mathbf{108} \\ &= \mathbf{625} = \ \mathbf{c}^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Gleiches Resultat wir in Folie 28 (nur eben als Matrizenrechnung und deshalb **fett** geschrieben)

Der Satz des Pythagoras

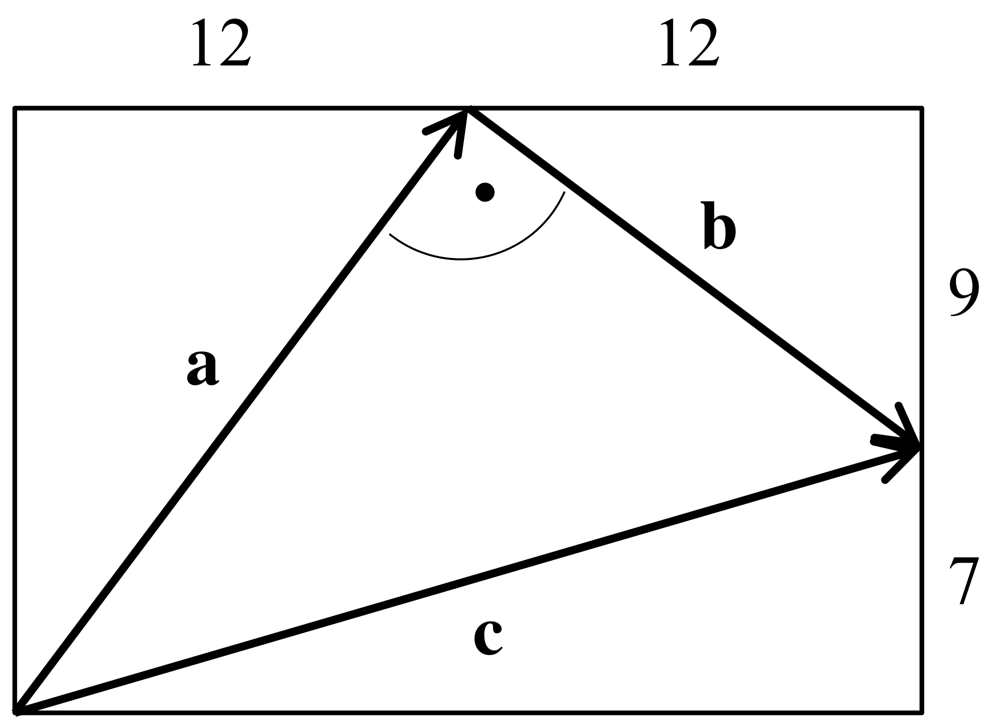
Und wie sieht diese Rechnung bei einem rechtwinkligen Dreieck aus?

Nehmen wir also das folgende rechtwinklige Dreieck als Beispiel:



Der Satz des Pythagoras

Die Seitenvektoren **a** und **b** sind Katheten.
Die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite des Vektors **c** ist die Hypotenuse.

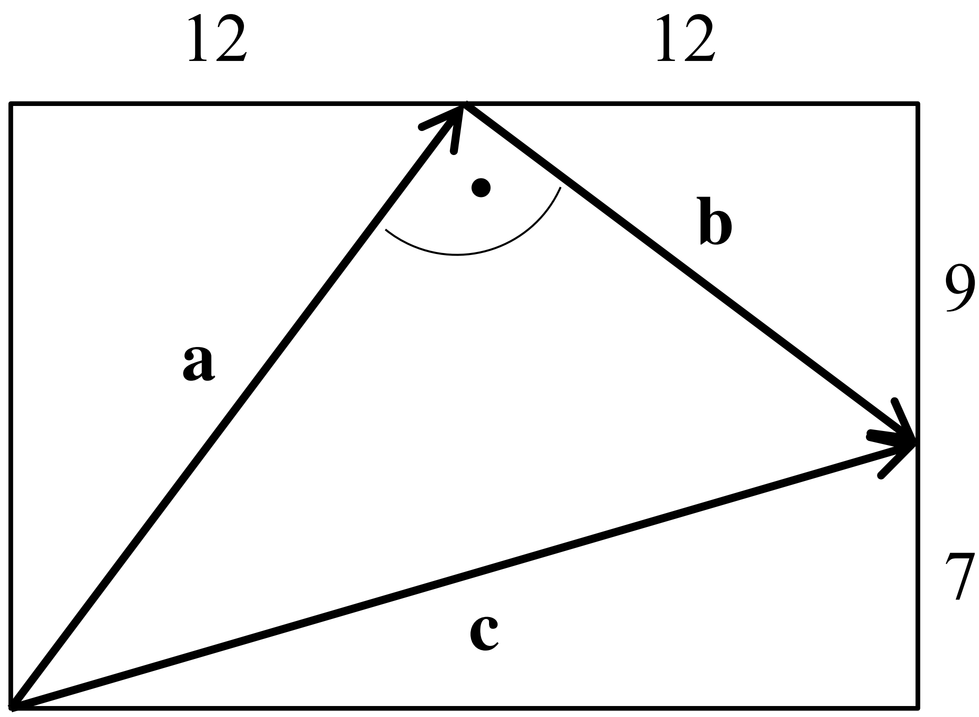


Der Satz des Pythagoras

Die Seitenvektoren lauten jetzt: $\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2}$

$$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - \ \ 9\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + \ \ 7\,\mathbf{e_2}$$



Beispiel: Rechtwinkliges Dreieck

Die Seitenvektoren lauten jetzt:

$$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2}$$
$$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2}$$
$$\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$$

Um den Satz des Pythagoras nachzurechnen, müssen wir die Seitenvektoren quadrieren:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^2 &= (12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2})^2 \\
&= (12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2})\,(12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2}) \\
&= 144\,\mathbf{e_1}^2 + 192\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} + 192\,\mathbf{e_2}\mathbf{e_1} + 256\,\mathbf{e_2}^2 \\
&= 144 + 192\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} - 192\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} + 256 \\
&= 400
\end{aligned}$$

Beispiel: Rechtwinkliges Dreieck

Seitenvektoren: $\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2}$ $\quad\mathbf{a}^2 = 400$

$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - \ \ 9\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + \ \ 7\,\mathbf{e_2}$

Um den Satz des Pythagoras nachzurechnen, müssen wir die Seitenvektoren quadrieren:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}^2 &= (12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2})^2 \\
&= (12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2})\,(12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2}) \\
&= 144\,\mathbf{e_1}^2 - 108\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} - 108\,\mathbf{e_2}\mathbf{e_1} + 81\,\mathbf{e_2}^2 \\
&= 144 - 108\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} + 108\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} + 81 \\
&= 225
\end{aligned}
$$

Beispiel: Rechtwinkliges Dreieck

Seitenvektoren:

$$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{a}^2 = 400$$

$$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{b}^2 = 225$$

$$\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$$

Um den Satz des Pythagoras nachzurechnen, müssen wir die Seitenvektoren quadrieren:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^2 &= (24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2})^2 \\ &= (24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2})\,(24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}) \\ &= 576\,\mathbf{e_1}^2 + 168\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} + 168\,\mathbf{e_2}\mathbf{e_1} + 49\,\mathbf{e_2}^2 \\ &= 576 + 168\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} - 168\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} + 49 \\ &= 625\end{aligned}$$

Beispiel: Rechtwinkliges Dreieck

Seitenvektoren:

$$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{a}^2 = 400$$
$$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - \ \ 9\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{b}^2 = 225$$
$$\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + \ \ 7\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{c}^2 = 625$$

Und wir benötigen das innere Produkt der Vektoren der beiden Katheten **a** und **b**:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} &= (12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2}) \bullet (12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2})\\ &= 12 \cdot 12\,\mathbf{e_1}^2 + 16 \cdot (-9)\,\mathbf{e_2}^2\\ &= 144 - 144\\ &= 0\end{aligned}$$

Beispiel: Rechtwinkliges Dreieck

Das innere Produkt ist Null!

Das ist bei senkrecht zueinander stehenden Vektoren immer so, denn das innere Produkt ist proportional zum Kosinus des eingeschlossenen Winkels:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \cos \gamma$$

Und bei $\gamma = 90°$ gilt dann automatisch:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \cos 90° = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\ 0 = 0$$

Dass innere Produkt zweier senkrecht zueinander stehender Vektoren ist immer Null.

Der Satz des Pythagoras

Das innere Produkt zweier senkrecht zueinander stehender Vektoren ist immer Null: $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$

Deshalb können wir den Verallgemeinerten Satz des Pythagoras

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{2\ a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{c}^2$$

im Spezialfall rechtwinkliger Dreiecke vereinfachen zu:

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

Der Satz des Pythagoras

Das innere Produkt zweier senkrecht zueinander stehender Vektoren ist immer Null: $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$

Deshalb können wir den Verallgemeinerten Satz des Pythagoras

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{2}\ \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{c}^2$$

im Spezialfall rechtwinkliger Dreiecke vereinfachen zu:

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

Achtung: Das ist nicht die Lehrbuch-Fassung, die Sie in normalen Schulbüchern oder anderen normalen Mathematikbüchern finden!

Der Satz des Pythagoras

Für rechtwinklige Dreiecke gilt also:

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

Achtung: **a**, **b** und **c** sind hier fett gedruckte Vektoren.

Das ist nicht die Lehrbuch-Fassung, die Sie in normalen Schulbüchern oder anderen normalen Mathematikbüchern finden. In normalen Büchern steht:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dort sind a, b und c keine Vektoren (und keine Matrizen), sondern Streckenlängen (und damit reelle Zahlen).

Beispiel: Rechtwinkliges Dreieck

Seitenvektoren: $\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2}$ $\quad \mathbf{a}^2 = 400$

$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2}$ $\quad \mathbf{b}^2 = 225$

$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$ $\quad \mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$ $\quad \mathbf{c}^2 = 625$

Jetzt überprüfen wir den Satz des Pythagoras:

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = 400 + 225 = 625 = \mathbf{c}^2$$

$\Rightarrow$ Das Resultat bestätigt den Satz des Pythagoras.

Beispiel: Rechtwinkliges Dreieck

Seitenvektoren:	$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2}$	$\mathbf{a}^2 = 400$
	$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2}$	$\mathbf{b}^2 = 225$
$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$	$\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$	$\mathbf{c}^2 = 625$

Jetzt überprüfen wir den Satz des Pythagoras:

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = 400 + 225 = 625 = \mathbf{c}^2$$

$\Rightarrow$ Das Resultat bestätigt den Satz des Pythagoras.

Und eigentlich müssen wir hier ja schreiben:

Das Resultat bestätigt den Spezialfall des Satzes des Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke.

Und der kleine Computer rechnet so:

Seitenvektoren: $\mathbf{a} = \mathbf{12\ e_1} + \mathbf{16\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 16 & -12 \end{pmatrix}$

$\mathbf{b} = \mathbf{12\ e_1} - \mathbf{9\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$

$\mathbf{c} = \mathbf{24\ e_1} + \mathbf{7\ e_2} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc|cc} \mathbf{a}^2 & & 12 & 16 \\ & & 16 & -12 \\ \hline 12 & 16 & 400 & 0 \\ 16 & -12 & 0 & 400 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix} = \mathbf{400}$$

Und der kleine Computer rechnet so:

$$\mathbf{a} = \mathbf{12\ e_1} + \mathbf{16\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 16 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix} = \mathbf{400}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{12\ e_1} - \mathbf{9\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{24\ e_1} + \mathbf{7\ e_2} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} \mathbf{b}^2 & & 12 & -9 \\ & & -9 & -12 \\ \hline 12 & -9 & 225 & 0 \\ -9 & -12 & 0 & 225 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 225 & 0 \\ 0 & 225 \end{pmatrix} = \mathbf{225}$$

Und der kleine Computer rechnet so:

$$\mathbf{a} = \mathbf{12\ e_1} + \mathbf{16\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 16 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix} = \mathbf{400}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{12\ e_1} - \mathbf{9\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ -9 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 225 & 0 \\ 0 & 225 \end{pmatrix} = \mathbf{225}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{24\ e_1} + \mathbf{7\ e_2} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} \mathbf{c}^2 & & 24 & 7 \\ & & 7 & -24 \\ \hline 24 & 7 & 625 & 0 \\ 7 & -24 & 0 & 625 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

Und der kleine Computer rechnet so:

$$\mathbf{a} = \mathbf{12\ e_1} + \mathbf{16\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 16 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix} = \mathbf{400}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{12\ e_1} - \mathbf{9\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ -9 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 225 & 0 \\ 0 & 225 \end{pmatrix} = \mathbf{225}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{24\ e_1} + \mathbf{7\ e_2} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

a b		12	– 9
		– 9	– 12
12	16	0	– 300
16	– 12	300	0

b a		12	16
		16	– 12
12	– 9	0	300
– 9	– 12	– 300	0

Und der kleine Computer rechnet so:

$$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 16 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix} = \mathbf{400}$$

$$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - \;\; 9\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ -9 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 225 & 0 \\ 0 & 225 \end{pmatrix} = \mathbf{225}$$

$$\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + \;\; 7\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

$$\mathbf{a\,b} = \begin{pmatrix} 0 & -300 \\ 300 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b\,a} = \begin{pmatrix} 0 & 300 \\ -300 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a \bullet b} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{a\,b} + \mathbf{b\,a}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{0}$$

Nebenbemerkung

$$\mathbf{a} = \mathbf{12}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{16}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 16 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix} = \mathbf{400}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{12}\ \mathbf{e_1} - \ \mathbf{9}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ -9 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 225 & 0 \\ 0 & 225 \end{pmatrix} = \mathbf{225}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{24}\ \mathbf{e_1} + \ \mathbf{7}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

$$\mathbf{a\,b} = \begin{pmatrix} 0 & -300 \\ 300 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b\,a} = \begin{pmatrix} 0 & 300 \\ -300 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{a\,b} + \mathbf{b\,a}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Auch mit Hilfe der Matrizenrechnung ergibt sich ein inneres Produkt von Null. Wir können aber noch etwas anderes aus dem Zwischenergebnis ablesen:

Nebenbemerkung

$$\mathbf{a} = \mathbf{12\ e_1} + \mathbf{16\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 16 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix} = \mathbf{400}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{12\ e_1} - \mathbf{9\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ -9 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 225 & 0 \\ 0 & 225 \end{pmatrix} = \mathbf{225}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{24\ e_1} + \mathbf{7\ e_2} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

$$\mathbf{a\ b} = \begin{pmatrix} 0 & -300 \\ 300 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b\ a} = \begin{pmatrix} 0 & 300 \\ -300 & 0 \end{pmatrix}$$

Auch mit Hilfe der Matrizenrechnung ergibt sich ein inneres Produkt von Null. Wir können aber noch etwas anderes aus dem Zwischenergebnis ablesen:

Das durch die Vektoren **a** und **b** aufgespannte Rechteck besitzt einen Flächeninhalt von 300 LE^2.

Nebenbemerkung

$$\mathbf{a} = \mathbf{12\ e_1} + \mathbf{16\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 16 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix} = \mathbf{400}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{12\ e_1} - \ \mathbf{9\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ -9 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 225 & 0 \\ 0 & 225 \end{pmatrix} = \mathbf{225}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{24\ e_1} + \ \mathbf{7\ e_2} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

$$\mathbf{a\ b} = \begin{pmatrix} 0 & -300 \\ 300 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b\ a} = \begin{pmatrix} 0 & 300 \\ -300 & 0 \end{pmatrix}$$

Auch mit Hilfe der Matrizenrechnung ergibt sich ein inneres Produkt von Null. Wir können aber noch etwas anderes aus dem Zwischenergebnis ablesen:

Das durch die Vektoren **a** und **b** aufgespannte Rechteck besitzt einen Flächeninhalt von 300 LE^2.

Und so rechnet der kleine Computer weiter:

Berechnete Größen:

$$\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix} = \mathbf{400}$$

$$\mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 225 & 0 \\ 0 & 225 \end{pmatrix} = \mathbf{225}$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

Und wir überprüfen den Satz des Pythagoras für recht-winklige Dreiecke mit Hilfe von (2 x 2)-Matrizen:

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{400} + \mathbf{225} = \mathbf{625} = \mathbf{c}^2$$

$\Rightarrow$ Gleiches Resultat wir in Folie 46 (nur eben als Matrizenrechnung und deshalb **fett** gedruckt)

Verallgemeinerter Höhensatz

Als nächstes schauen wir uns den Verallgemeinerten Höhensatz bzw. den Höhensatz des Euklid für recht-winklige Dreiecke an.

Wieder formulieren wir alles mit Hilfe von Vektoren und nicht lediglich durch Streckenlängen.

Verallgemeinerter Höhensatz

Als nächstes schauen wir uns den Verallgemeinerten Höhensatz bzw. den Höhensatz des Euklid für recht-winklige Dreiecke an.

Wieder formulieren wir alles mit Hilfe von Vektoren und nicht lediglich durch Streckenlängen, denn wir folgen dem Diktum von Donald E. Knuth:

»Premature optimization is the root of all evil.«

Verallgemeinerter Höhensatz

Als nächstes schauen wir uns den Verallgemeinerten Höhensatz bzw. den Höhensatz des Euklid für rechtwinklige Dreiecke an.

Wieder formulieren wir alles mit Hilfe von Vektoren und nicht lediglich durch Streckenlängen, denn wir folgen dem Diktum von Donald E. Knuth:

»Premature optimization is the root of all evil.«

Eine Verwendung von Streckenlängen ist eine vorschnelle Vereinfachung (oder vorschnelle Optimierung), die die Wurzel allen Übels darstellt.

Übrigens ist dieser Spruch zitiert aus dem netten Buch:

Jochen Ziegenbalg, Oliver Ziegenbalg, Bernd Ziegenbalg: Algorithmen von Hammurapi bis Gödel. 4. Auflage, Springer Spektrum / Springer Fachmedien, Wiesbaden 2016, S. 155.

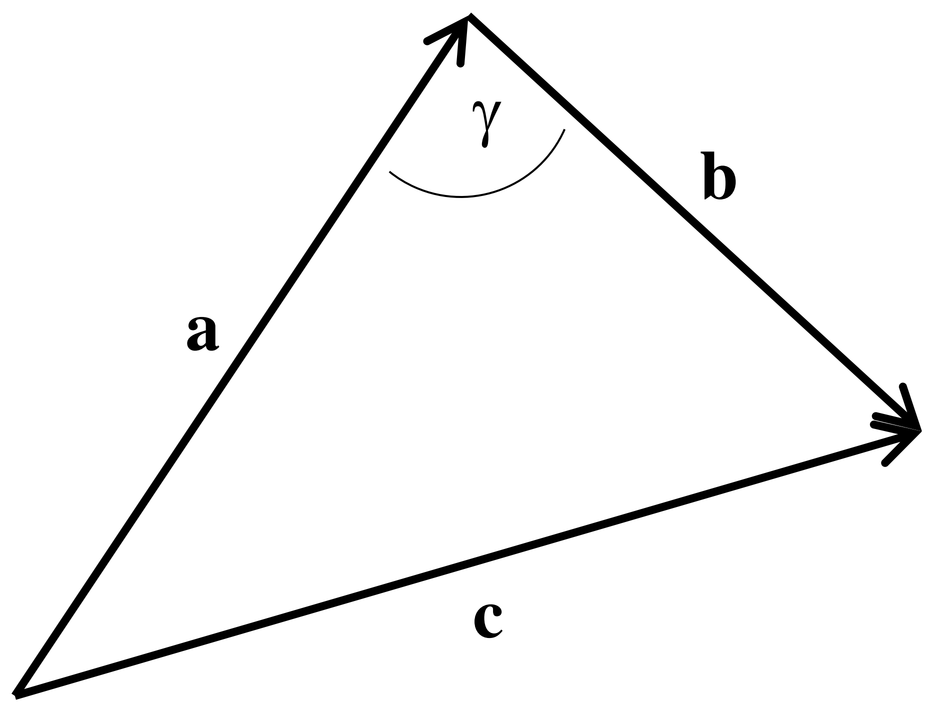
→ Diktum von Donald E. Knuth:

»Premature optimization is the root of all evil.«

Eine Verwendung von Streckenlängen ist eine vorschnelle Vereinfachung (oder vorschnelle Optimierung), die vermieden werden sollte.

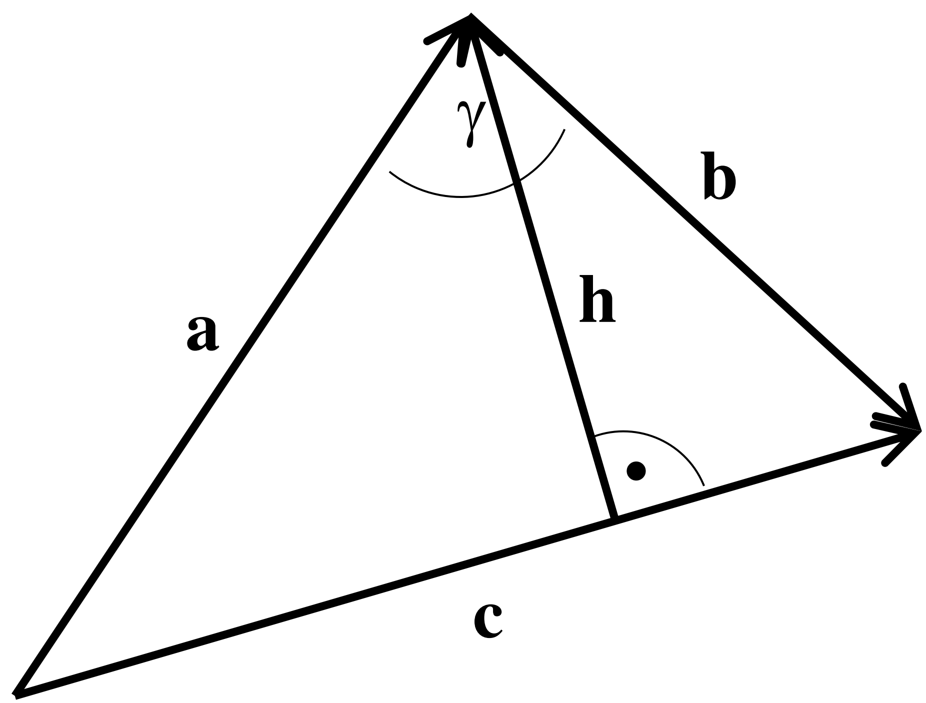
Verallgemeinerter Höhensatz

Jetzt suchen wir nach einer Beziehung, die den Vektor der Höhe **h** über **c** eines beliebigen Dreiecks mit den anderen Größen in Zusammenhang setzt.



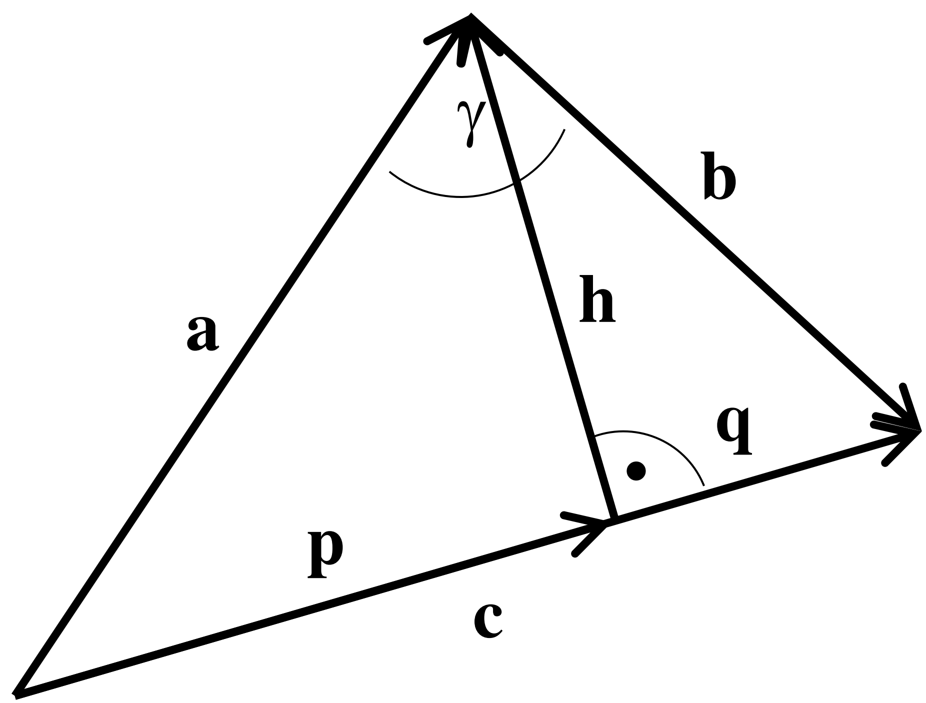
Verallgemeinerter Höhensatz

Der Vektor der Höhe **h** steht senkrecht zum Seitenvektor **c** :



Verallgemeinerter Höhensatz

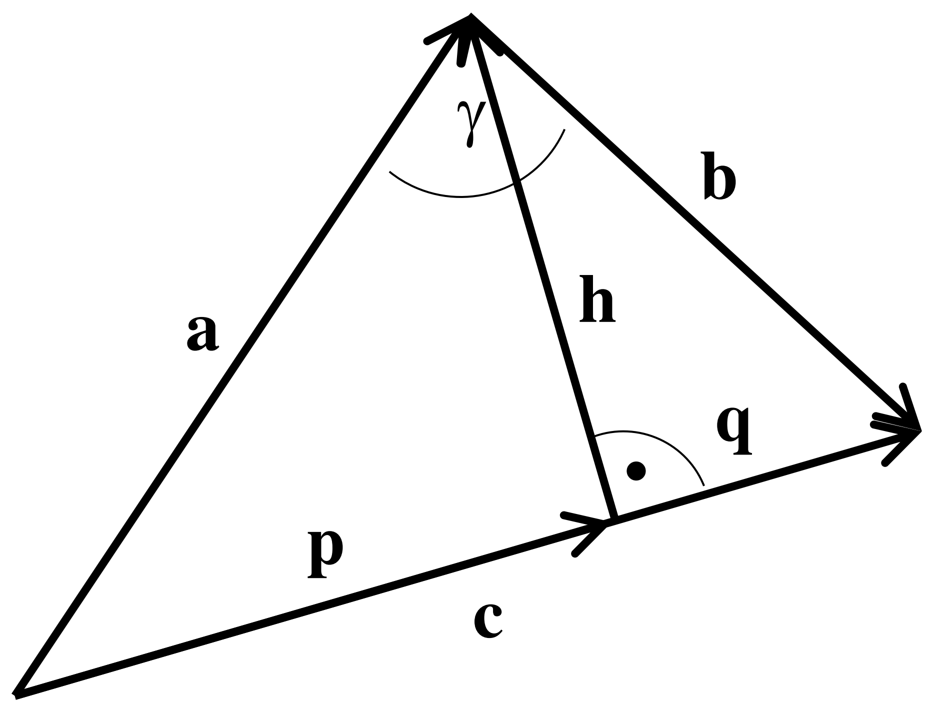
Und die anderen beiden wichtigen Größen sind die Vektoren der Teilstrecken **p** und **q** des Seitenvektors **c**:



Verallgemeinerter Höhensatz

Für alle Dreiecke gilt immer und ewig:

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{c}$$



Verallgemeinerter Höhensatz

Für alle Dreiecke gilt immer und ewig:

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{c}$$

Und diese Vektorsumme wird wieder quadriert:

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 = \mathbf{c}^2$$

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q})\,(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mathbf{c}^2$$

$$\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}\,\mathbf{q} + \mathbf{q}\,\mathbf{p} + \mathbf{q}^2 = \mathbf{c}^2$$

Verallgemeinerter Höhensatz

Für alle Dreiecke gilt also immer und ewig:

$$\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}\,\mathbf{q} + \mathbf{q}\,\mathbf{p} + \mathbf{q}^2 = \mathbf{c}^2$$

Da **p** und **q** parallel sind, ist ihr Produkt kommutativ:

$$\mathbf{p}\,\mathbf{q} = \mathbf{q}\,\mathbf{p}$$

Damit ergibt sich für die oben angegebene Formel:

$$\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}\,\mathbf{q} + \mathbf{p}\,\mathbf{q} + \mathbf{q}^2 = \mathbf{c}^2$$

$$\mathbf{p}^2 + \mathbf{2}\,\mathbf{p}\,\mathbf{q} + \mathbf{q}^2 = \mathbf{c}^2$$

Verallgemeinerter Höhensatz

Es gilt also für immer und ewig und bis in alle Unendlichkeit für alle möglichen Dreiecke:

$$\mathbf{p}^2 + \mathbf{2\,p\,q} + \mathbf{q}^2 = \mathbf{c}^2$$

Diese Formel kann nach **p q** aufgelöst werden:

$$\mathbf{p\,q} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{c}^2 - \mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2)$$

Verallgemeinerter Höhensatz

Es gilt also für immer und ewig und bis in alle Unendlichkeit für alle möglichen Dreiecke:

$$\mathbf{p\,q} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{c}^2 - \mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2)$$

Außerdem ist bekannt:

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{2\,a \bullet b}$$

→ Verallgemeinerter Satz des Pythagoras

Verallgemeinerter Höhensatz

Es gilt also für immer und ewig und bis in alle Unendlichkeit für alle möglichen Dreiecke:

$$\mathbf{p}\,\mathbf{q} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{c}^2 - \mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2)$$

Außerdem ist bekannt:

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{2}\,\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

$$\mathbf{h}^2 = \mathbf{a}^2 - \mathbf{p}^2 = \mathbf{b}^2 - \mathbf{q}^2$$

→ Satz des Pythagoras für die beiden rechtwinkligen Teildreiecke

Verallgemeinerter Höhensatz

Es gilt also für immer und ewig und bis in alle Unendlichkeit für alle möglichen Dreiecke:

$$\mathbf{p}\,\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{c}^2 - \mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2)$$

Außerdem ist bekannt:

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\,\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

Also: $-\mathbf{p}^2 = \mathbf{h}^2 - \mathbf{a}^2$ und $-\mathbf{q}^2 = \mathbf{h}^2 - \mathbf{b}^2$

Diese drei Beziehungen werden in die oben angegebene Formel eingesetzt.

Verallgemeinerter Höhensatz

Es gilt also für immer und ewig und bis in alle Unendlichkeit für alle möglichen Dreiecke:

$$\mathbf{p\,q} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{c}^2 - \mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{2\,a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{h}^2 - \mathbf{a}^2 + \mathbf{h}^2 - \mathbf{b}^2)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{2\,h}^2 + \mathbf{2\,a} \bullet \mathbf{b})$$

$$= \mathbf{h}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

Verallgemeinerter Höhensatz

Es gilt also für immer und ewig und bis in alle Unendlichkeit für alle möglichen Dreiecke:

$$\mathbf{p\,q} = \mathbf{h}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

Diese Beziehung wird „Verallgemeinerter Höhensatz“ genannt.

Höhensatz und Verallgemeinerter Höhensatz

Es gilt also für immer und ewig und bis in alle Unendlichkeit für alle möglichen Dreiecke:

$$\mathbf{p\,q} = \mathbf{h}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

Diese Beziehung wird „Verallgemeinerter Höhensatz" genannt.

Und der ursprüngliche „Höhensatz des Euklid" lautet

$$\mathbf{p\,q} = \mathbf{h}^2$$

für rechtwinklige Dreiecke, da das innere Produkt der beiden Katheten **a** und **b** dann Null ist: $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$

Verallgemeinerte Kathetensätze

Mit Hilfe des Verallgemeinerten Höhensatzes können die beiden Kathetensätze durch eine einfache Ergänzung hergeleitet werden.

Dazu setzen wir den Verallgemeinerten Höhensatz

$$\mathbf{p}\,\mathbf{q} = \mathbf{h}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

lediglich in den Satz des Pythagoras für die beiden rechtwinkligen Teildreiecke

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{h}^2 + \mathbf{p}^2 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b}^2 = \mathbf{h}^2 + \mathbf{q}^2$$

ein.

Verallgemeinerte Kathetensätze

Mit Hilfe des Verallgemeinerten Höhensatzes können die beiden Kathetensätze durch eine einfache Ergänzung hergeleitet werden.

Dazu setzen wir den Verallgemeinerten Höhensatz

$$\mathbf{p\,q} = \mathbf{h}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

lediglich in den Satz des Pythagoras für die beiden rechtwinkligen Teildreiecke

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{h}^2 + \mathbf{p}^2 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b}^2 = \mathbf{h}^2 + \mathbf{q}^2$$

ein. Allerdings müssen wir den Verallgemeinerten Höhensatz vorher umformen.

Verallgemeinerte Kathetensätze

Mit Hilfe des Verallgemeinerten Höhensatzes können die beiden Kathetensätze durch eine einfache Ergänzung hergeleitet werden.

Dazu setzen wir den umgeformten Höhensatz

$$\mathbf{h}^2 = \mathbf{p}\,\mathbf{q} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

lediglich in den Satz des Pythagoras für die beiden rechtwinkligen Teildreiecke

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{h}^2 + \mathbf{p}^2 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b}^2 = \mathbf{h}^2 + \mathbf{q}^2$$

ein.

Verallgemeinerte Kathetensätze

Also erhalten wir die folgenden Umformungen:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{h}^2 + \mathbf{p}^2 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b}^2 = \mathbf{h}^2 + \mathbf{q}^2$$

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{p}\,\mathbf{q} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{p}^2 \qquad \mathbf{b}^2 = \mathbf{p}\,\mathbf{q} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{q}^2$$

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{p}\,\mathbf{q} + \mathbf{p}\,\mathbf{p} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \qquad \mathbf{b}^2 = \mathbf{p}\,\mathbf{q} + \mathbf{q}\,\mathbf{q} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{p}\,(\mathbf{q} + \mathbf{p}) - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \qquad \mathbf{b}^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{q})\,\mathbf{q} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{p}\,\mathbf{c} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \qquad \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}\,\mathbf{q} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{q}\,\mathbf{c} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

Denn **c** und **q** sind parallel, so dass gilt: $\mathbf{c}\,\mathbf{q} = \mathbf{q}\,\mathbf{c}$

Verallgemeinerte Kathetensätze

Es gilt also für immer und ewig und bis in alle Unendlichkeit für alle möglichen Dreiecke:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{p}\ \mathbf{c} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b}^2 = \mathbf{q}\ \mathbf{c} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

Das innere Produkt kann nun noch auf die andere Gleichungsseite gebracht werden.

Verallgemeinerte Kathetensätze

Es gilt also für immer und ewig und bis in alle Unendlichkeit für alle möglichen Dreiecke:

$$\mathbf{p\ c} = \mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{q\ c} = \mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

Diese Beziehungen werden „Verallgemeinerte Kathetensätze“ genannt.

Kathetensätze und Verallgemeinerte Kathetensätze

Es gilt also für immer und ewig und bis in alle Unendlichkeit für alle möglichen Dreiecke:

$$\mathbf{p}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{q}\,\mathbf{c} = \mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

Diese Beziehungen werden „Verallgemeinerte Kathetensätze“ genannt.

Und die ursprünglichen „Kathetensätze des Euklid“ lauten für rechtwinklige Dreiecke

$$\mathbf{p}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}^2 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{q}\,\mathbf{c} = \mathbf{b}^2$$

da das innere Produkt der beiden Katheten **a** und **b** dann Null ist: $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$

Beispielaufgaben

Wie lauten die Vektoren der Teilabschnitte **p** und **q** in unserem Beispieldreieck ohne rechten Winkel?

Und wie lauten die Vektoren der Teilhypotenusen **p** und **q** in unserem rechtwinkligen Beispieldreieck?

Das rechnen wir in den folgenden Folien aus – einmal im Darstellungsmodus der Geometrischen Algebra und ein zweites Mal mit den (2 x 2)-Matrizen unseres kleinen, unscheinbaren Computers.

Beispielaufgaben

Wie immer, wenn wir eine unbekannte Größe suchen, müssen wir die Gleichung, die wir zur Bestimmung dieser Größe verwenden wollen, nach dieser Größe auflösen.

Wir lösen die Verallgemeinerten Kathetensätze

$$\mathbf{p\ c} = \mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{q\ c} = \mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

also nach **p** bzw. **q** auf.

Division durch Vektoren

Wir lösen die Verallgemeinerten Kathetensätze

$$\mathbf{p}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{q}\,\mathbf{c} = \mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

also nach **p** bzw. **q** auf.

Dazu müssen wir lediglich durch den Vektor **c** dividieren bzw. mit dem Inversen dieses Vektors

$$\mathbf{c}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^2}\,\mathbf{c}$$

multiplizieren.

Division durch Vektoren

Und der Trick dabei ist:

$$\mathbf{c}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^2}\,\mathbf{c}$$

Division durch einen Vektor

Division durch einen Skalar

$\Rightarrow$ Wir ersetzen die Division durch einen Vektor durch eine Division durch einen Skalar, die keine Probleme bereitet und immer erlaubt ist.

Division durch Vektoren

Wir lösen die Verallgemeinerten Kathetensätze

$\mathbf{p}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ und $\mathbf{q}\,\mathbf{c} = \mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$

also nach **p** bzw. **q** auf:

$\mathbf{p} = (\mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\mathbf{c}^{-1}$ $\mathbf{q} = (\mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\mathbf{c}^{-1}$

$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^2}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\mathbf{c}$ $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^2}(\mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\mathbf{c}$

Beispielaufgaben

Wir lösen die Verallgemeinerten Kathetensätze

$$\mathbf{p}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{q}\,\mathbf{c} = \mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

also nach **p** bzw. **q** auf:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\mathbf{c}^{-1} \qquad \mathbf{q} = (\mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\mathbf{c}^{-1}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c^2}}\,(\mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\mathbf{c} \qquad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c^2}}\,(\mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\mathbf{c}$$

Und da wir die einzelnen Terme schon berechnet haben, müssen wir diese einfach nur noch einsetzen.

Beispiel: Beliebiges Dreieck

Für das Dreieck ohne rechten Winkel hatten wir bereits berechnet:

$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2}$ $\quad \mathbf{a}^2 = 468$

$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2}$ $\quad \mathbf{b}^2 = 265$

$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -54$ $\quad \mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$ $\quad \mathbf{c}^2 = 625$

Das Einsetzen ergibt:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\mathbf{c}^2}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \frac{1}{625}(468 - 54)(24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2})$$

$$= \frac{414}{625}(24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2})$$

$$= 15{,}8976\,\mathbf{e_1} + 4{,}6368\,\mathbf{e_2}$$

Beispiel: Beliebiges Dreieck

Für das Dreieck ohne rechten Winkel hatten wir bereits berechnet:

$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2}$ $\quad \mathbf{a}^2 = 468$

$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2}$ $\quad \mathbf{b}^2 = 265$

$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -54$ $\quad \mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$ $\quad \mathbf{c}^2 = 625$

Das Einsetzen ergibt:

$$\mathbf{q} = \frac{1}{\mathbf{c}^2}(\mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \frac{1}{625}(265 - 54)(24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2})$$

$$= \frac{211}{625}(24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2})$$

$$= 8{,}1024\,\mathbf{e_1} + 2{,}3632\,\mathbf{e_2}$$

Beispiel: Beliebiges Dreieck

Für das Dreieck ohne rechten Winkel hatten wir bereits berechnet:

$$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{a}^2 = 468$$

$$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{b}^2 = 265$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -54 \qquad \mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{c}^2 = 625$$

Das Einsetzen ergibt:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^2}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\mathbf{c} = 15{,}8976\,\mathbf{e_1} + 4{,}6368\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^2}(\mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\mathbf{c} = 8{,}1024\,\mathbf{e_1} + 2{,}3632\,\mathbf{e_2}$$

Probe: $\mathbf{p} + \mathbf{q} = 24{,}0000\,\mathbf{e_1} + 7{,}0000\,\mathbf{e_2} = \mathbf{c}$

Lösung: Beliebiges Dreieck

Für das Dreieck ohne rechten Winkel hatten wir bereits berechnet:

$$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{a}^2 = 468$$

$$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{b}^2 = 265$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -54 \qquad \mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{c}^2 = 625$$

Die Vektoren der Teilabschnitte **p** und **q** lauten:

$$\mathbf{p} = \frac{9936}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{2898}{625}\,\mathbf{e_2} = 15{,}8976\,\mathbf{e_1} + 4{,}6368\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{q} = \frac{5064}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{1477}{625}\,\mathbf{e_2} = 8{,}1024\,\mathbf{e_1} + 2{,}3632\,\mathbf{e_2}$$

Und der kleine Computer rechnet so:

Bekannte Matrizen:

$$\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 468 & 0 \\ 0 & 468 \end{pmatrix} = \mathbf{468}$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -54 \end{pmatrix} = -\mathbf{54} \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 265 & 0 \\ 0 & 265 \end{pmatrix} = \mathbf{265}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} = \mathbf{24}\,\mathbf{e_1} + \mathbf{7}\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

Das Einsetzen ergibt:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c^2}} = \begin{pmatrix} 468-54 & 0 \\ 0 & 468-54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{24}{625} & \frac{7}{625} \\ \frac{7}{625} & -\frac{24}{625} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9936}{625} & \frac{2898}{625} \\ \frac{2898}{625} & -\frac{9936}{625} \end{pmatrix}$$

Und der kleine Computer rechnet so:

Bekannte Matrizen:

$$\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 468 & 0 \\ 0 & 468 \end{pmatrix} = \mathbf{468}$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -54 \end{pmatrix} = -\,\mathbf{54} \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 265 & 0 \\ 0 & 265 \end{pmatrix} = \mathbf{265}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} = \mathbf{24\,e_1} + \mathbf{7\,e_2} \qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

Das Einsetzen ergibt:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c^2}} = \begin{pmatrix} 468 - 54 & 0 \\ 0 & 468 - 54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{24}{625} & \frac{7}{625} \\ \frac{7}{625} & -\frac{24}{625} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15{,}8976 & 4{,}6368 \\ 4{,}6368 & -15{,}8976 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{15{,}8976\,e_1} + \mathbf{4{,}6368\,e_2}$$

Und der kleine Computer rechnet so:

Bekannte Matrizen:

$$\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 468 & 0 \\ 0 & 468 \end{pmatrix} = \mathbf{468}$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -54 \end{pmatrix} = -\,\mathbf{54} \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 265 & 0 \\ 0 & 265 \end{pmatrix} = \mathbf{265}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} = \mathbf{24}\,\mathbf{e_1} + \mathbf{7}\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

Das Einsetzen ergibt:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c^2}} = \begin{pmatrix} 265-54 & 0 \\ 0 & 265-54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{24}{625} & \frac{7}{625} \\ \frac{7}{625} & -\frac{24}{625} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5064}{625} & \frac{1477}{625} \\ \frac{1477}{625} & -\frac{5064}{625} \end{pmatrix}$$

Und der kleine Computer rechnet so:

Bekannte Matrizen:

$$\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 468 & 0 \\ 0 & 468 \end{pmatrix} = \mathbf{468}$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -54 \end{pmatrix} = -\,\mathbf{54} \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 265 & 0 \\ 0 & 265 \end{pmatrix} = \mathbf{265}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} = \mathbf{24\,e_1} + \mathbf{7\,e_2} \qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

Das Einsetzen ergibt:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}^2} = \begin{pmatrix} 265-54 & 0 \\ 0 & 265-54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{24}{625} & \frac{7}{625} \\ \frac{7}{625} & -\frac{24}{625} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8{,}1024 & 2{,}3632 \\ 2{,}3632 & -8{,}1024 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{8{,}1024\,e_1} + \mathbf{2{,}3632\,e_2}$$

Und der kleine Computer rechnet so:

Bekannte Matrizen:

$$\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 468 & 0 \\ 0 & 468 \end{pmatrix} = \mathbf{468}$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -54 \end{pmatrix} = \mathbf{-54} \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 265 & 0 \\ 0 & 265 \end{pmatrix} = \mathbf{265}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} = \mathbf{24\,e_1 + 7\,e_2} \qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

Probe:

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 15{,}8976 & 4{,}6368 \\ 4{,}6368 & -15{,}8976 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8{,}1024 & 2{,}3632 \\ 2{,}3632 & -8{,}1024 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24{,}0000 & 7{,}0000 \\ 7{,}0000 & -24{,}0000 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{24\,e_1 + 7\,e_2} = \mathbf{c}$$

Lösung des kleinen Computers:

Bekannte Matrizen:

$$\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 468 & 0 \\ 0 & 468 \end{pmatrix} = \mathbf{468}$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -54 \end{pmatrix} = \mathbf{-\,54} \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 265 & 0 \\ 0 & 265 \end{pmatrix} = \mathbf{265}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} = \mathbf{24\,e_1} + \mathbf{7\,e_2} \qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

Die Vektoren der Teilabschnitte **p** und **q** lauten:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}^2} = \begin{pmatrix} 15{,}8976 & 4{,}6368 \\ 4{,}6368 & -15{,}8976 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{15{,}8976\,e_1} + \mathbf{4{,}6368\,e_2}$$

$$\mathbf{q} = (\mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}^2} = \begin{pmatrix} 8{,}1024 & 2{,}3632 \\ 2{,}3632 & -8{,}1024 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{8{,}1024\,e_1} + \mathbf{2{,}3632\,e_2}$$

Beispielaufgaben

In vollkommen analoger Art und Weise kann die zweite Beispielaufgabe gelöst werden. Sie lautete:

Und wie lauten die Vektoren der Teilhypotenusen **p** und **q** in unserem rechtwinkligen Beispieldreieck?

Nun ist das innere Produkt der beiden Katheten **a** und **b** Null und alles wird noch einfacher.

Beispiel: Rechtwinkliges Dreieck

Wir lösen die Kathetensätze des Euklid

$$\mathbf{p}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}^2 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{q}\,\mathbf{c} = \mathbf{b}^2$$

nach **p** bzw. **q** auf:

$$\mathbf{p} = \mathbf{a}^2\,\mathbf{c}^{-1} \qquad\qquad \mathbf{q} = \mathbf{b}^2\,\mathbf{c}^{-1}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{c}^2}\,\mathbf{c} \qquad\qquad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{c}^2}\,\mathbf{c}$$

Und da wir die einzelnen Terme schon berechnet haben, müssen wir diese einfach nur noch einsetzen.

Beispiel: Rechtwinkliges Dreieck

Für das rechtwinklige Dreieck hatten wir bereits berechnet:

$$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{a}^2 = 400$$

$$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{b}^2 = 225$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0 \qquad \mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{c}^2 = 625$$

Das Einsetzen ergibt:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{c}^2}\,\mathbf{c} = \frac{400}{625}(24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2})$$

$$= \frac{384}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{112}{25}\,\mathbf{e_2}$$

$$= 15{,}36\,\mathbf{e_1} + 4{,}48\,\mathbf{e_2}$$

Beispiel: Rechtwinkliges Dreieck

Für das rechtwinklige Dreieck hatten wir bereits berechnet:

$$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{a}^2 = 400$$

$$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{b}^2 = 225$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0 \qquad \mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{c}^2 = 625$$

Das Einsetzen ergibt:

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{b^2}}{\mathbf{c^2}}\,\mathbf{c} = \frac{225}{625}\,(24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2})$$

$$= \frac{216}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{63}{25}\,\mathbf{e_2}$$

$$= 8{,}64\,\mathbf{e_1} + 2{,}52\,\mathbf{e_2}$$

Beispiel: Rechtwinkliges Dreieck

Für das rechtwinklige Dreieck hatten wir bereits berechnet:

$$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{a}^2 = 400$$

$$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{b}^2 = 225$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0 \qquad \mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{c}^2 = 625$$

Das Einsetzen ergibt:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{c}^2}\,\mathbf{c} = \frac{384}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{112}{25}\,\mathbf{e_2} = 15{,}36\,\mathbf{e_1} + 4{,}48\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{c}^2}\,\mathbf{c} = \frac{216}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{63}{25}\,\mathbf{e_2} = 8{,}64\,\mathbf{e_1} + 2{,}52\,\mathbf{e_2}$$

Probe: $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \frac{600}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{175}{25}\,\mathbf{e_2} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2} = \mathbf{c}$

Lösung: Rechtwinkliges Dreieck

Für das rechtwinklige Dreieck hatten wir bereits berechnet:

$$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{a}^2 = 400$$

$$\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{b}^2 = 225$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0 \qquad \mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2} \qquad \mathbf{c}^2 = 625$$

Die Vektoren der Teilhypotenusen **p** und **q** lauten:

$$\mathbf{p} = \frac{384}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{112}{25}\,\mathbf{e_2} = 15{,}36\,\mathbf{e_1} + 4{,}48\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{q} = \frac{216}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{63}{25}\,\mathbf{e_2} = 8{,}64\,\mathbf{e_1} + 2{,}52\,\mathbf{e_2}$$

Und der kleine Computer rechnet so:

Bekannte Matrizen:

$$\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix} = \mathbf{400}$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 225 & 0 \\ 0 & 225 \end{pmatrix} = \mathbf{225}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} = \mathbf{24\, e_1} + \mathbf{7\, e_2} \qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

Das Einsetzen ergibt:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a^2}}{\mathbf{c^2}}\,\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \frac{400}{625} & 0 \\ 0 & \frac{400}{625} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{384}{25} & \frac{112}{25} \\ \frac{112}{25} & -\frac{384}{25} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15{,}36 & 4{,}48 \\ 4{,}48 & -15{,}36 \end{pmatrix} = \mathbf{15{,}36\, e_1} + \mathbf{4{,}48\, e_2}$$

Und der kleine Computer rechnet so:

Bekannte Matrizen:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} = \mathbf{24\,e_1 + 7\,e_2}$$

$$\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix} = \mathbf{400}$$

$$\mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 225 & 0 \\ 0 & 225 \end{pmatrix} = \mathbf{225}$$

$$\mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

Das Einsetzen ergibt:

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{b^2}}{\mathbf{c^2}}\,\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \frac{225}{625} & 0 \\ 0 & \frac{225}{625} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{216}{25} & \frac{63}{25} \\ \frac{63}{25} & -\frac{216}{25} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8{,}64 & 2{,}52 \\ 2{,}52 & -8{,}64 \end{pmatrix} = \mathbf{8{,}64\,e_1 + 2{,}52\,e_2}$$

Und der kleine Computer rechnet so:

Bekannte Matrizen:

$$\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix} = \mathbf{400}$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 225 & 0 \\ 0 & 225 \end{pmatrix} = \mathbf{225}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} = \mathbf{24\,e_1 + 7\,e_2} \qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

Probe:

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{384}{25} & \frac{112}{25} \\ \frac{112}{25} & -\frac{384}{25} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{216}{25} & \frac{63}{25} \\ \frac{63}{25} & -\frac{216}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{600}{25} & \frac{175}{25} \\ \frac{175}{25} & -\frac{600}{25} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} = \mathbf{24\,e_1 + 7\,e_2 = c}$$

Lösung des kleinen Computers:

Bekannte Matrizen: $\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix} = \mathbf{400}$

$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ $\qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 225 & 0 \\ 0 & 225 \end{pmatrix} = \mathbf{225}$

$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix} = \mathbf{24\,e_1 + 7\,e_2}$ $\qquad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$

Die Vektoren der Teilhypotenusen **p** und **q** lauten:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{384}{25} & \frac{112}{25} \\ \frac{112}{25} & -\frac{384}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15{,}36 & 4{,}48 \\ 4{,}48 & -15{,}36 \end{pmatrix} = \mathbf{15{,}36\,e_1 + 4{,}48\,e_2}$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{216}{25} & \frac{63}{25} \\ \frac{63}{25} & -\frac{216}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}64 & 2{,}52 \\ 2{,}52 & -8{,}64 \end{pmatrix} = \mathbf{8{,}64\,e_1 + 2{,}52\,e_2}$$

Höhensatz und Verallgemeinerten Höhensatz

Mit den Ergebnissen der beiden Beispielaufgaben kann der Verallgemeinerte Höhensatz in unserem Beispiel-dreieck ohne rechten Winkel bzw. der Höhensatz am rechtwinkligen Beispieldreieck nachgerechnet werden.

Nachrechnen des Höhensatzes

Für das rechtwinklige Dreieck ist bereits bekannt:

$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2}$ $\quad\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2}$ $\quad\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$

$$\mathbf{p} = \frac{384}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{112}{25}\,\mathbf{e_2} = 15{,}36\,\mathbf{e_1} + 4{,}48\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{q} = \frac{216}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{63}{25}\,\mathbf{e_2} = 8{,}64\,\mathbf{e_1} + 2{,}52\,\mathbf{e_2}$$

Nachrechnen des Höhensatzes

Für das rechtwinklige Dreieck ist bereits bekannt:

$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2}$ $\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2}$ $\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$

$$\mathbf{p} = \frac{384}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{112}{25}\,\mathbf{e_2} = 15{,}36\,\mathbf{e_1} + 4{,}48\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{q} = \frac{216}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{63}{25}\,\mathbf{e_2} = 8{,}64\,\mathbf{e_1} + 2{,}52\,\mathbf{e_2}$$

Höhenvektor:

$$\mathbf{h} = \mathbf{a} - \mathbf{p} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2} - (15{,}36\,\mathbf{e_1} + 4{,}48\,\mathbf{e_2})$$

$$= -3{,}36\,\mathbf{e_1} + 11{,}52\,\mathbf{e_2}$$

Nachrechnen des Höhensatzes

Für das rechtwinklige Dreieck ist bereits bekannt:

$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2}$ $\quad$ $\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2}$ $\quad$ $\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$

$$\mathbf{p} = \frac{384}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{112}{25}\,\mathbf{e_2} = 15{,}36\,\mathbf{e_1} + 4{,}48\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{q} = \frac{216}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{63}{25}\,\mathbf{e_2} = 8{,}64\,\mathbf{e_1} + 2{,}52\,\mathbf{e_2}$$

Alternative Berechnung des Höhenvektors:

$$\mathbf{h} = \mathbf{q} - \mathbf{b} = 8{,}64\,\mathbf{e_1} + 2{,}52\,\mathbf{e_2} - (12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2})$$

$$= -\,3{,}36\,\mathbf{e_1} + 11{,}52\,\mathbf{e_2}$$

Nachrechnen des Höhensatzes

Für das rechtwinklige Dreieck ist also bekannt:

$$\mathbf{p} = \frac{384}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{112}{25}\,\mathbf{e_2} = 15{,}36\;\mathbf{e_1} + 4{,}48\;\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{q} = \frac{216}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{63}{25}\,\mathbf{e_2} = 8{,}64\;\mathbf{e_1} + 2{,}52\;\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{h} = -\frac{84}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{288}{25}\,\mathbf{e_2} = -\,3{,}36\;\mathbf{e_1} + 11{,}52\;\mathbf{e_2}$$

Gilt $\mathbf{p}\,\mathbf{q} = \mathbf{h}^2$?

Nachrechnen des Höhensatzes

Für das rechtwinklige Dreieck ist also bekannt:

$$\mathbf{p} = \frac{384}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{112}{25}\,\mathbf{e_2} = 15{,}36\,\mathbf{e_1} + 4{,}48\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{q} = \frac{216}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{63}{25}\,\mathbf{e_2} = 8{,}64\,\mathbf{e_1} + 2{,}52\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{h} = -\frac{84}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{288}{25}\,\mathbf{e_2} = -\,3{,}36\,\mathbf{e_1} + 11{,}52\,\mathbf{e_2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{h}^2 = (-\,3{,}36)^2 + 11{,}52^2 = 144$$

$$\mathbf{p}\,\mathbf{q} = 15{,}36 \cdot 8{,}64 + 4{,}48 \cdot 2{,}52 = 144$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{p}\,\mathbf{q} = \mathbf{h}^2$ gilt für das rechtwinklige Beispieldreieck

Und der kleine Computer rechnet nach:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{384}{25} & \frac{112}{25} \\ \frac{112}{25} & -\frac{384}{25} \end{pmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{216}{25} & \frac{63}{25} \\ \frac{63}{25} & -\frac{216}{25} \end{pmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} -\frac{84}{25} & \frac{288}{25} \\ \frac{288}{25} & \frac{84}{25} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{p}\,\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{384}{25} & \frac{112}{25} \\ \frac{112}{25} & -\frac{384}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{216}{25} & \frac{63}{25} \\ \frac{63}{25} & -\frac{216}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 & 0 \\ 0 & 144 \end{pmatrix} = \mathbf{144}$$

$$\mathbf{h}^2 = \begin{pmatrix} -\frac{84}{25} & \frac{288}{25} \\ \frac{288}{25} & \frac{84}{25} \end{pmatrix}^{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} \frac{90000}{625} & 0 \\ 0 & \frac{90000}{625} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 & 0 \\ 0 & 144 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{p}\,\mathbf{q} = \mathbf{h}^2$ gilt für das rechtwinklige Beispieldreieck

Nachrechnen des Verallgemeinerten Höhensatzes

Für das Dreieck ohne rechten Winkel ist bereits bekannt:

$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2}$ $\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2}$ $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -54$

$$\mathbf{p} = \frac{9936}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{2898}{625}\,\mathbf{e_2} = 15{,}8976\,\mathbf{e_1} + 4{,}6368\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{q} = \frac{5064}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{1477}{625}\,\mathbf{e_2} = 8{,}1024\,\mathbf{e_1} + 2{,}3632\,\mathbf{e_2}$$

Nachrechnen des Verallgemeinerten Höhensatzes

Für das Dreieck ohne rechten Winkel ist bereits bekannt:

$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2}$ $\qquad$ $\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2}$ $\qquad$ $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -54$

$$\mathbf{p} = \frac{9936}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{2898}{625}\,\mathbf{e_2} = 15{,}8976\,\mathbf{e_1} + 4{,}6368\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{q} = \frac{5064}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{1477}{625}\,\mathbf{e_2} = 8{,}1024\,\mathbf{e_1} + 2{,}3632\,\mathbf{e_2}$$

Höhenvektor:

$$\mathbf{h} = \mathbf{a} - \mathbf{p} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2} - (15{,}8976\,\mathbf{e_1} + 4{,}6368\,\mathbf{e_2})$$

$$= -3{,}8976\,\mathbf{e_1} + 13{,}3632\,\mathbf{e_2}$$

Nachrechnen des Verallgemeinerten Höhensatzes

Für das Dreieck ohne rechten Winkel ist bereits bekannt:

$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2}$ $\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2}$ $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -54$

$$\mathbf{p} = \frac{9936}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{2898}{625}\,\mathbf{e_2} = 15{,}8976\,\mathbf{e_1} + 4{,}6368\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{q} = \frac{5064}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{1477}{625}\,\mathbf{e_2} = 8{,}1024\,\mathbf{e_1} + 2{,}3632\,\mathbf{e_2}$$

Alternative Berechnung des Höhenvektors:

$$\mathbf{h} = \mathbf{q} - \mathbf{b} = 8{,}1024\,\mathbf{e_1} + 2{,}3632\,\mathbf{e_2} - (12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2})$$

$$= -3{,}8976\,\mathbf{e_1} + 13{,}3632\,\mathbf{e_2}$$

Nachrechnen des Verallgemeinerten Höhensatzes

Beispieldreieck ohne rechten Winkel: $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -54$

$$\mathbf{p} = \frac{9936}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{2898}{625}\,\mathbf{e_2} = 15{,}8976\,\mathbf{e_1} + 4{,}6368\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{q} = \frac{5064}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{1477}{625}\,\mathbf{e_2} = 8{,}1024\,\mathbf{e_1} + 2{,}3632\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{h} = -\frac{2436}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{8352}{625}\,\mathbf{e_2} = -3{,}8976\,\mathbf{e_1} + 13{,}3632\,\mathbf{e_2}$$

Gilt $\mathbf{p}\,\mathbf{q} = \mathbf{h}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$?

Nachrechnen des Verallgemeinerten Höhensatzes

Beispieldreieck ohne rechten Winkel: $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -54$

$$\mathbf{p} = \frac{9936}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{2898}{625}\,\mathbf{e_2} = 15{,}8976\,\mathbf{e_1} + 4{,}6368\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{q} = \frac{5064}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{1477}{625}\,\mathbf{e_2} = 8{,}1024\,\mathbf{e_1} + 2{,}3632\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{h} = -\frac{2436}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{8352}{625}\,\mathbf{e_2} = -3{,}8976\,\mathbf{e_1} + 13{,}3632\,\mathbf{e_2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{h}^2 = (-3{,}8976)^2 + 13{,}3632^2 = 193{,}7664$$

$$\mathbf{p}\,\mathbf{q} = 15{,}8976 \cdot 8{,}1024 + 4{,}6368 \cdot 2{,}3632 = 139{,}7664$$

Gilt $\mathbf{p}\,\mathbf{q} = \mathbf{h}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$?

Nachrechnen des Verallgemeinerten Höhensatzes

Beispieldreieck ohne rechten Winkel: $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -\,54$

$$\mathbf{p} = \frac{9936}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{2898}{625}\,\mathbf{e_2} = 15{,}8976\,\mathbf{e_1} + 4{,}6368\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{q} = \frac{5064}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{1477}{625}\,\mathbf{e_2} = \quad 8{,}1024\,\mathbf{e_1} + 2{,}3632\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{h} = -\,\frac{2436}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{8352}{625}\,\mathbf{e_2} = -\,3{,}8976\,\mathbf{e_1} + 13{,}3632\,\mathbf{e_2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{h}^2 = (-\,3{,}8976)^2 + 13{,}3632^2 = 193{,}7664$$

$$\mathbf{p}\,\mathbf{q} = 15{,}8976 \cdot 8{,}1024 + 4{,}6368 \cdot 2{,}3632 = 139{,}7664$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{p}\,\mathbf{q} = \mathbf{h}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ gilt für das Beispieldreieck

Und der kleine Computer rechnet auch nach:

$$\mathbf{p}\,\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{9936}{625} & \frac{2898}{625} \\ \frac{2898}{625} & -\frac{9936}{625} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5064}{625} & \frac{1477}{625} \\ \frac{1477}{625} & -\frac{5064}{625} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{87354}{625} & 0 \\ 0 & \frac{87354}{625} \end{pmatrix}$$

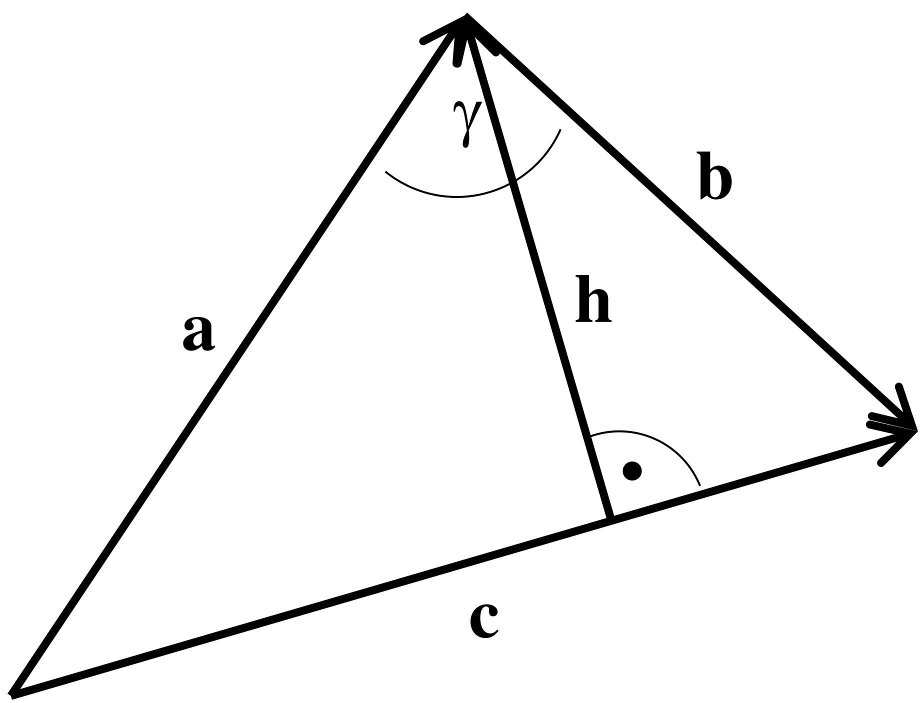
$$\mathbf{h}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{(-2436)^2+8352^2}{625^2} - 54 & 0 \\ 0 & \frac{(-2436)^2+8352^2}{625^2} - 54 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{87354}{625} & 0 \\ 0 & \frac{87354}{625} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 139{,}7664 & 0 \\ 0 & 139{,}7664 \end{pmatrix} = \mathbf{139{,}7664}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{p}\,\mathbf{q} = \mathbf{h}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ gilt für das Beispieldreieck

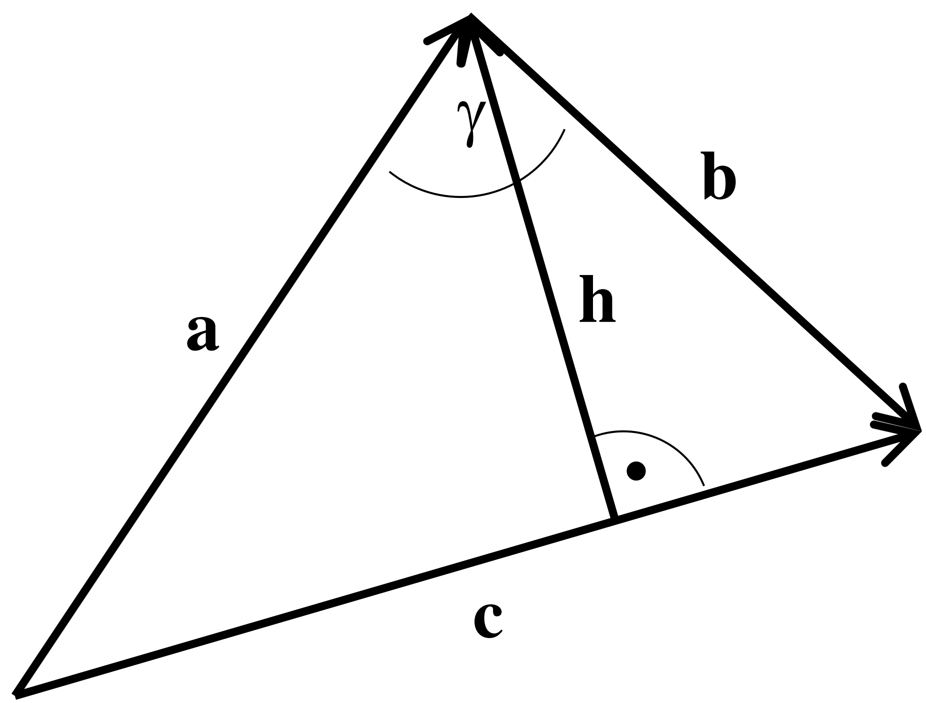
Flächensatz und Verallgemeinerter Flächensatz

In den Folien 54 & 55 wurde bereits angedeutet, dass auch Flächenbetrachtungen bei Dreiecken möglich und sinnvoll sind.



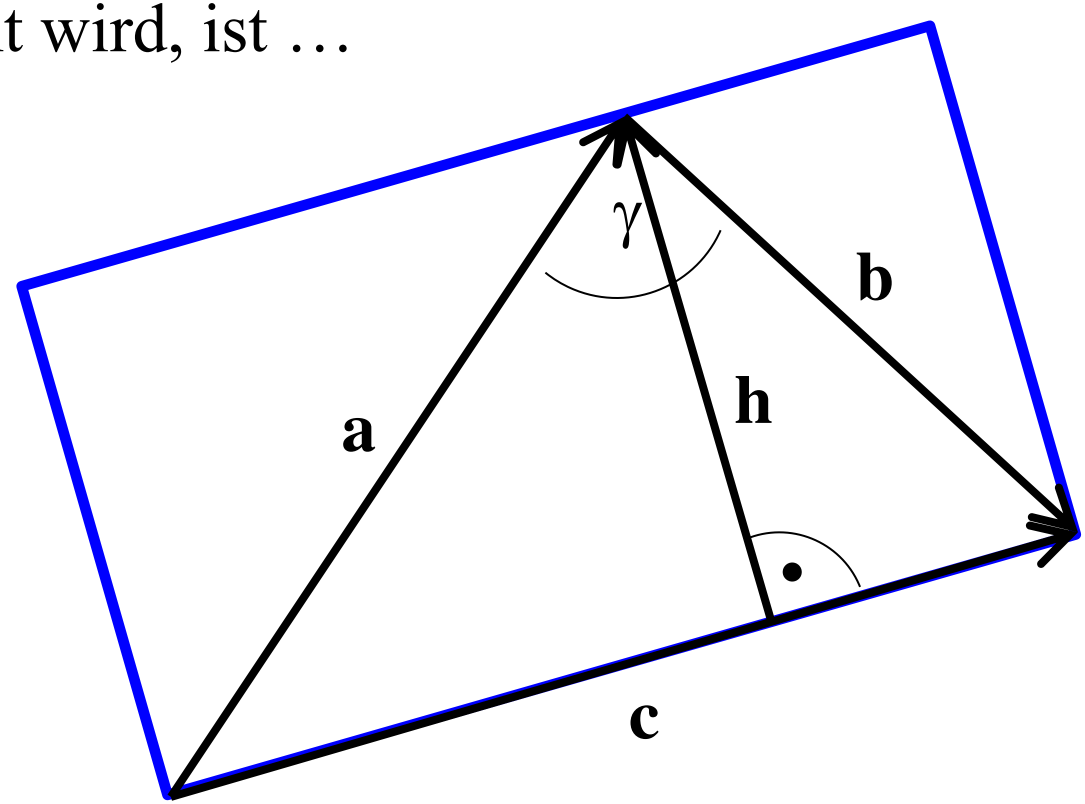
Verallgemeinerter Flächensatz

Beim Verallgemeinerten Flächensatz vergleichen wir die Flächen, die von den Seitenvektoren **a** und **b** sowie **c** und der Höhe **h** aufgespannt werden.

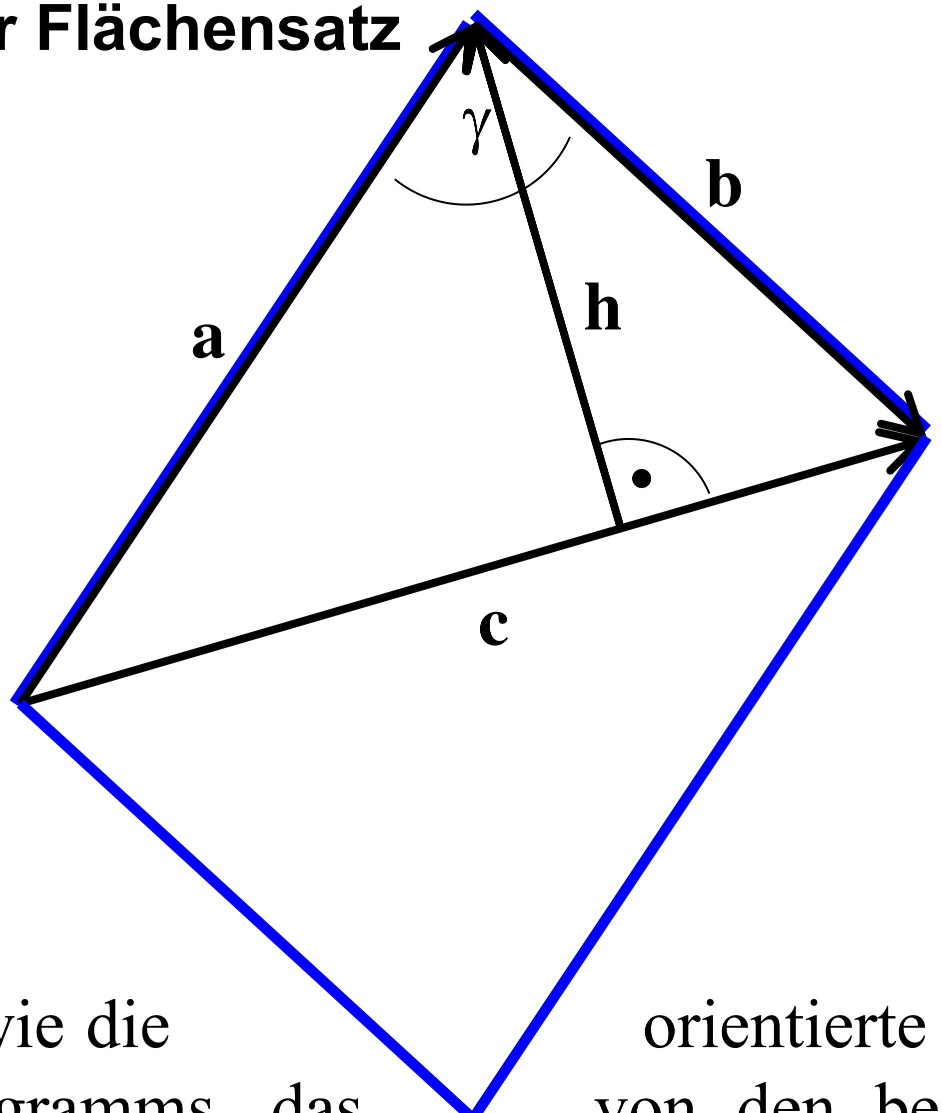


Verallgemeinerter Flächensatz

Die orientierte Rechteck-Fläche **h c**, die vom Seitenvektor **c** und dem auf **c** abgetragenen Höhenvektor **h** aufgespannt wird, ist …



Verallgemeinerter Flächensatz



… genauso groß wie die orientierte Fläche des Parallelogramms, das von den beiden Seitenvektoren **a** und **b** aufgespannt wird … –

Verallgemeinerter Flächensatz

Die orientierte Rechteck-Fläche **h c**, die vom Seitenvektor **c** und dem auf **c** abgetragenen Höhenvektor **h** aufgespannt wird, ist …

… genauso groß wie die orientierte Fläche des Parallelogramms, das von den beiden Seitenvektoren **a** und **b** aufgespannt wird …

… – nämlich exakt doppelt so groß wie die orientierte Fläche des vorgegebenen Dreiecks.

Verallgemeinerter Flächensatz

Die orientierte Rechteck-Fläche **h c**, die vom Seitenvektor **c** und dem auf **c** abgetragenen Höhenvektor **h** aufgespannt wird, ist …

… genauso groß wie die orientierte Fläche des Parallelogramms, das von den beiden Seitenvektoren **a** und **b** aufgespannt wird …

… – nämlich exakt doppelt so groß wie die orientierte Fläche des vorgegebenen Dreiecks.

Also folgt: $\mathbf{h} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$

Verallgemeinerter Flächensatz

Aus der Gleichheit des Flächeninhalts folgt:

$$\mathbf{h} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

Verallgemeinerter Flächensatz

Aus der Gleichheit des Flächeninhalts folgt:

$$\mathbf{h} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

Und mit Hilfe der Kanonischen Dekomposition des Geometrischen Produkts

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

können beide Gleichungsseiten umgeformt werden in …

Verallgemeinerter Flächensatz

Aus der Gleichheit des Flächeninhalts folgt:

$$\mathbf{h} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

$$\mathbf{h}\,\mathbf{c} - \mathbf{h} \bullet \mathbf{c} = \mathbf{a}\,\mathbf{b} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

Da jedoch der Höhenvektor **h** orthogonal zum Seitenvektor **c** steht, wird das innere Produkt dieser beiden Vektoren

$$\mathbf{h} \bullet \mathbf{c} = 0$$

immer Null sein.

Verallgemeinerter Flächensatz

Aus der Gleichheit des Flächeninhalts folgt:

$$\mathbf{h} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

$$\mathbf{h}\,\mathbf{c} - \mathbf{h} \bullet \mathbf{c} = \mathbf{a}\,\mathbf{b} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

$$\mathbf{h}\,\mathbf{c} \qquad = \mathbf{a}\,\mathbf{b} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

$$\mathbf{h} \bullet \mathbf{c} = 0$$

Jetzt kann **a • b** auf die andere Gleichungsseite gebracht werden, und man erhält …

Verallgemeinerter Flächensatz

… und man erhält:

$$\mathbf{a\ b = h\ c + a \bullet b}$$

Diese Beziehung stellt den „Verallgemeinerten Flächensatz“ für beliebige Dreiecke dar.

Flächensatz und Verallgemeinerter Flächensatz

… und man erhält:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{h}\,\mathbf{c} + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

Diese Beziehung stellt den „Verallgemeinerten Flächensatz“ für beliebige Dreiecke dar.

Und für rechtwinklige Dreiecke gilt selbstverständlich wieder

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{h}\,\mathbf{c}$$

als normaler Flächensatz, da das innere Produkt $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ senkrecht stehender Vektoren wie immer Null ergibt.

Beispielaufgaben

Berechnen Sie den Höhenvektor **h** des Beispieldreiecks ohne rechten Winkel mit Hilfe des Flächensatzes, wenn die drei Seitenvektoren **a**, **b** und **c** bekannt sind.

Berechnen Sie den Höhenvektor **h** des rechtwinkligen Beispieldreiecks mit Hilfe des Flächensatzes, wenn die drei Seitenvektoren **a**, **b** und **c** bekannt sind.

Beispielaufgabe zum Verallgemeinerten Flächensatz

Wir lösen den Verallgemeinerten Flächensatz

$$\mathbf{a}\ \mathbf{b} = \mathbf{h}\ \mathbf{c} + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

also nach **h** auf:

$$\mathbf{h}\ \mathbf{c} = \mathbf{a}\ \mathbf{b} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c^2}}\,(\mathbf{a}\ \mathbf{b} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\ \mathbf{c}$$

Beispielaufgabe zum Verallgemeinerten Flächensatz

Gegebene Seitenvektoren als bekannte Größen:

$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2}$ $\quad\quad$ $\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2}$ $\quad\quad$ $\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -\,54$ $\quad\quad$ $\mathbf{c}^2 = 625$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\,\mathbf{b} &= (12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2})\,(12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2}) \\ &= 144\,\mathbf{e_1}^2 - 132\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} + 216\,\mathbf{e_2}\mathbf{e_1} - 198\,\mathbf{e_2}^2 \\ &= -\,54 - 348\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Orientierte Parallelogrammfläche:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a}\,\mathbf{b} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -\,348\,\mathbf{e_1}\mathbf{e_2}$$

Beispielaufgabe zum Verallgemeinerten Flächensatz

Gegebene Seitenvektoren als bekannte Größen:

$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2}$ $\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2}$ $\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -54$ $\mathbf{c}^2 = 625$

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c^2}}\,(\mathbf{a\,b} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\mathbf{c}$$

$$= \frac{1}{625}\,(-\,348\,\mathbf{e_1 e_2})\,(24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2})$$

$$= -\,\frac{2436}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{8352}{625}\,\mathbf{e_2}$$

$$= -\,3{,}8976\,\mathbf{e_1} + 13{,}3632\,\mathbf{e_2}$$

Beispielaufgabe zum Verallgemeinerten Flächensatz

Gegebene Seitenvektoren als bekannte Größen:

$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 18\,\mathbf{e_2}$ $\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 11\,\mathbf{e_2}$ $\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -54$ $\mathbf{c}^2 = 625$

Ergebnis:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c^2}}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{b} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\,\mathbf{c} = -\frac{2436}{625}\,\mathbf{e_1} + \frac{8352}{625}\,\mathbf{e_2}$$

$$= -3{,}8976\,\mathbf{e_1} + 13{,}3632\,\mathbf{e_2}$$

$\Rightarrow$ Das Ergebnis stimmt mit den Resultaten der Folien 115 & 116 überein.

Und auch der kleine Computer rechnet das aus:

$$\mathbf{a} = \mathbf{12\ e_1} + \mathbf{18\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 18 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a\ b} = \begin{pmatrix} -54 & -348 \\ 348 & -54 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{12\ e_1} - \mathbf{11\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & -11 \\ -11 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -54 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{24\ e_1} + \mathbf{7\ e_2} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix}$$

(siehe Folien 32 & 33)

$$\mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

$\Rightarrow$ Orientierte Parallelogrammfläche:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a\ b} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -54 & -348 \\ 348 & -54 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -54 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -348 \\ 348 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\mathbf{348\ e_1 e_2}$$

Und auch der kleine Computer rechnet das aus:

$$\mathbf{a} = \mathbf{12\ e_1} + \mathbf{18\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 18 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a\ b} = \begin{pmatrix} -54 & -348 \\ 348 & -54 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{12\ e_1} - \mathbf{11\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & -11 \\ -11 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -54 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{24\ e_1} + \ \mathbf{7\ e_2} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix}$$

(siehe Folien 32 & 33)

$$\mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{h} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c^2}} (\mathbf{a\ b} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\ \mathbf{c}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -348 \\ 348 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{24}{625} & \frac{7}{625} \\ \frac{7}{625} & -\frac{24}{625} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2436}{625} & \frac{8352}{625} \\ \frac{8352}{625} & \frac{2436}{625} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3{,}8976 & 13{,}3632 \\ 13{,}3632 & 3{,}8976 \end{pmatrix} = -\ \mathbf{3{,}8976\ e_1} + \mathbf{13{,}3632\ e_2}$$

Beispielaufgabe zum Flächensatz

Gegebene Seitenvektoren als bekannte Größen:

$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2}$ $\quad$ $\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2}$ $\quad$ $\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$ $\quad$ $\mathbf{c}^2 = 625$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a\,b} &= (12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2})\,(12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2}) \\
&= 144\,\mathbf{e_1}^2 - 108\,\mathbf{e_1 e_2} + 192\,\mathbf{e_2 e_1} - 144\,\mathbf{e_2}^2 \\
&= -\,300\,\mathbf{e_1 e_2}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Orientierte Rechteckfläche:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a\,b} = -\,300\,\mathbf{e_1 e_2}$$

Beispielaufgabe zum Flächensatz

Gegebene Seitenvektoren als bekannte Größen:

$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2}$ $\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2}$ $\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$ $\mathbf{c}^2 = 625$

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c^2}}\,\mathbf{a\,b\,c}$$

$$= \frac{1}{625}\,(-\,300\,\mathbf{e_1 e_2})\,(24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2})$$

$$= -\,\frac{84}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{288}{25}\,\mathbf{e_2}$$

$$= -\,3{,}36\,\mathbf{e_1} + 11{,}52\,\mathbf{e_2}$$

Beispielaufgabe zum Flächensatz

Gegebene Seitenvektoren als bekannte Größen:

$\mathbf{a} = 12\,\mathbf{e_1} + 16\,\mathbf{e_2}$ $\mathbf{b} = 12\,\mathbf{e_1} - 9\,\mathbf{e_2}$ $\mathbf{c} = 24\,\mathbf{e_1} + 7\,\mathbf{e_2}$

$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$ $\mathbf{c}^2 = 625$

Ergebnis:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c^2}}\,\mathbf{a\,b\,c} = -\frac{84}{25}\,\mathbf{e_1} + \frac{288}{25}\,\mathbf{e_2}$$

$$= -\,3{,}36\,\mathbf{e_1} + 11{,}52\,\mathbf{e_2}$$

$\Rightarrow$ Das Ergebnis stimmt mit den Resultaten der Folien 109 & 110 überein.

Und auch der kleine Computer rechnet das aus:

$\mathbf{a} = \mathbf{12\ e_1} + \mathbf{16\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 16 & -12 \end{pmatrix}$

$\mathbf{b} = \mathbf{12\ e_1} - \mathbf{9\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$

$\mathbf{c} = \mathbf{24\ e_1} + \mathbf{7\ e_2} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix}$

$\mathbf{a\ b} = \begin{pmatrix} 0 & -300 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(siehe Folien 51 – 55)

$\mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$

$\Rightarrow$ Orientierte Rechteckfläche:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a\ b} = \begin{pmatrix} 0 & -300 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\,\mathbf{300\ e_1 e_2}$$

Und auch der kleine Computer rechnet das aus:

$$\mathbf{a} = \mathbf{12\ e_1} + \mathbf{16\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 16 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a\ b} = \begin{pmatrix} 0 & -300 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{12\ e_1} - \mathbf{9\ e_2} = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ -9 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{24\ e_1} + \mathbf{7\ e_2} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix}$$

(siehe Folien 51 – 55)

$$\mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \mathbf{625}$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{h} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c^2}}\,\mathbf{a\ b\ c}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -300 \\ 300 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{24}{625} & \frac{7}{625} \\ \frac{7}{625} & -\frac{24}{625} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{84}{25} & \frac{288}{25} \\ \frac{288}{25} & \frac{84}{25} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3{,}36 & 11{,}52 \\ 11{,}52 & 3{,}36 \end{pmatrix} = -\,\mathbf{3{,}36\ e_1} + \mathbf{11{,}52\ e_2}$$

Und auch der kleine Computer rechnet das aus:

Auch das ist wieder das gleiche Ergebnis wie bei der direkten Berechnung, nur eben in Matrizenschreibweise.

$$\Rightarrow \; \mathbf{h} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c^2}} \, \mathbf{a\,b\,c}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -300 \\ 300 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{24}{625} & \frac{7}{625} \\ \frac{7}{625} & -\frac{24}{625} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{84}{25} & \frac{288}{25} \\ \frac{288}{25} & \frac{84}{25} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3{,}36 & 11{,}52 \\ 11{,}52 & 3{,}36 \end{pmatrix} = -\,\mathbf{3{,}36\;e_1} + \mathbf{11{,}52\;e_2}$$

Schlussfolgerung:

Alle Sätze der Satzgruppe des Pythagoras können in ihrer ursprünglichen Fassung für rechtwinklige Dreiecke sowie in Form von Verallgemeinerungen für Dreiecke beliebiger Winkel mit Hilfe von reellen (2 x 2)-Matrizen auf Grundlage der Geometrischen Algebra beschrieben und genutzt werden.

Schlussfolgerung:

Alle Sätze der Satzgruppe des Pythagoras können in ihrer ursprünglichen Fassung für rechtwinklige Dreiecke sowie in Form von Verallgemeinerungen für Dreiecke beliebiger Winkel mit Hilfe von reellen (2 x 2)-Matrizen auf Grundlage der Geometrischen Algebra beschrieben und genutzt werden.

Diese Sätze werden dabei mit Hilfe von Vektoren (und nicht nur mit Hilfe von Streckenlängen, also Skalaren) dargestellt.

Schlussfolgerung:

Alle Sätze der Satzgruppe des Pythagoras können in ihrer ursprünglichen Fassung für rechtwinklige Dreiecke sowie in Form von Verallgemeinerungen für Dreiecke beliebiger Winkel mit Hilfe von reellen (2 x 2)-Matrizen auf Grundlage der Geometrischen Algebra beschrieben und genutzt werden.

Diese Sätze werden dabei mit Hilfe von Vektoren (und nicht nur mit Hilfe von Streckenlängen, also Skalaren) dargestellt.

Das ist ein Fortschritt!

Zusammenfassung:

In der Tabelle auf der folgenden Folie finden Sie abschließend eine Zusammenfassung der Ergebnisse.

Dabei wird der strukturell einfache Übergang vom Spezialfall rechtwinkliger Dreiecke zum allgemeinen Fall beliebiger Winkel durch Berücksichtigung des inneren Produkts noch einmal deutlich.

Zusammenfassung:

Rechtwinklige Dreiecke		Dreiecke beliebiger Winkel	
$c^2 = a^2 + b^2$		$c^2 = a^2 + b^2 + 2\, a \bullet b$	
$p\, c = a^2$	$q\, c = b^2$	$p\, c = a^2 + a \bullet b$	$q\, c = b^2 + a \bullet b$
$p\, q = h^2$	$a\, b = h\, c$	$p\, q = h^2 + a \bullet b$	$a\, b = h\, c + a \bullet b$

Übersicht über die Satzgruppe des Pythagoras
und deren Verallgemeinerung

Zusammenfassung:

Diese Tabelle ist übrigens dem im Internet frei zugänglichen Beitrag

> **Generalizing the Pythagorean and Euclidean Theorems. Preprint, Url: www.vixra.org/abs/2003.0643 [29.03.2020]**

entnommen. Das sind die Vortragsfolien eines Beitrags für die GDM-Online-Tagung 2020 in Würzburg.

Geometry

Generalizing the Pythagorean and Euclidean Theorems. Die GDM Hat Ihren Namen Nicht Verdient

Authors: Martin Erik Horn

Transformations of equations with scalar quantities are a mathematical cornerstone concept of modern algebra. It will be demonstrated in this GDM presentation how transformations of geometrical quantities can form an equivalent mathematical cornerstone concept of modern geometry. Thus variables will not be only scalars, but also vectors, bivectors or other geometric entities. This Geometric Algebra will be discussed and analysed with respect to the Pythagorean and Euclidean theorems.

Comments: 104 Pages. German powerpoint slides of the GDM Online Conference 2020 with a short English summary

Download: PDF

Zusammenfassung:

Diese Tabelle ist übrigens dem im Internet frei zugänglichen Beitrag

Generalizing the Pythagorean and Euclidean Theorems. Preprint, Url: www.vixra.org/abs/2003.0643 [29.03.2020]

entnommen. Das sind die Vortragsfolien eines Beitrags für die GDM-Online-Tagung 2020 in Würzburg. (Dort werden allerdings komplexe (2 x 2)-Matrizen verwendet, so dass dort auch Dreiecke, die sich im dreidimensionalen Raum befinden, betrachtet werden können.)

Ausblick

Diese komplexen (2 x 2)-Matrizen werden Pauli-Matrizen genannt.

Dort

werden allerdings komplexe (2 x 2)-Matrizen verwendet, so dass dort auch Dreiecke, die sich im dreidimensionalen Raum befinden, betrachtet werden können.

Ausblick

Diese komplexen (2 x 2)-Matrizen werden Pauli-Matrizen genannt.

Hier in diesen Ergänzungsfolien sollen aber nur reelle Matrizen betrachtet werden. Deshalb werden wir … später einmal … wenn die Zeit dafür noch reichen sollte … mit Corona ist alles anders … uns eine alternative Darstellungsweise für Pauli-Matrizen ausdenken.

Dort werden allerdings komplexe (2 x 2)-Matrizen verwendet, so dass dort auch Dreiecke, die sich im dreidimensionalen Raum befinden, betrachtet werden können.

Ausblick

Diese komplexen (2 x 2)-Matrizen werden Pauli-Matrizen genannt.

Hier in diesen Ergänzungsfolien sollen aber nur reelle Matrizen betrachtet werden. Deshalb werden wir … später einmal … wenn die Zeit dafür noch reichen sollte … mit Corona ist alles anders … uns eine alternative Darstellungsweise für Pauli-Matrizen ausdenken.

$\Rightarrow$ Pauli-Matrizen lassen sich nämlich auch als reelle (4 x 4)-Matrizen schreiben.

Ausblick

Diese komplexen (2 x 2)-Matrizen werden Pauli-Matrizen genannt.

Hier in diesen Ergänzungsfolien sollen aber nur reelle Matrizen betrachtet werden. Deshalb werden wir … später einmal … wenn die Zeit dafür noch reichen sollte … mit Corona ist alles anders … uns eine alternative Darstellungsweise für Pauli-Matrizen ausdenken.

$\Rightarrow$ Pauli-Matrizen lassen sich nämlich auch als reelle (4 x 4)-Matrizen schreiben – ganz ohne komplexe Zahlen.

Ergänzungsfolien 04: Der kleine Computer möchte ein Sandwich

Mathematik 1 des Bachelor-Studiengangs Ingenieurinformatik der HTW Berlin

Corona-Semester Sommer 2020

– Dr. M. Horn –

Hallo !

Ein Highlight der Weltgeschichte

Zu den weltgeschichtlich prägendsten Ereignissen in der Wissenschaft der Kulinarik zählt zweifelsohne die Erfindung des Sandwiches durch John Montagu, den 4. Earl of Sandwich.

Um sich während seiner sehr, sehr lange dauernden und leidenschaftlich ausgetragenen Kartenspiele nicht durch profane Mahlzeiten unterbrechen zu lassen, ließ er sich durch seine Bediensteten ein in zwei geröstete Weißbrotscheiben eingeklemmtes, gesalzenes Rindfleisch-Schnitzel reichen.

So konnte er problemlos essen und gleichzeitig ohne Unterbrechung weiterspielen.

Ein Highlight der Weltgeschichte

Überhaupt muss er einen bleibenden Eindruck auf seine Zeitgenossen gemacht haben. So benannte der englische Seefahrer James Cook eine Inselgruppe im Südatlantik nach Sandwich, ebenso wurde – wenn man den Eintragungen in Wikipedia trauen darf – der Süd-Sandwich-Graben mit 8.264 m Tiefe nach ihm benannt.

Offenbar kam damals auch das von ihm erfundene Sandwich in London sehr in Mode. Die Notwendigkeit, Kartenspiele (oder andere Tätigkeiten) nicht unterbrechen zu müssen, kann hier eindeutig als entscheidender Faktor einer britisch-europäischen Küchen-Revolution identifiziert werden.

Ein Highlight der Weltgeschichte

Diese Revolution hatte Auswirkungen bis hinein in die Mathematik.

So wurde das Einklemmen eines kalten, gesalzenen Fleischstücks in zwei geröstete Weißbrotscheiben von einigen Mathematikern als Anlass genommen, auch Vektoren (oder andere mathematische Größen) in andere Vektoren einzuklemmen und so ein mathematisches Sandwich zu konstruieren.

Da dabei multipliziert wird, wird das entstandene Produkt als Sandwich-Produkt bezeichnet.

Sandwich-Produkt

Ein Sandwich-Produkt hat also die folgende Form:

$$\mathbf{n\,r\,n}$$

Dabei wird beispielsweise ein Vektor **r** in der Mitte gleichzeitig von rechts und von links mit einem anderen Vektor **n** multipliziert.

Diese Art der Doppel-Multiplikation wird in dieser Folienserie nun mit Hilfe der Objekte, die unser kleiner, unbeholfener Computer versteht, untersucht.

Wir erinnern uns:

Dieser kleine, unbeholfene und doch nicht ganz so doofe Computer wurde nur für Rechnungen mit reellen (2 x 2)-Matrizen der Art

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

programmiert. a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} sind dabei reelle Zahlen.

Andere mathematische Objekte versteht er nicht. Und mit anderen mathematischen Objekten kann er nicht rechnen. Denn dafür ist er einfach nicht ausgelegt.

Wir erinnern uns:

Der kleine Computer kann also nur mathematische Objekte, die aus den folgenden vier Basiselementen zusammengesetzt sind, bearbeiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$ skalare, dimensionslose Basiseinheit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1}$$ Basisvektor in x-Richtung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_2}$$ Basisvektor in y-Richtung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1 e_2}$$ Basis-Bivektor der xy-Ebene

Das heißt:

Der kleine Computer kann deshalb nur folgende geometrische Objekte bearbeiten:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \mathbf{k\ 1 = k}$$

Skalare (dimensionslos)

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} = \mathbf{x\ e_1} + \mathbf{y\ e_2}$$

Vektoren als orientierte Streckenstücke (eindimensional)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{a\ e_1 e_2}$$

Bivektoren als orientierte Flächenstücke (zweidimensional)

Der kleine, doofe Computer

Aber heute hat der kleine, nicht ganz so doofe Computer einfach keine Lust, etwas mit Skalaren oder Bivektoren auszurechnen.

Heute möchte er einfach nur Vektoren berechnen. Er möchte heute Vektoren nehmen, diese Vektoren in eine Gleichung einsetzen und dann wieder als Ergebnis seiner Rechnungen einen Vektor erhalten.

Der kleine, doofe Computer

Aber heute hat der kleine, nicht ganz so doofe Computer einfach keine Lust, etwas mit Skalaren oder Bivektoren auszurechnen.

Heute möchte er einfach nur Vektoren berechnen. Er möchte heute Vektoren nehmen, diese Vektoren in eine Gleichung einsetzen und dann wieder als Ergebnis seiner Rechnungen einen Vektor erhalten.

Deshalb ist unser kleiner Computer sehr, sehr glücklich, als er in der hoch angesehenen Zeitschrift für wissenschaftliche Kulinarik **Fress-Schmatz** (vier Sterne) liest:

Sandwich-Produkte von Vektoren ergeben immer wieder Vektoren.

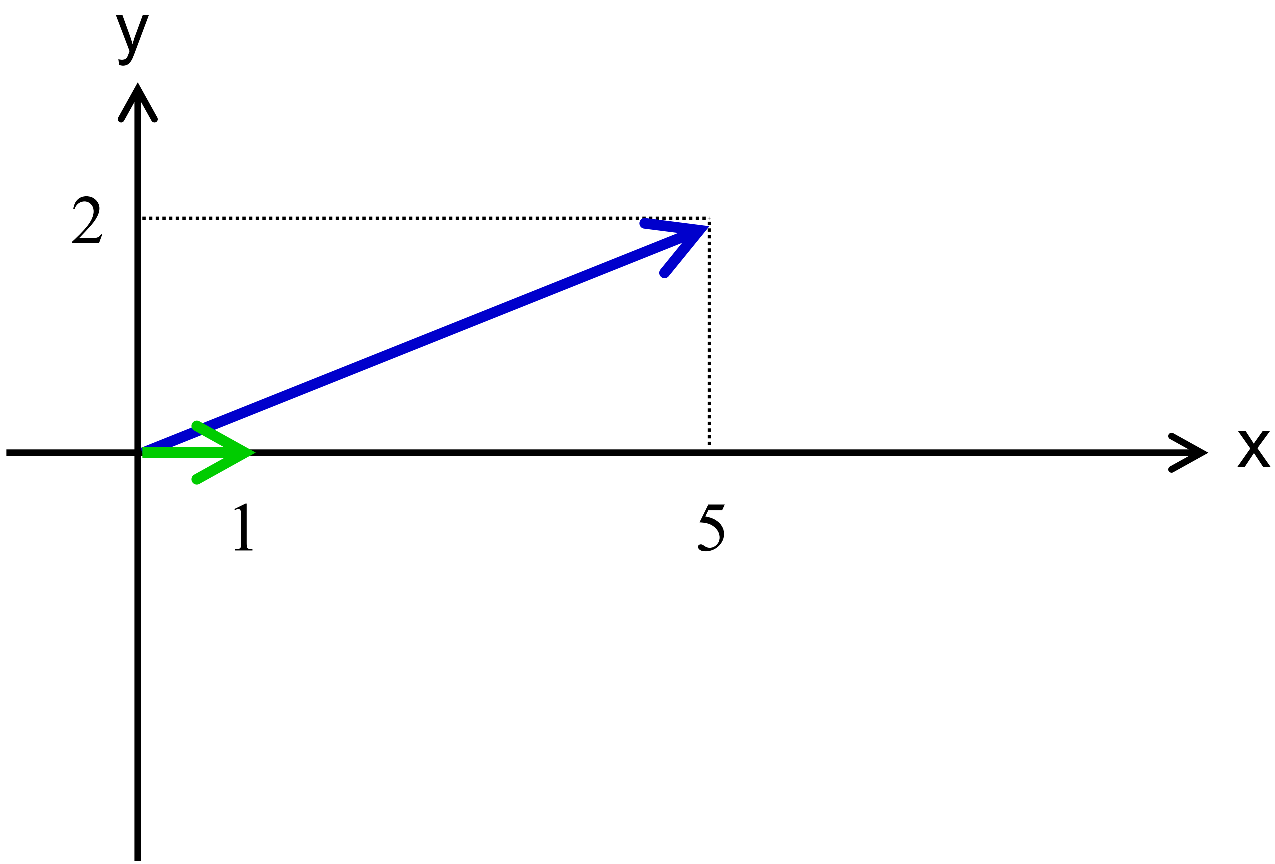
Sandwich-Produkte

Sandwich-Produkte von Vektoren ergeben immer wieder Vektoren.

Das möchte der kleine, heute etwas faule Computer gleich an einem einfachen Beispiel ausprobieren.

Unser erstes Sandwich-Produkt

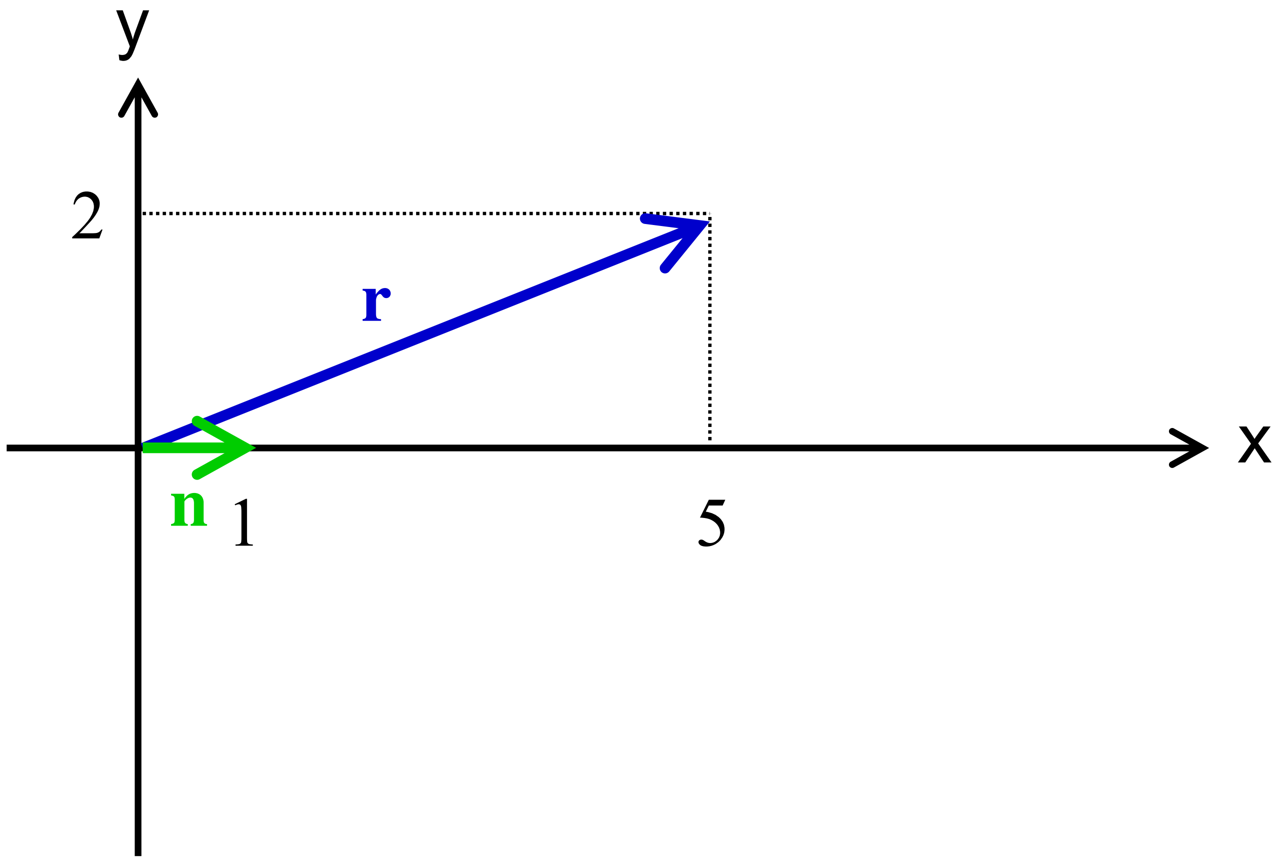
Als erstes Beispiel betrachten wir mit Hilfe des kleinen Computers die folgende geometrisch einfache Situation:



Unser erstes Sandwich-Produkt

Der blaue Vektor **r** lautet dann: $\mathbf{r} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2}$

Und der grüne Vektor **n** ist: $\mathbf{n} = \mathbf{e_1}$



Unser erstes Sandwich-Produkt

Der blaue Vektor $\mathbf{r}$ lautet dann: $\mathbf{r} = \mathbf{5\ e_1 + 2\ e_2}$

Und der grüne Vektor $\mathbf{n}$ ist: $\mathbf{n} = \mathbf{e_1}$

Wir berechnen also:

$$\mathbf{n\ r\ n = e_1\ (5\ e_1 + 2\ e_2)\ e_1}$$

Unser erstes Sandwich-Produkt

Der blaue Vektor $\mathbf{r}$ lautet dann: $\mathbf{r} = 5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}$

Und der grüne Vektor $\mathbf{n}$ ist: $\mathbf{n} = \mathbf{e_1}$

Wir berechnen also:

$$\mathbf{n\,r\,n} = \mathbf{e_1}\,(5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2})\,\mathbf{e_1}$$

$$= (5\,\mathbf{e_1}^2 + 2\,\mathbf{e_1 e_2})\,\mathbf{e_1}$$

$\rightarrow$ Prä-Multiplikation von $\mathbf{e_1}$ von links

Unser erstes Sandwich-Produkt

Der blaue Vektor **r** lautet dann: $\mathbf{r} = \mathbf{5\ e_1 + 2\ e_2}$

Und der grüne Vektor **n** ist: $\mathbf{n} = \mathbf{e_1}$

Wir berechnen also:

$$\mathbf{n\ r\ n} = \mathbf{e_1\ (5\ e_1 + 2\ e_2)\ e_1}$$

$$= \mathbf{(5\ e_1}^2 \mathbf{+ 2\ e_1e_2)\ e_1}$$

$$= \mathbf{(5 + 2\ e_1e_2)\ e_1}$$

→ Normierung der Basisvektoren: $\mathbf{e_1}^2 = \mathbf{1}$

Unser erstes Sandwich-Produkt

Der blaue Vektor $\mathbf{r}$ lautet dann: $\mathbf{r} = 5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}$

Und der grüne Vektor $\mathbf{n}$ ist: $\mathbf{n} = \mathbf{e_1}$

Wir berechnen also:

$$\mathbf{n\,r\,n} = \mathbf{e_1}\,(5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2})\,\mathbf{e_1}$$

$$= (5\,\mathbf{e_1}^2 + 2\,\mathbf{e_1 e_2})\,\mathbf{e_1}$$

$$= (5 + 2\,\mathbf{e_1 e_2})\,\mathbf{e_1}$$

$$= 5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_1 e_2 e_1}$$

→ Post-Multiplikation von $\mathbf{e_1}$ von rechts

Unser erstes Sandwich-Produkt

Der blaue Vektor **r** lautet dann: $\mathbf{r} = 5\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2$

Und der grüne Vektor **n** ist: $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$

Wir berechnen also:

$$\mathbf{n\,r\,n} = \mathbf{e}_1\,(5\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_1$$

$$= (5\,\mathbf{e}_1^{\,2} + 2\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_1$$

$$= (5 + 2\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_1$$

$$= 5\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$$

$$= 5\,\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$$

→ Beachtung der Anti-Kommutativität: $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$

Unser erstes Sandwich-Produkt

Der blaue Vektor **r** lautet dann: $\mathbf{r} = 5\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2$

Und der grüne Vektor **n** ist: $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$

Wir berechnen also:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n\,r\,n} &= \mathbf{e}_1\,(5\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_1 \\
&= (5\,\mathbf{e}_1^{\,2} + 2\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_1 \\
&= (5 + 2\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_1 \\
&= 5\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \\
&= 5\,\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \\
&= 5\,\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

Unser erstes Sandwich-Produkt

Der blaue Vektor $\mathbf{r}$ lautet dann: $\mathbf{r} = 5\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2$

Und der grüne Vektor $\mathbf{n}$ ist: $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$

Natürlich hätten wir das auch schneller berechnen können:

$$\begin{aligned} \mathbf{n\,r\,n} &= \mathbf{e}_1\,(5\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_1 \\ &= 5\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \\ &= 5\,\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Unser erstes Sandwich-Produkt

Der blaue Vektor **r** lautet dann: $\mathbf{r} = \mathbf{5\ e_1} + \mathbf{2\ e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Und der grüne Vektor **n** ist: $\mathbf{n} = \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Oder wir hätten den kleinen Computer rechnen lassen können:

$$\mathbf{n\ r\ n} = \mathbf{e_1}\ (\mathbf{5\ e_1} + \mathbf{2\ e_2})\ \mathbf{e_1}$$

Unser erstes Sandwich-Produkt

Der blaue Vektor **r** lautet dann: $\mathbf{r} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Und der grüne Vektor **n** ist: $\mathbf{n} = \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Oder wir hätten den kleinen Computer rechnen lassen können:

$$\mathbf{n}\ \mathbf{r}\ \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Unser erstes Sandwich-Produkt

Der blaue Vektor **r** lautet dann: $\mathbf{r} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Und der grüne Vektor **n** ist: $\mathbf{n} = \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Oder wir hätten den kleinen Computer rechnen lassen können:

$$\mathbf{n\ r\ n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Unser erstes Sandwich-Produkt

Der blaue Vektor **r** lautet dann: $\mathbf{r} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Und der grüne Vektor **n** ist: $\mathbf{n} = \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Oder wir hätten den kleinen Computer rechnen lassen können:

$$\mathbf{n}\ \mathbf{r}\ \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Unser erstes Sandwich-Produkt

Der blaue Vektor **r** lautet dann: $\mathbf{r} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Und der grüne Vektor **n** ist: $\mathbf{n} = \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Oder wir hätten den kleinen Computer rechnen lassen können:

$$\mathbf{n\ r\ n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} - \mathbf{2}\ \mathbf{e_2}$$

Unser erstes Sandwich-Produkt

Der blaue Vektor $\mathbf{r}$ lautet dann: $\mathbf{r} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Und der grüne Vektor $\mathbf{n}$ ist: $\mathbf{n} = \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Und egal, wie wir rechen, wir erhalten auf jeden Fall immer:

$$\mathbf{n}\ \mathbf{r}\ \mathbf{n} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} - \mathbf{2}\ \mathbf{e_2}$$

Doch was bedeutet diese Ergebnis nun?

Unser erstes Sandwich-Produkt

Der blaue Vektor **r** lautet dann: $\mathbf{r} = \mathbf{5\ e_1} + \mathbf{2\ e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Und der grüne Vektor **n** ist: : $\mathbf{n} = \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Und egal, wie wir rechen, wir erhalten auf jeden Fall immer:

$$\mathbf{n\ r\ n} = \mathbf{5\ e_1} - \mathbf{2\ e_2}$$

Doch was bedeutet diese Ergebnis nun?

Was haben wir hier getan?

Unser erstes Sandwich-Produkt

Der blaue Vektor **r** lautet dann: $\mathbf{r} = \mathbf{5}\,\mathbf{e_1} + \mathbf{2}\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Und der grüne Vektor **n** ist: $\mathbf{n} = \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Und egal, wie wir rechen, wir erhalten auf jeden Fall immer:

$$\mathbf{n\,r\,n} = \mathbf{5}\,\mathbf{e_1} - \mathbf{2}\,\mathbf{e_2}$$

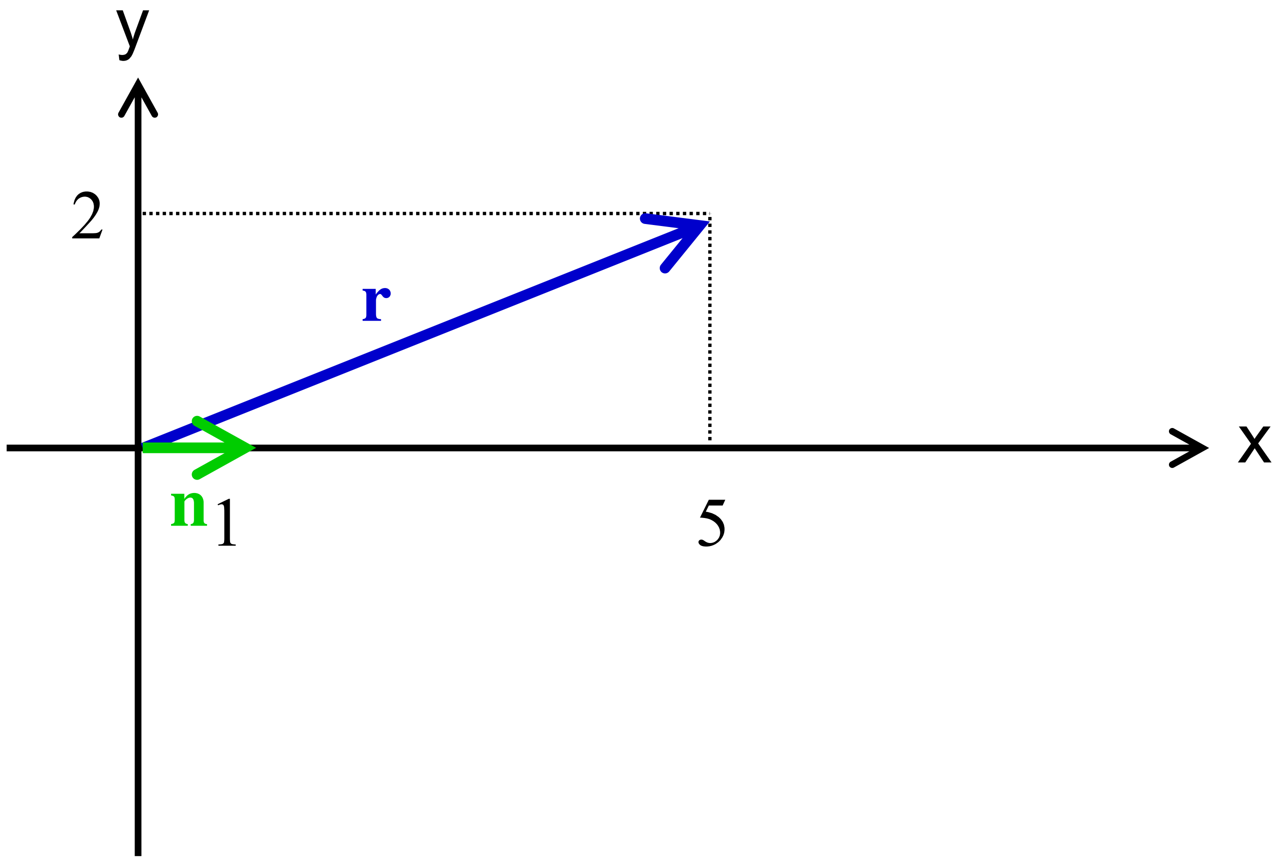
Doch was bedeutet diese Ergebnis nun?

Um dieses Ergebnis zu verstehen, zeichnen wir es einfach in das Koordinatensystem ein und interpretieren es geometrisch.

Unser erstes Sandwich-Produkt

Blauer Vektor: $\mathbf{r} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2}$

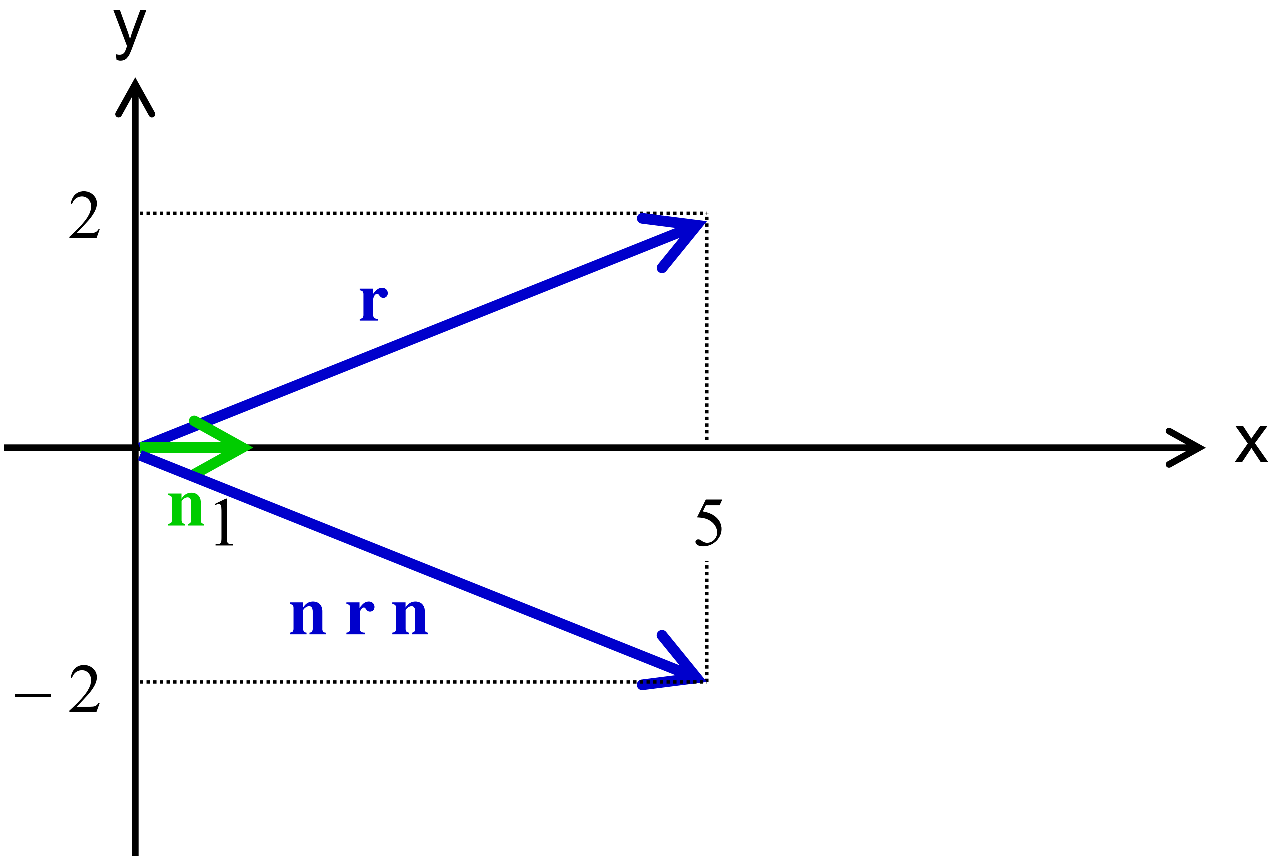
Grüner Vektor: $\mathbf{n} = \quad \mathbf{e_1}$



Unser erstes Sandwich-Produkt

Blauer Vektor: $\mathbf{r} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2}$ Resultat: $\mathbf{n\ r\ n} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} - \mathbf{2}\ \mathbf{e_2}$

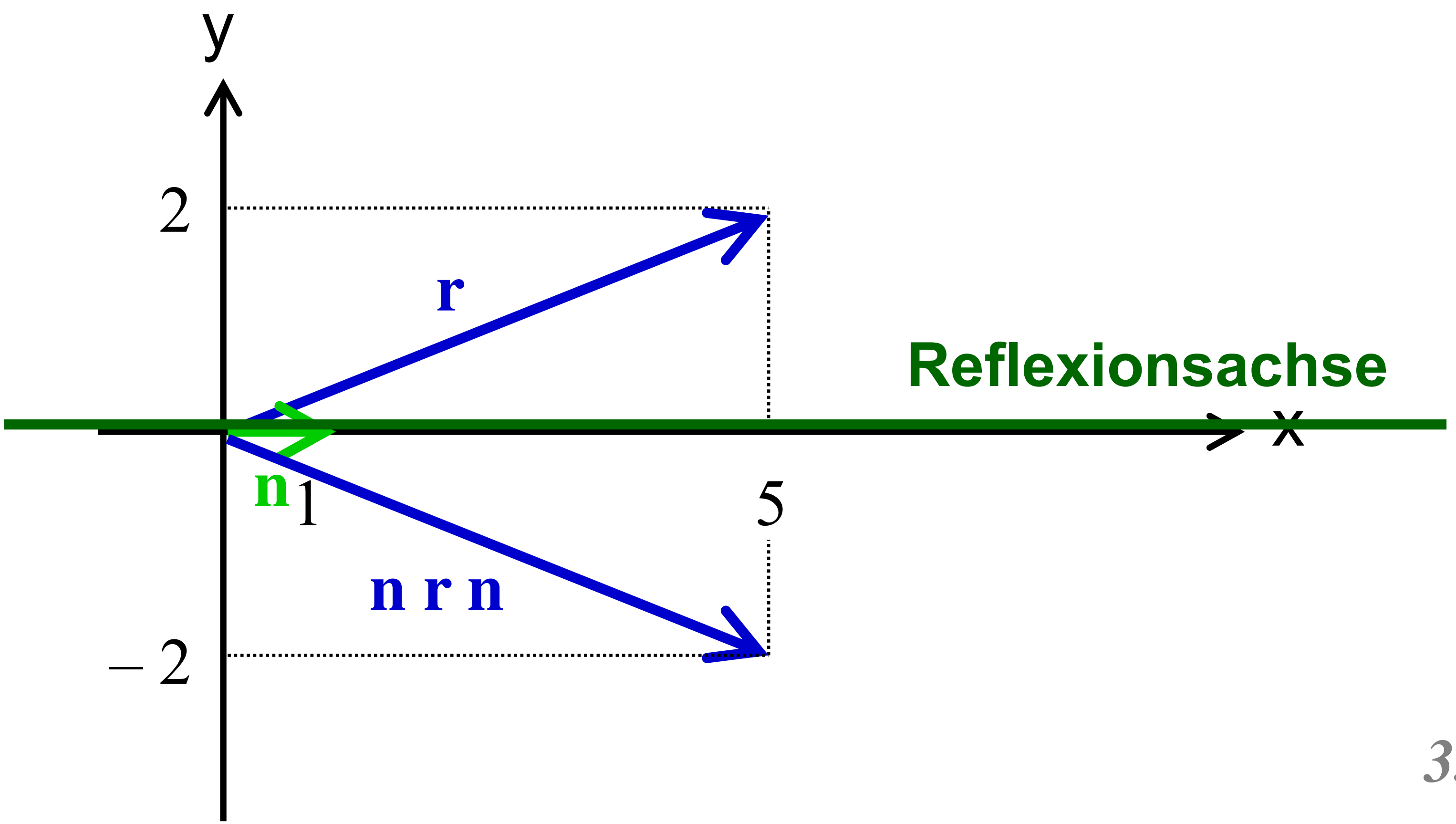
Grüner Vektor: $\mathbf{n} = \mathbf{e_1}$



Unser erstes Sandwich-Produkt

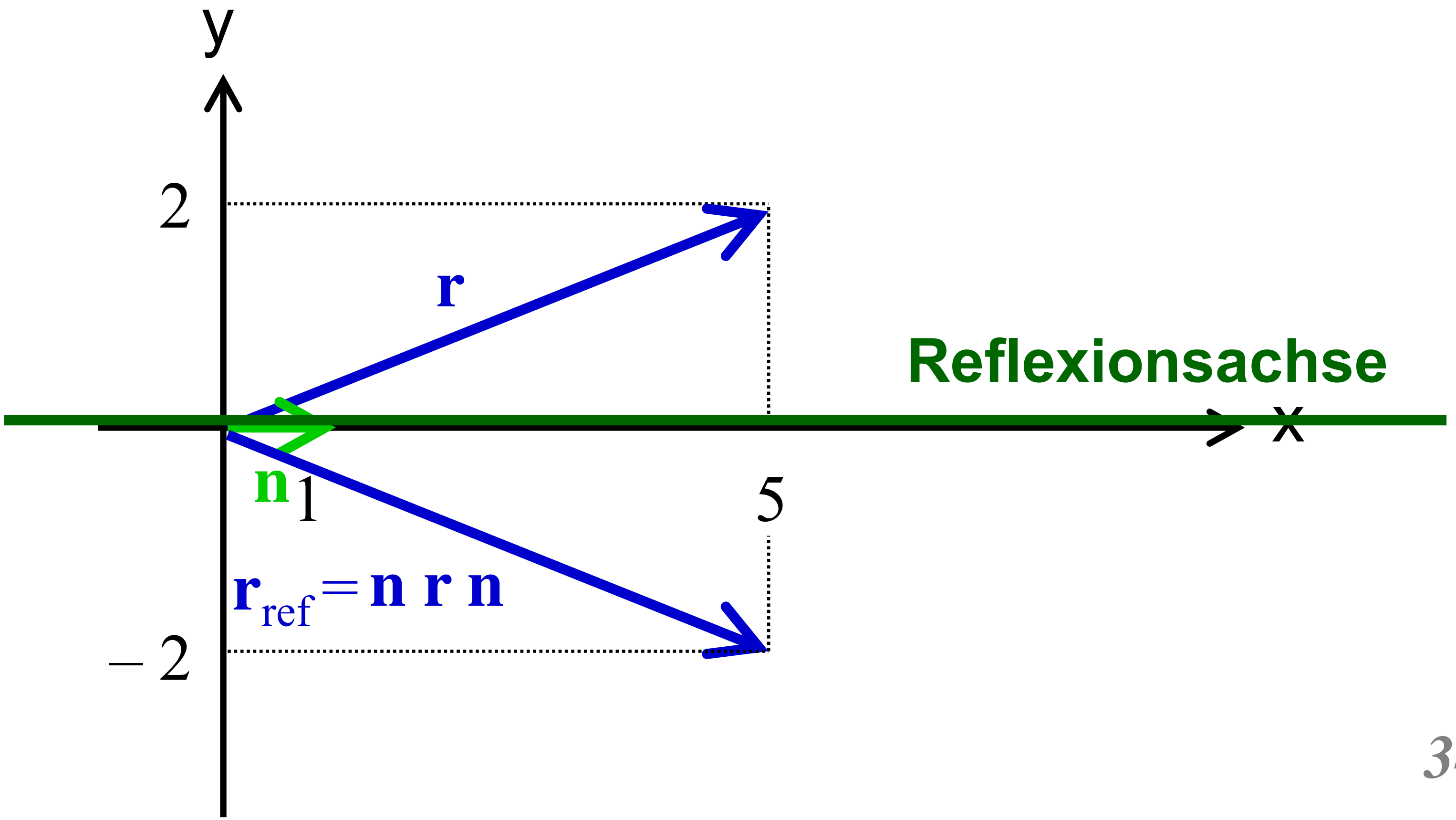
Blauer Vektor: $\mathbf{r} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2}$ Resultat: $\mathbf{n\ r\ n} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} - \mathbf{2}\ \mathbf{e_2}$

Grüner Vektor: $\mathbf{n} = \mathbf{e_1}$



Interpretation

Der Vektor $\mathbf{r} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2}$ wird an einer Reflexionsachse in Richtung des Reflexionsvektors $\mathbf{n} = \mathbf{e_1}$ reflektiert.



Interpretation

Das gilt natürlich auch für jeden anderen Vektor $\mathbf{r}$ mit beliebigen Koordinaten: $\mathbf{r} = \mathbf{x}\,\mathbf{e_1} + \mathbf{y}\,\mathbf{e_2}$

Reflexionsvektor: $\mathbf{n} = \mathbf{e_1}$

Reflexion an der x-Achse:

$$\mathbf{r}_{\text{ref}} = \mathbf{n\,r\,n} = \mathbf{e_1}\,(\mathbf{x\,e_1} + \mathbf{y\,e_2})\,\mathbf{e_1}$$

$$= \mathbf{x\,e_1e_1e_1} + \mathbf{y\,e_1e_2e_1}$$

$$= \mathbf{x\,e_1} - \mathbf{y\,e_2}$$

Interpretation

Das gilt natürlich auch für jeden anderen Vektor **r** mit beliebigen Koordinaten: $\mathbf{r} = \mathbf{x}\,\mathbf{e_1} + \mathbf{y}\,\mathbf{e_2}$
Reflexionsvektor: $\mathbf{n} = \mathbf{e_1}$

Reflexion an der x-Achse:

$$\mathbf{r}_{\text{ref}} = \mathbf{n\,r\,n} = \mathbf{e_1}\,(\mathbf{x}\,\mathbf{e_1} + \mathbf{y}\,\mathbf{e_2})\,\mathbf{e_1}$$

$$= \mathbf{x}\,\mathbf{e_1 e_1 e_1} + \mathbf{y}\,\mathbf{e_1 e_2 e_1}$$

$$= \mathbf{x}\,\mathbf{e_1} - \mathbf{y}\,\mathbf{e_2}$$

Die x-Komponente liegt parallel zur Reflexionsachse und ändert ihr Vorzeichen nicht, während die y-Komponente senkrecht zur Reflexionsachse steht und das Vorzeichen umkehrt.

Interpretation

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}\,\mathbf{e_1} + \mathbf{y}\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$$

Reflexions-
vektor: $\mathbf{n} = \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Das findet auch der kleine Computer schnell raus:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{ref}} = \mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix} = \mathbf{x}\,\mathbf{e_1} - \mathbf{y}\,\mathbf{e_2} \end{aligned}$$

Die x-Komponente liegt parallel zur Reflexionsachse und ändert ihr Vorzeichen nicht, während die y-Komponente senkrecht zur Reflexionsachse steht und das Vorzeichen umkehrt.

Und eine Reflexion an der y-Achse erhalten wir so:

Beliebiger Vektor: $\mathbf{r} = \mathbf{x}\,\mathbf{e_1} + \mathbf{y}\,\mathbf{e_2}$

Reflexionsvektor: $\mathbf{n} = \mathbf{e_2}$

Sandwich-Produkt:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{n\,r\,n} = \mathbf{e_2}\,(\mathbf{x}\,\mathbf{e_1} + \mathbf{y}\,\mathbf{e_2})\,\mathbf{e_2}$$

$$= \mathbf{x}\,\mathbf{e_2 e_1 e_2} + \mathbf{y}\,\mathbf{e_2 e_2 e_2}$$

$$= -\,\mathbf{x}\,\mathbf{e_1} + \mathbf{y}\,\mathbf{e_2}$$

Und eine Reflexion an der y-Achse erhalten wir so:

Beliebiger Vektor: $\mathbf{r} = \mathbf{x}\,\mathbf{e_1} + \mathbf{y}\,\mathbf{e_2}$

Reflexionsvektor: $\mathbf{n} = \mathbf{e_2}$

Sandwich-Produkt:

$$\mathbf{r}_{\text{ref}} = \mathbf{n\,r\,n} = \mathbf{e_2}\,(\mathbf{x}\,\mathbf{e_1} + \mathbf{y}\,\mathbf{e_2})\,\mathbf{e_2}$$

$$= \mathbf{x}\,\mathbf{e_2 e_1 e_2} + \mathbf{y}\,\mathbf{e_2 e_2 e_2}$$

$$= -\,\mathbf{x}\,\mathbf{e_1} + \mathbf{y}\,\mathbf{e_2}$$

Interpretation:

Die x-Komponente steht senkrecht zur Reflexionsachse und kehrt ihr Vorzeichen um, während die y-Komponente parallel zur Reflexionsachse liegt und das Vorzeichen nicht ändert.

Oder so:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}\,\mathbf{e_1} + \mathbf{y}\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$$

Reflexions-vektor: $\mathbf{n} = \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Der kleine Computer reflektiert an der y-Achse:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{ref}} = \mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y & -x \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x & y \\ y & x \end{pmatrix} = -\,\mathbf{x}\,\mathbf{e_1} + \mathbf{y}\,\mathbf{e_2} \end{aligned}$$

Die x-Komponente steht senkrecht zur Reflexionsachse und kehrt ihr Vorzeichen um, während die y-Komponente parallel zur Reflexionsachse liegt und das Vorzeichen nicht ändert.

Unser drittes Sandwich-Produkt

Zuerst hatten wir die Reflexion eines Vektors **r** an der x-Achse untersucht. Danach wurde von uns die Reflexion eines Vektors **r** an der y-Achse analysiert.

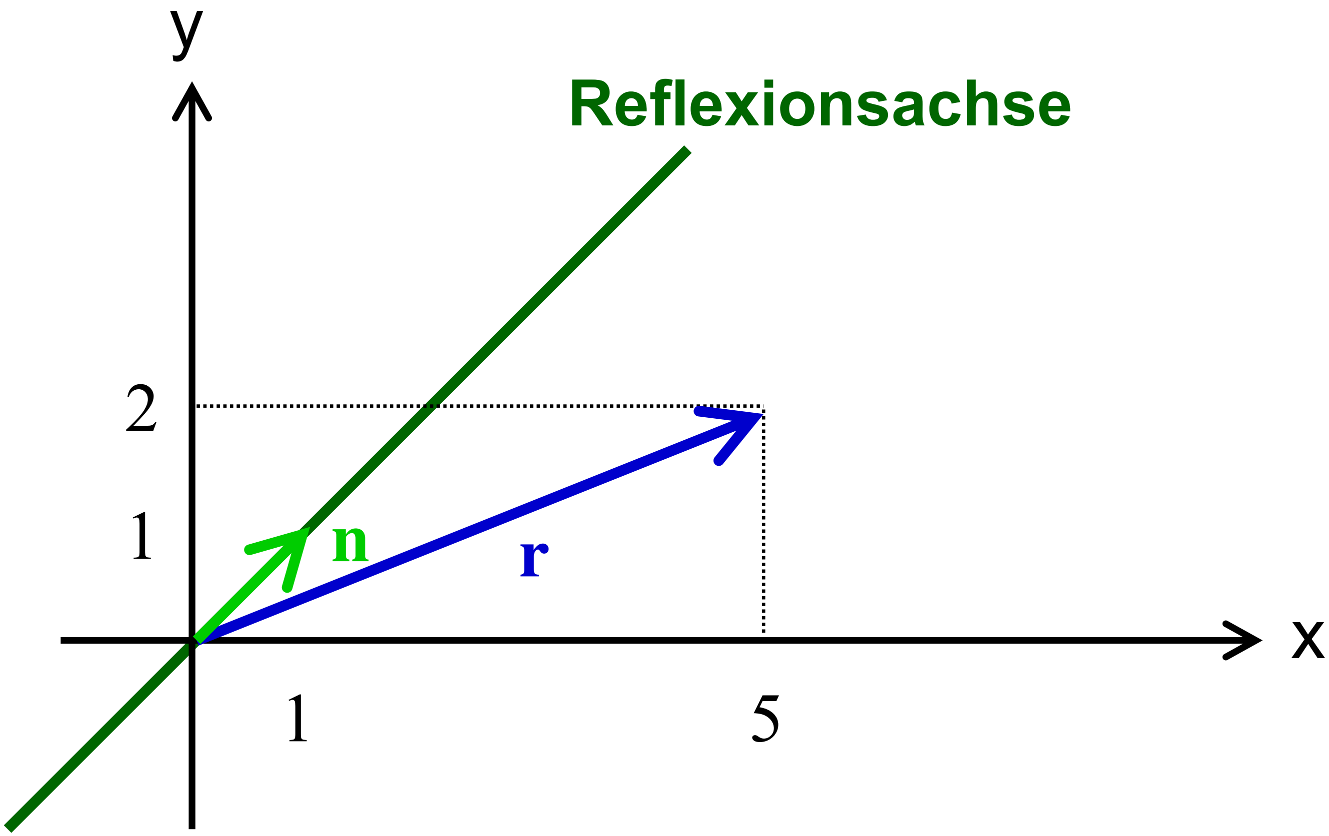
Bei unserem dritten Sandwich-Produkt werden wir uns Gedanken über die Reflexion eines Vektors **r** an der Diagonalen zwischen diesen beiden Achsen machen.

Der Diagonalvektor **d**, der die Reflexionsachse repräsentiert, zeigt also in Richtung der Vektorsumme der beiden Basisvektoren $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_2}$, was in der folgenden Skizze (siehe nächste Folie) dargestellt wird.

Unser drittes Sandwich-Produkt

Blauer Vektor: $\mathbf{r} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2}$

Diagonalvektor: $\mathbf{d} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$



Unser drittes Sandwich-Produkt

Blauer Vektor: $\mathbf{r} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2}$
Diagonalvektor: $\mathbf{d} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$

Den reflektierten Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ kann man auch ganz einfach ohne Berechnung ermitteln, denn bei einer Reflexion an der Diagonalen werden lediglich die x- und y-Komponenten vertauscht, da die x-Achse nun auf die y-Achse reflektiert wird und umgekehrt.

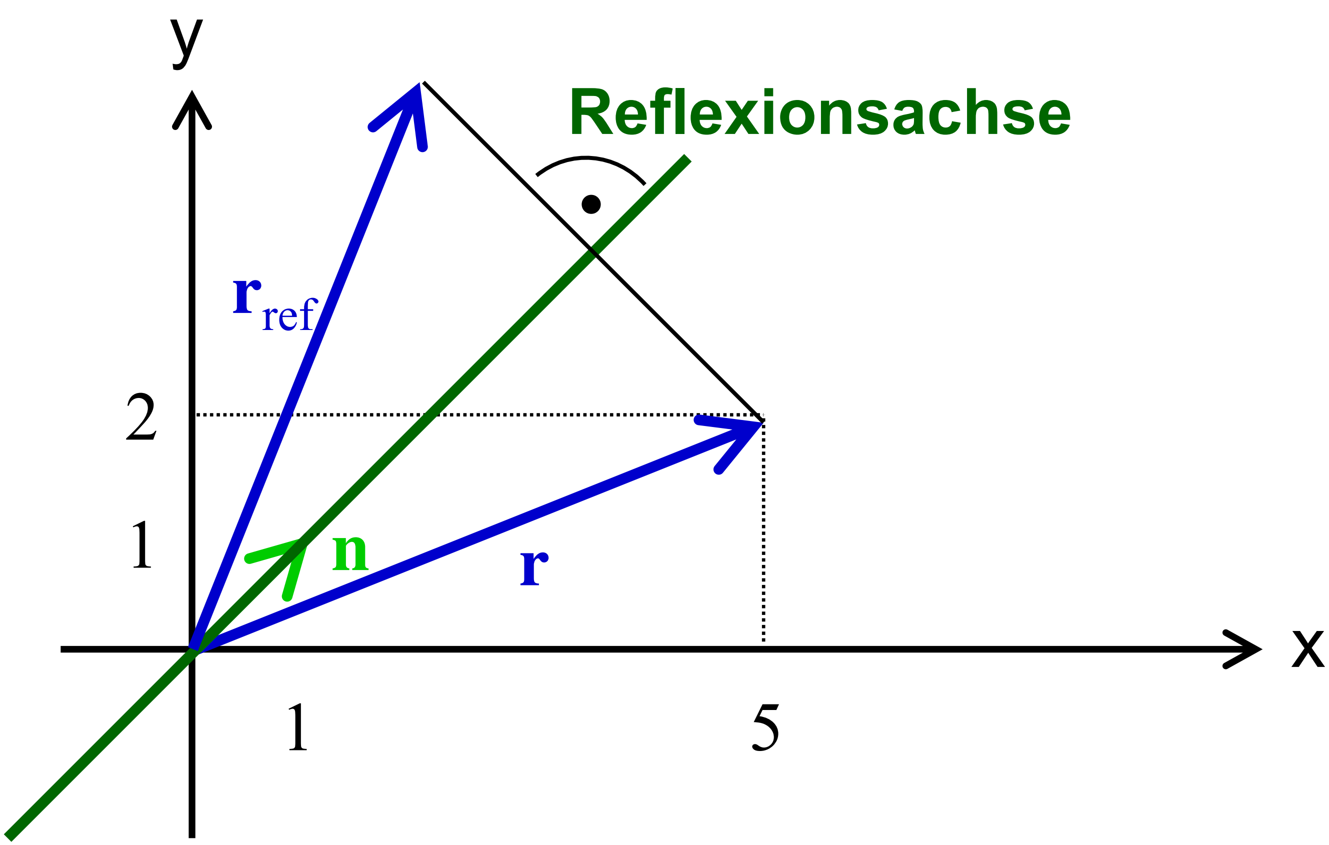
Also lautet das Reflexionsergebnis ganz ohne Rechnung: $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{2}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{5}\ \mathbf{e_2}$

(siehe folgende Skizze)

Unser drittes Sandwich-Produkt

Blaue Vektoren: $\mathbf{r} = 5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}$ $\quad\quad$ $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = 2\,\mathbf{e_1} + 5\,\mathbf{e_2}$

Diagonalvektor: $\mathbf{d} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$



Unser drittes Sandwich-Produkt

Blaue Vektoren: $\mathbf{r} = \mathbf{5\, e_1 + 2\, e_2}$ $\qquad \mathbf{r}_{\text{ref}} = \mathbf{2\, e_1 + 5\, e_2}$
Diagonalvektor: $\mathbf{d} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$

Bei einer Reflexion an der Diagonalen werden lediglich die x- und y-Komponenten vertauscht. Das rechnen wir nun nach:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d\, r\, d} &= (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2})\,(\mathbf{5\, e_1} + \mathbf{2\, e_2})\,(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}) \\
&= (\mathbf{7} - \mathbf{3\, e_1 e_2})\,(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}) \\
&= \mathbf{4\, e_1} + \mathbf{10\, e_2}
\end{aligned}
$$

Das ist sonderbar!

Und auch der kleine Computer wundert sich:

$$\mathbf{r} = \mathbf{5\ e_1} + \mathbf{2\ e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{d} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Auch er findet dieses Ergebnis sonderbar:

$$\begin{aligned} \mathbf{d\ r\ d} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} = \mathbf{4\ e_1} + \mathbf{10\ e_2} \end{aligned}$$

Das Ergebnis dieses Sandwich-Produkts ist doppelt so groß wie das korrekte Reflexionsergebnis:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{2\ e_1} + \mathbf{5\ e_2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,(\mathbf{4\ e_1} + \mathbf{10\ e_2}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ \mathbf{d\ r\ d}$$

Und auch der kleine Computer wundert sich:

$$\mathbf{r} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{d} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Auch er findet dieses Ergebnis sonderbar:

$$\begin{aligned} \mathbf{d\ r\ d} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{10}\ \mathbf{e_2} \end{aligned}$$

Das Ergebnis dieses Sandwich-Produkts ist doppelt so groß wie das korrekte Reflexionsergebnis.

Irgendetwas ist schief gelaufen!

Das ist schief gelaufen:

Bei den ersten beiden Sandwich-Produkten hatten wir berechnet:

$$\mathbf{r}_{\text{ref}} = \mathbf{n\ r\ n} = \underset{\uparrow}{\mathbf{e_1}}\ (\mathbf{5\ e_1 + 2\ e_2})\ \underset{\uparrow}{\mathbf{e_1}} = \quad \mathbf{5\ e_1 - 2\ e_2}$$

bzw.

$$\mathbf{r}_{\text{ref}} = \mathbf{n\ r\ n} = \underset{\uparrow}{\mathbf{e_2}}\ (\mathbf{5\ e_1 + 2\ e_2})\ \underset{\uparrow}{\mathbf{e_2}} = \mathbf{-\ 5\ e_1 + 2\ e_2}$$

Einheitsvektoren

Beim dritten Sandwich-Produkt dagegen war:

$$\mathbf{d\ r\ d} = \underset{\uparrow}{(\mathbf{e_1 + e_2})}\ (\mathbf{5\ e_1 + 2\ e_2})\ \underset{\uparrow}{(\mathbf{e_1 + e_2})} = \mathbf{4\ e_1 + 10\ e_2}$$

keine Einheitsvektoren

Normierung von Reflexionsvektoren

Die Reflexionsformel für Vektoren

$$\mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{n}\ \mathbf{r}\ \mathbf{n}$$

ist nur dann gültig, wenn die Reflexionsvektoren **n** Einheitsvektoren sind. Sie müssen normiert sein

$$\mathbf{n}^2 = \mathbf{1}$$

oder … (siehe später) …

Normierung von Reflexionsvektoren

Um den Vektor der Diagonalen

$$\mathbf{d} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$$

zu normieren, muss er durch die skalare Wurzel seines Quadrats

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^2 &= (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2})^2 = (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2})\,(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}) \\ &= \mathbf{e_1}^2 + \mathbf{e_1}\mathbf{e_2} + \mathbf{e_2}\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}^2 \\ &= \mathbf{2}\end{aligned}$$

dividiert werden.

Normierung von Reflexionsvektoren

Um den Vektor der Diagonalen

$$\mathbf{d} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$$

zu normieren, muss der kleine Computer durch die skalare Wurzel des Quadrats dieses Vektors

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^2 = (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2})^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{2}\end{aligned}$$

dividieren.

Normierung von Reflexionsvektoren

Also: $\mathbf{d} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{d}^2 = \mathbf{2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Der normierte Reflexionsvektor **n** lautet somit:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{d}}{\sqrt{\mathbf{d}^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2})$$

Normierung von Reflexionsvektoren

Also: $\mathbf{d} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{d}^2 = \mathbf{2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Der normierte Reflexionsvektor **n** lautet somit:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{d}}{\sqrt{\mathbf{d}^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2})$$

Oder in Matrizenschreibweise:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Unser drittes Sandwich-Produkt

Blaue Vektoren: $\mathbf{r} = 5\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2$ $\qquad \mathbf{r}_{\text{ref}} = 2\,\mathbf{e}_1 + 5\,\mathbf{e}_2$

Reflexionsvektor: $\mathbf{n} = = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$

Jetzt endlich kann die Reflexionsformel korrekt ausgeführt werden:

$$\mathbf{n\,r\,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)\,(5\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2)\,\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

$$= \frac{1}{2}(7 - 3\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\,(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

$$= 2\,\mathbf{e}_1 + 5\,\mathbf{e}_2$$

Und wir erhalten das richtige Ergebnis.

Unser drittes Sandwich-Produkt

$$\mathbf{r} = \mathbf{5\ e_1} + \mathbf{2\ e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Korrekte Reflexionsberechnung in Matrizenschreibweise:

$$\mathbf{n\ r\ n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \mathbf{2\ e_1} + \mathbf{5\ e_2} \ \Rightarrow \text{ perfektes Ergebnis}$$

Zusammenfassung

Bei einer Reflexion des Vektors **r** an einer Reflexionsachse, die durch den Reflexionsvektor **n** repräsentiert wird, ergibt sich der reflektierte Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ durch ein Sandwich-Produkt.

Wenn der Reflexionsvektor **n** ein Einheitsvektor ist (also $\mathbf{n}^2 = 1$ gilt), dann lautet dieses Sandwich-Produkt:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{n}\ \mathbf{r}\ \mathbf{n}$$

Zusammenfassung

Bei einer Reflexion des Vektors **r** an einer Reflexionsachse, die durch den Reflexionsvektor **n** repräsentiert wird, ergibt sich der reflektierte Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ durch ein Sandwich-Produkt.

Wenn der Reflexionsvektor **n** ein Einheitsvektor ist (also $\mathbf{n}^2 = 1$ gilt), dann lautet dieses Sandwich-Produkt:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}$$

Und wenn der Reflexionsvektor kein Einheitsvektor sein sollte, muss normiert werden. Dann ergibt sich der in der nächsten Folie dargestellte Zusammenhang.

Verallgemeinerung der Zusammenfassung

Bei einer Reflexion des Vektors **r** an einer Reflexionsachse, die durch den Reflexionsvektor **d** repräsentiert wird, ergibt sich der reflektierte Vektor $\mathbf{r}_{\text{ref}}$ durch ein Sandwich-Produkt.

Wenn der Reflexionsvektor **d** ein Vektor beliebiger Länge ist, dann lautet dieses Sandwich-Produkt:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\text{ref}} &= \mathbf{d}\,\mathbf{r}\,\mathbf{d}^{-1} \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{d}^2}\,\mathbf{d}\,\mathbf{r}\,\mathbf{d}\end{aligned}$$

Verallgemeinerung der Zusammenfassung

Bei einer Reflexion des Vektors $\mathbf{r}$ an einer Reflexionsachse, die durch den Reflexionsvektor $\mathbf{d}$ repräsentiert wird, ergibt sich der reflektierte Vektor $\mathbf{r}_{\text{ref}}$ durch das folgende Sandwich-Produkt:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\text{ref}} &= \mathbf{d}\,\mathbf{r}\,\mathbf{d}^{-1} \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{d}^{2}}\,\mathbf{d}\,\mathbf{r}\,\mathbf{d}\end{aligned}$$

Hier wurde die Definition der Inversen eines Vektors verwendet, die bereits in den Ergänzungsfolien 03 angegeben wurde:

$$\mathbf{d}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{d}^{2}}\,\mathbf{d}$$

Zusammenfassung für Nervensägen

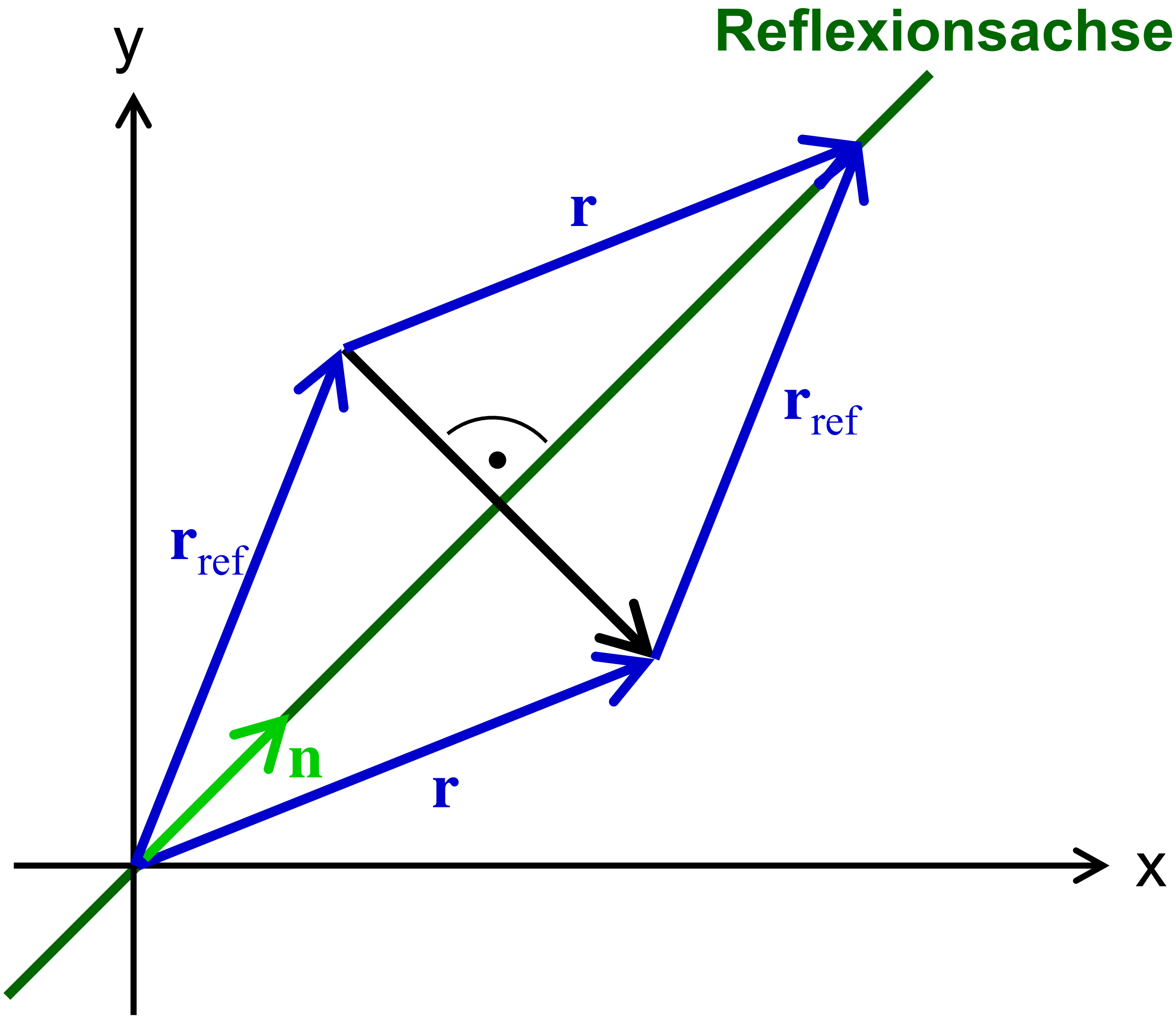
Bei einer Reflexion des Vektors **r** an einer Reflexionsachse, die durch den Reflexionsvektor **n** repräsentiert wird, ergibt sich der reflektierte Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ durch ein Sandwich-Produkt.

Wenn der Reflexionsvektor **n** ein Einheitsvektor ist (also $\mathbf{n}^2 = 1$ gilt), dann lautet dieses Sandwich-Produkt:

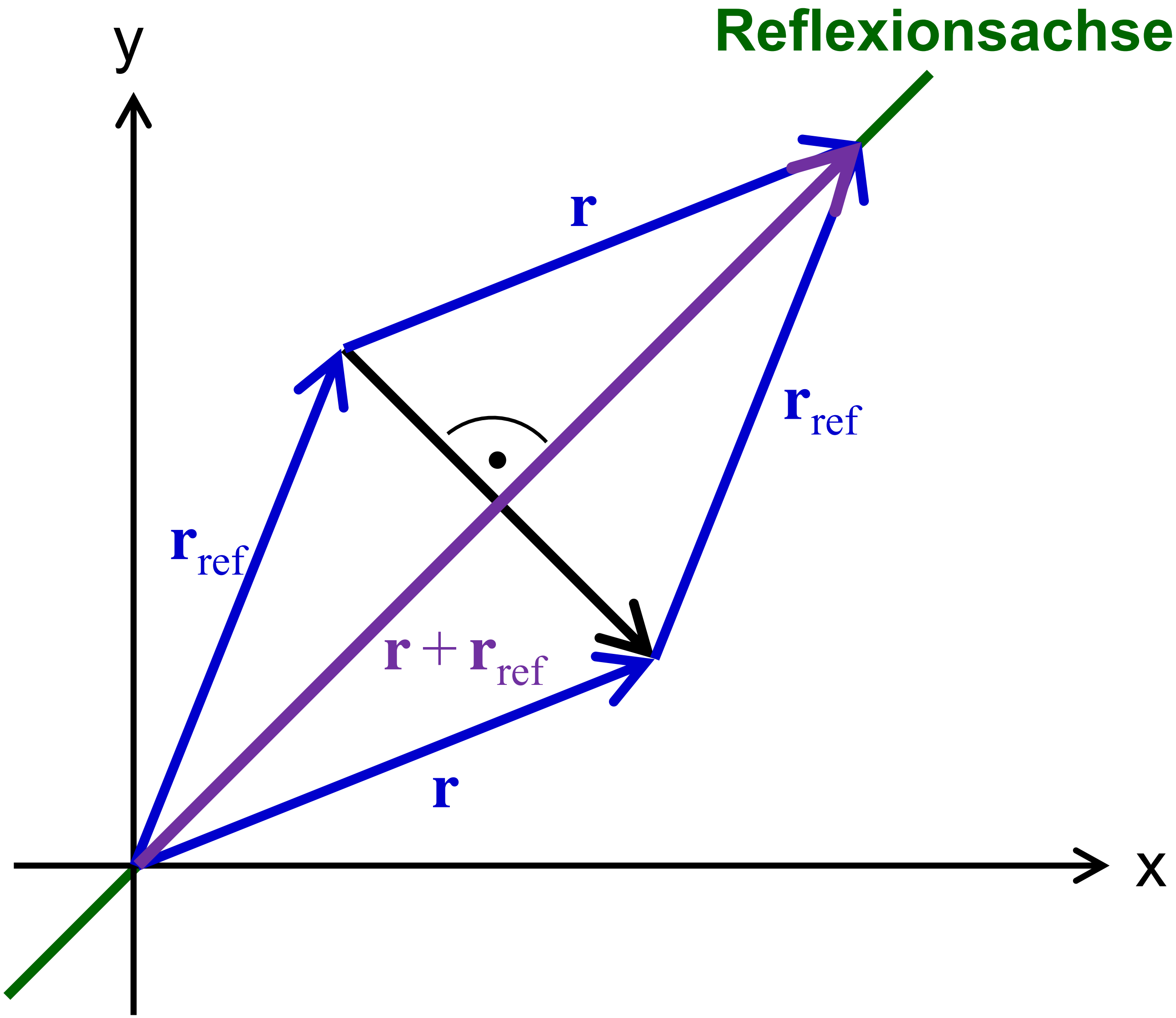
$$\mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}$$

Mathematiker sind nervig. Immer wollen sie alles beweisen. Zum Glück geht das ganz einfach – wenn wir uns die geometrische Situation vergegenwärtigen und das innere und äußere Produkt nutzen.

Geometrische Situation



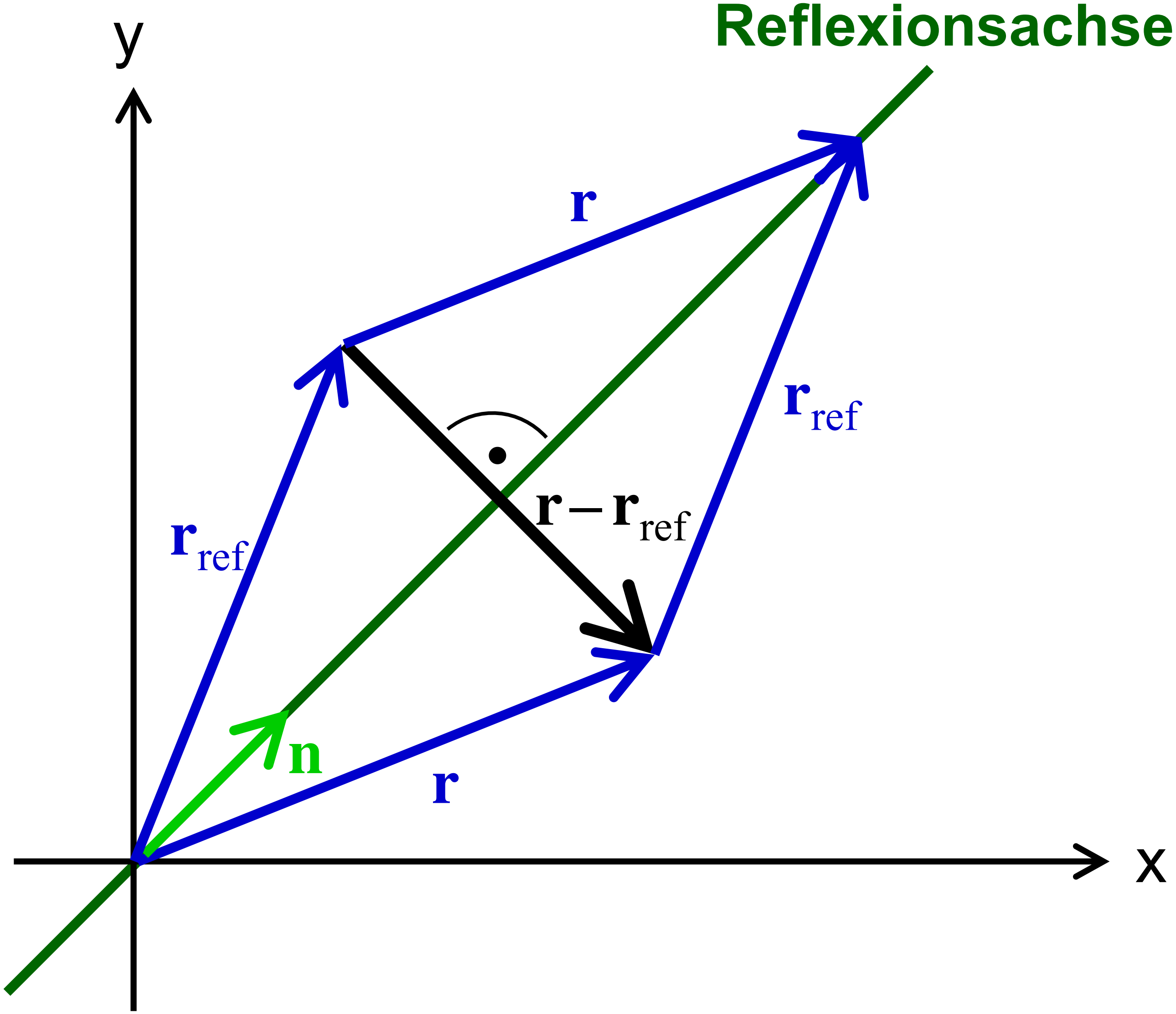
Geometrische Situation



Geometrische Situation

- Die Summe aus ursprünglichem Vektor **r** und dem reflektierten Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ muss auf der Reflexionsachse (bzw. parallel zur Reflexionsachse) liegen. Sie muss also ein Vielfaches des Reflexionsvektors **n** sein.

Geometrische Situation



Geometrische Situation

- Die Summe aus ursprünglichem Vektor **r** und dem reflektierten Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ muss auf der Reflexionsachse (bzw. parallel zur Reflexionsachse) liegen. Sie muss also ein Vielfaches des Reflexionsvektors **n** sein.

- Die Differenz des ursprünglichem Vektors **r** und des reflektierten Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ muss senkrecht zur Reflexionsachse liegen. Dieser Differenzvektor muss also orthogonal zum Reflexionsvektor **n** stehen.

Geometrische Situation

- Die Summe aus ursprünglichem Vektor $\mathbf{r}$ und dem reflektierten Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ muss auf der Reflexionsachse (bzw. parallel zur Reflexionsachse) liegen. Sie muss also ein Vielfaches des Reflexionsvektors $\mathbf{n}$ sein.

- Die Differenz des ursprünglichem Vektors $\mathbf{r}$ und des reflektierten Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ muss senkrecht zur Reflexionsachse liegen. Dieser Differenzvektor muss also orthogonal zum Reflexionsvektor $\mathbf{n}$ stehen.

- Und dass diese Vektoren $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$, $\mathbf{n}$, $(\mathbf{r} + \mathbf{r}_{\mathrm{ref}})$ sowie $(\mathbf{r}_{\mathrm{ref}} – \mathbf{r}_{\mathrm{ref}})$ alle in einer Ebene liegen, ist angesichts der vorigen Skizzen auch selbstverständlich.

Geometrische Situation

- Die Summe aus ursprünglichem Vektor **r** und dem reflektierten Vektor $\mathbf{r}_{\text{ref}}$ muss auf der Reflexionsachse (bzw. parallel zur Reflexionsachse) liegen. Sie muss also ein Vielfaches des Reflexionsvektors **n** sein.

$$\mathbf{r} + \mathbf{r}_{\text{ref}} = \mathbf{r} + \mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}$$

$$= \mathbf{r}\,\mathbf{n}\,\mathbf{n} + \mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}$$

$$= (\mathbf{r}\,\mathbf{n} + \mathbf{n}\,\mathbf{r})\,\mathbf{n}$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Skalar}}}{(\mathbf{r} \bullet \mathbf{n})}\,\mathbf{n} \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{r} + \mathbf{r}_{\text{ref}} \text{ und } \mathbf{n} \text{ sind parallel}$$

Geometrische Situation

- Die Differenz des ursprünglichem Vektors **r** und des reflektierten Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ muss senkrecht zur Reflexionsachse liegen. Dieser Differenzvektor muss also orthogonal zum Reflexionsvektor **n** stehen.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\mathrm{ref}} &= \mathbf{r} - \mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n} \\
&= \mathbf{r}\,\mathbf{n}\,\mathbf{n} - \mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n} \\
&= (\mathbf{r}\,\mathbf{n} - \mathbf{n}\,\mathbf{r})\,\mathbf{n} \\
&= (\mathbf{r} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{n}
\end{aligned}
$$

$\uparrow$

Bivektor ohne Skalar

Geometrische Situation

- Die Differenz des ursprünglichem Vektors $\mathbf{r}$ und des reflektierten Vektor $\mathbf{r}_{\text{ref}}$ muss senkrecht zur Reflexionsachse liegen. Dieser Differenzvektor muss also orthogonal zum Reflexionsvektor $\mathbf{n}$ stehen.

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{ref}} = (\underbrace{\mathbf{r} \wedge \mathbf{n}}_{\text{Bivektor ohne Skalar}})\, \mathbf{n}$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{ref}})\, \mathbf{n} = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{n})\, \mathbf{n}^2$$

$$= \underbrace{\mathbf{r} \wedge \mathbf{n}}_{\text{Bivektor ohne Skalar}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{ref}} \text{ und } \mathbf{n} \text{ sind orthogonal}$$

Schlussfolgerung

Die Formel

$$\mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}$$

beschreibt also uneingeschränkt und unzweifelhaft eine Reflexion.

Schlussfolgerung

Die Formel

$$\mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}$$

beschreibt also uneingeschränkt und unzweifelhaft eine Reflexion.

Und deshalb wünscht Ihnen Earl John Montagu, der 4. Earl of Sandwich, Guten Appetit bei Ihrem nächsten Sandwich!

Ergänzungsfolien 05: Der kleine Computer möchte noch ein Sandwich

Mathematik 1 des Bachelor-Studiengangs Ingenieurinformatik der HTW Berlin

Corona-Semester Sommer 2020
– Dr. M. Horn –

Hallo !

Doppel-Sandwich

Heute recyceln wir eine alte Aufgabe und übertragen sie in die Mathematik des kleinen, doofen Computers. Er wurde ja nur für Rechnungen mit reellen (2 x 2)-Matrizen der Art

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

programmiert, wobei a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} reelle Zahlen sind.

Andere mathematische Objekte versteht er nicht; mit anderen mathematischen Objekten kann er nichts anfangen.

Doppel-Sandwich

In dieser alten Aufgabe … (Sie kennen Sie aus einem Übungsblatt) …

Doppel-Sandwich

In dieser alten Aufgabe werden zwei Reflexionen hintereinander ausgeführt.

Das ist so, als ob Sie sich gleichzeitig in zwei schräg zueinander stehenden, ebenen Spiegeln spiegeln. Ihr Spiegelbild, das durch Reflexion an einem ersten ebenen Spiegel entsteht, wird in einem zweiten ebenen Spiegel reflektiert, bevor das Licht dieses zweiten Spiegelbilds über den ersten Spiegel zurück in Ihre Augen geworfen wird.

Doppel-Sandwich

In dieser alten Aufgabe werden zwei Reflexionen hintereinander ausgeführt.

Das ist so, als ob Sie sich gleichzeitig in zwei schräg zueinander stehenden, ebenen Spiegeln spiegeln. Ihr Spiegelbild, das durch Reflexion an einem ersten ebenen Spiegel entsteht, wird in einem zweiten ebenen Spiegel reflektiert, bevor das Licht dieses zweiten Spiegelbilds über den ersten Spiegel zurück in Ihre Augen geworfen wird.

Wie sieht das Spiegelbild dieser Doppel-Spiegelung dann aus?

Doppel-Sandwich

In dieser alten Aufgabe werden zwei Reflexionen hintereinander ausgeführt.

Das ist aber nur so, als ob …

Wie sieht das Spiegelbild dieser Doppel-Spiegelung dann aus?

Doppel-Sandwich

In dieser alten Aufgabe werden zwei Reflexionen hintereinander ausgeführt.

Das ist aber nur so, als ob … Denn leider können wir diese Situation mit der Mathematik des kleinen Computers nicht richtig nachrechnen. Der kleine Computer beherrscht ja nur die Geometrie der Ebene mit dimensionslosen Punkten, eindimensionalen Vektoren und zweidimensionalen, orientierten Flächenstücken.

Wie sieht das Spiegelbild dieser Doppel-Spiegelung dann aus?

Doppel-Sandwich

In dieser alten Aufgabe werden zwei Reflexionen hintereinander ausgeführt.

Das ist aber nur so, als ob … Denn leider können wir diese Situation mit der Mathematik des kleinen Computers nicht richtig nachrechnen. Der kleine Computer beherrscht ja nur die Geometrie der Ebene mit dimensionslosen Punkten, eindimensionalen Vektoren und zweidimensionalen, orientierten Flächenstücken. Im echten Leben befinden wir jedoch in einem dreidimensionalen Raum. Den kann der kleine Computer (noch) nicht berechnen.

Doppel-Sandwich

In dieser alten Aufgabe werden zwei Reflexionen hintereinander ausgeführt.

Deshalb werden wir eine mathematisch reduzierte Doppel-Spiegelung berechnen: Wir reflektieren nicht an Flächen, sondern an Achsen. Das hatten wir ja schon in den letzten Ergänzungsfolien 04 so gemacht.

Doppel-Sandwich

In dieser alten Aufgabe werden zwei Reflexionen hintereinander ausgeführt.

Deshalb werden wir eine mathematisch reduzierte Doppel-Spiegelung berechnen: Wir reflektieren nicht an Flächen, sondern an Achsen. Das hatten wir ja schon in den letzten Ergänzungsfolien 04 so gemacht.

Und dabei haben wir gelernt: Das Sandwich-Produkt

$$\mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}$$

beschreibt die Reflexion des Vektors **r** an einer Achse, die in Richtung des Einheitsvektors **n** zeigt.

Doppel-Sandwich

Und da wir jetzt zwei Reflexionen hintereinander betrachten, benötigen wir auch zwei Reflexionsachsen.

Die erste Reflexion wird also an einer Achse in Richtung eines ersten Reflexionsvektors **n** stattfinden:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{n}\ \mathbf{r}\ \mathbf{n}$$

Doppel-Sandwich

Und da wir jetzt zwei Reflexionen hintereinander betrachten, benötigen wir auch zwei Reflexionsachsen.

Die erste Reflexion wird also an einer Achse in Richtung eines ersten Reflexionsvektors **n** stattfinden:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{n}\ \mathbf{r}\ \mathbf{n}$$

Und die zweite Reflexion des reflektierten Vektors $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ wird an einer zweiten Achse, die in Richtung eines zweiten Reflexionsvektors **m** weist (der ebenfalls ein Einheitsvektor sein sollte), stattfinden.

Doppel-Sandwich

Und da wir jetzt zwei Reflexionen hintereinander betrachten, benötigen wir auch zwei Reflexionsachsen.

Die erste Reflexion wird also an einer Achse in Richtung eines ersten Reflexionsvektors **n** stattfinden:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{n}\ \mathbf{r}\ \mathbf{n}$$

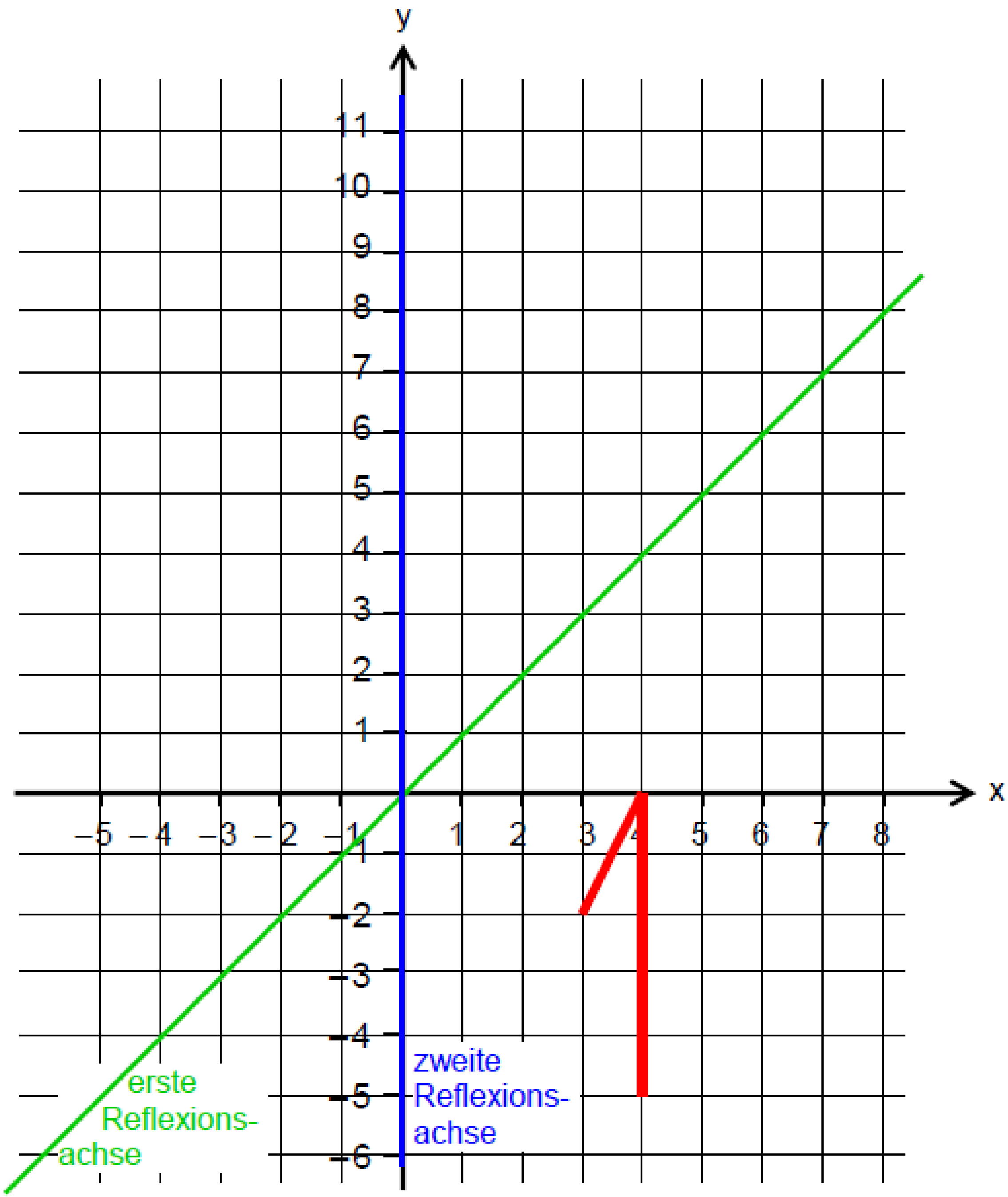
Und die zweite Reflexion des reflektierten Vektors $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ wird an einer zweiten Achse, die in Richtung eines zweiten Reflexionsvektors **m** weist, stattfinden. So erhalten wir das doppelte Sandwich-Produkt:

$$\mathbf{m}\ \mathbf{r}_{\mathrm{ref}}\ \mathbf{m} = \mathbf{m}\ \mathbf{n}\ \mathbf{r}\ \mathbf{n}\ \mathbf{m}$$

Eine alte Aufgabe

Die rote Zahl **1** (siehe folgende Folie) wird zuerst an der Diagonalen des I. bzw. III Quadranten reflektiert.

Das Spiegelbild der reflektierten Zahl **1** wird danach an der y-Achse reflektiert.



Skizze der geometrischen Situation

Eine alte Aufgabe

Die rote Zahl **1** (siehe folgende Folie) wird zuerst an der Diagonalen des I. bzw. III Quadranten reflektiert.

Das Spiegelbild der reflektierten Zahl **1** wird danach an der y-Achse reflektiert.

Fragestellungen:

Wo liegt das Spiegelbild nach der zweiten Reflexion?

Und durch welche geometrische Operation kann es direkt aus der ursprünglichen Zahl **1** gebildet werden?

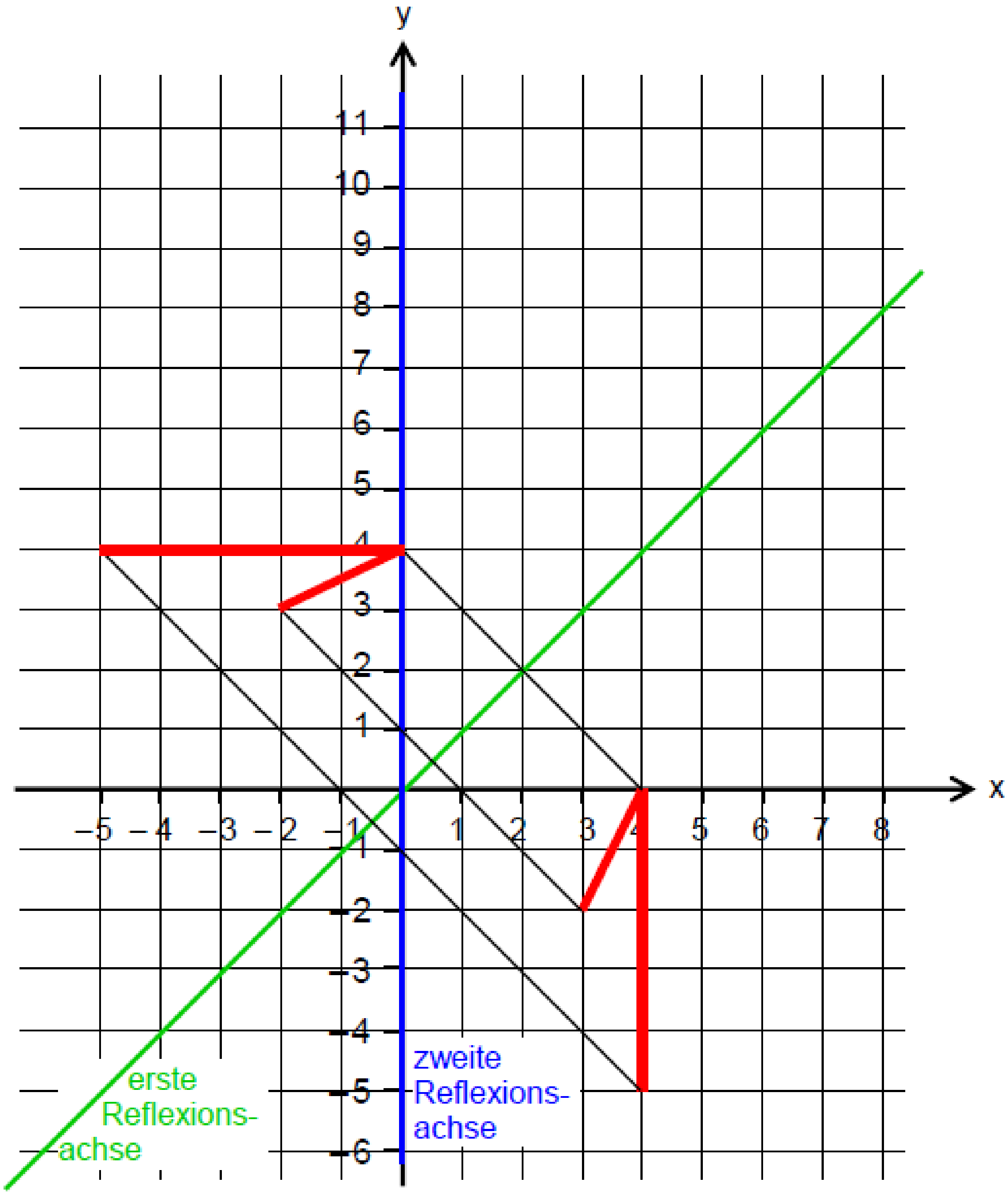
Zeichnerische Lösung

Die zeichnerische Lösung ist ganz einfach: Mit Hilfe eines Geo-Dreiecks konstruieren wir die Senkrechten, die von den Endpunkten unserer roten Zahl **1** ausgehen und die orthogonal zur ersten Reflexionsachse stehen.

Auf den verlängerten Senkrechten zeichnen wir die Bildpunkte der **1** auf der anderen Seite der Achse in genau gleichem Abstand ein.

Verbinden wir diese Bildpunkte, erhalten wir das gesuchte Spiegelbild (siehe folgende Folie).

Und nach dieser nächsten Folie rechnen wir alles aus.



Skizze der geometrischen Situation

Rechnerische Lösung

Im Koordinatensystem können die drei Endpunkte der gegebenen roten Zahl **1** abgelesen werden. Sie lauten:

Nasenspitze: $\mathbf{r}_A = \mathbf{3}\ \mathbf{e_1} - \mathbf{2}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

Kopfpunkt: $\mathbf{r}_B = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

Fußpunkt: $\mathbf{r}_C = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} - \mathbf{5}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

Rechnerische Lösung

Im Koordinatensystem können die drei Endpunkte der gegebenen roten Zahl **1** abgelesen werden. Sie lauten:

Nasenspitze: $\mathbf{r}_A = \mathbf{3\ e_1} - \mathbf{2\ e_2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

Kopfpunkt: $\mathbf{r}_B = \mathbf{4\ e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

Fußpunkt: $\mathbf{r}_C = \mathbf{4\ e_1} - \mathbf{5\ e_2} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

Und der Reflexionsvektor lautet:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Rechnerische Lösung

Nasenspitze: $\mathbf{r}_A = \mathbf{3\, e_1 - 2\, e_2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

Reflektierte Nasenspitze:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\mathrm{Aref}} &= \mathbf{n\, r}_{\mathrm{A}}\, \mathbf{n} \\
&= \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\, (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2})\, (\mathbf{3\, e_1} - \mathbf{2\, e_2})\, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\, (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}) \\
&= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\, (\mathbf{1} - \mathbf{5\, e_1 e_2})\, (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}) \\
&= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\, (-\, \mathbf{4\, e_1} + \mathbf{6\, e_2}) \\
&= -\, \mathbf{2\, e_1} + \mathbf{3\, e_2}
\end{aligned}
$$

Rechnerische Lösung

Nasenspitze: $\mathbf{r}_{\mathrm{A}} = \mathbf{3}\ \mathbf{e_1} - \mathbf{2}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

Reflektierte Nasenspitze in Matrizenrechnung:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Aref}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -\mathbf{2}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{3}\ \mathbf{e_2}$$

Rechnerische Lösung

Kopfpunkt: $\mathbf{r}_\mathrm{B} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

Reflektierter Kopfpunkt:

$$\mathbf{r}_\mathrm{Bref} = \mathbf{n}\ \mathbf{r}_\mathrm{B}\ \mathbf{n}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2})\ \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2})$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} (\mathbf{4} - \mathbf{4}\ \mathbf{e_1 e_2})\ (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2})$$

$$= (\mathbf{2} - \mathbf{2}\ \mathbf{e_1 e_2})\ (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2})$$

$$= \mathbf{4}\ \mathbf{e_2}$$

Rechnerische Lösung

Kopfpunkt: $\mathbf{r}_\mathrm{B} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

Reflektierter Kopfpunkt in Matrizenrechnung:

$$\mathbf{r}_\mathrm{Bref} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_2}$$

Rechnerische Lösung

Fußpunkt: $\mathbf{r}_\mathrm{C} = \mathbf{4\ e_1 - 5\ e_2} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

Reflektierter Fußpunkt:

$$\mathbf{r}_\mathrm{Cref} = \mathbf{n\ r}_\mathrm{C}\ \mathbf{n}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\,\mathbf{(e_1 + e_2)\ (4\ e_1 - 5\ e_2)}\,\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\,\mathbf{(e_1 + e_2)}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{(-\ 1 - 9\ e_1e_2)\ (e_1 + e_2)}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{(-\ 10\ e_1 + 8\ e_2)}$$

$$= \mathbf{-\ 5\ e_1 + 4\ e_2}$$

Rechnerische Lösung

Fußpunkt: $\mathbf{r}_\mathrm{C} = \mathbf{4\ e_1} - \mathbf{5\ e_2} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

Reflektierter Fußpunkt in Matrizenrechnung:

$$\mathbf{r}_\mathrm{Cref} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{9}{\sqrt{2}} \\ \frac{9}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -\mathbf{5\ e_1} + \mathbf{4\ e_2}$$

Zwischenergebnisse

Nasenspitze: $\mathbf{r}_\mathrm{A} = \mathbf{3\ e_1} - \mathbf{2\ e_2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

$\mathbf{r}_\mathrm{Aref} = -\ \mathbf{2\ e_1} + \mathbf{3\ e_2} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

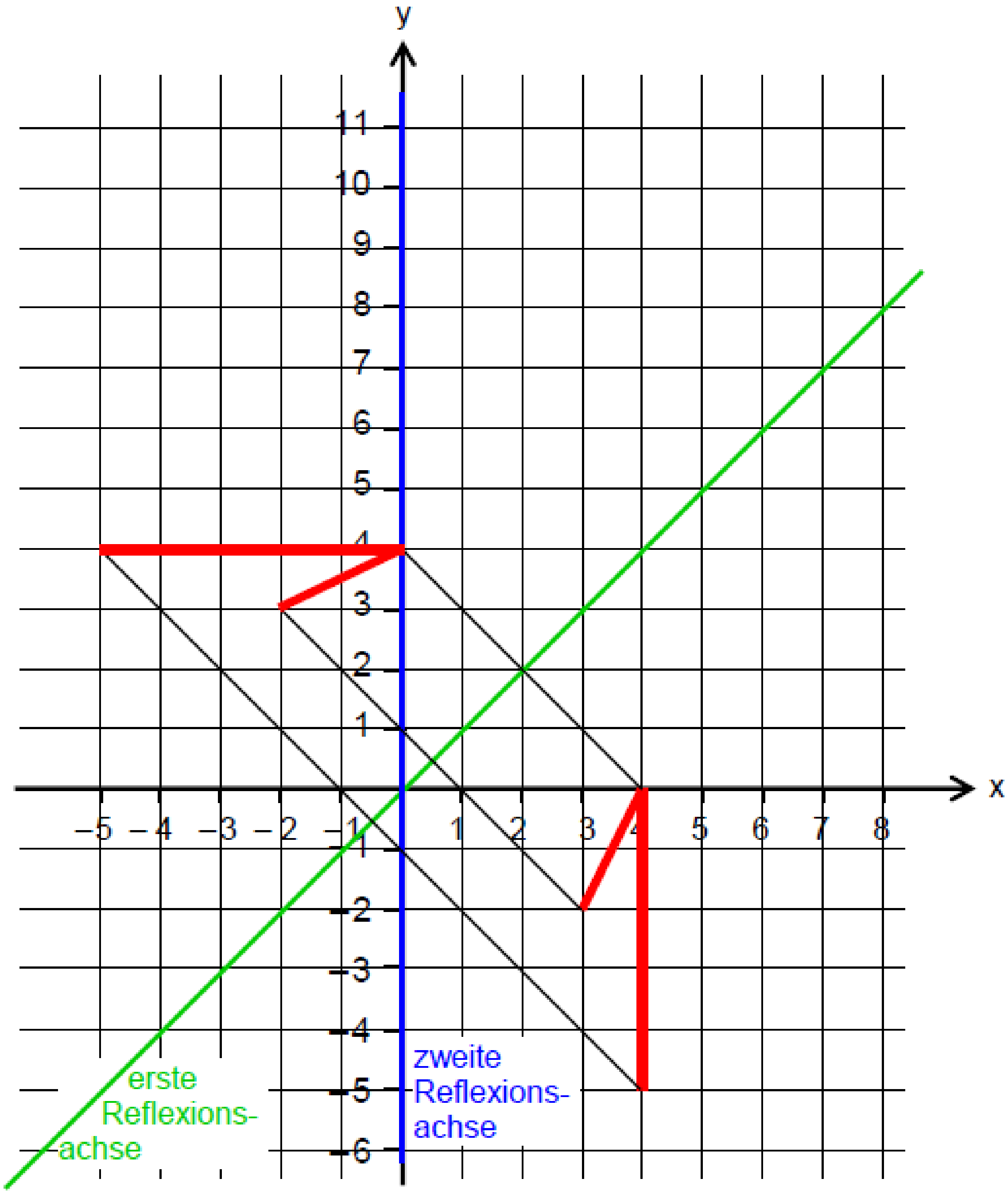
Kopfpunkt: $\mathbf{r}_\mathrm{B} = \mathbf{4\ e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$\mathbf{r}_\mathrm{Bref} = \mathbf{4\ e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Fußpunkt: $\mathbf{r}_\mathrm{C} = \mathbf{4\ e_1} - \mathbf{5\ e_2} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

$\mathbf{r}_\mathrm{Cref} = -\ \mathbf{5\ e_1} + \mathbf{4\ e_2} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Diese Ergebnisse stimmen mit der zeichnerischen Lösung überein (siehe noch einmal die folgende Skizze).

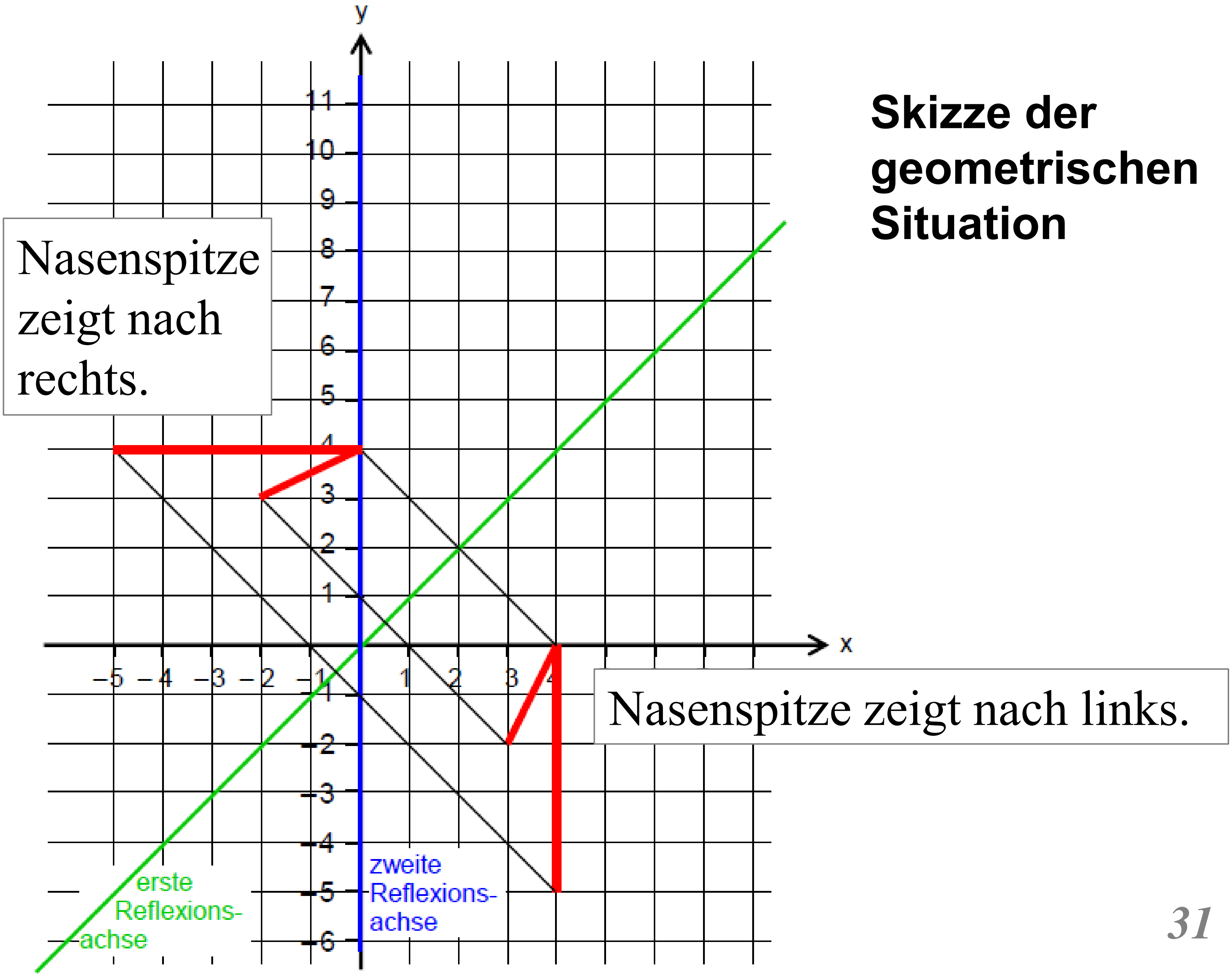


Skizze der geometrischen Situation

Zwischenergebnisse

Und es ist klar erkennbar, dass es sich hier um eine Reflexion handelt, denn die Nasenspitze der roten **1**, die zuerst nach links zeigte, zeigt im reflektierten Bild nach rechts.

Skizze der geometrischen Situation

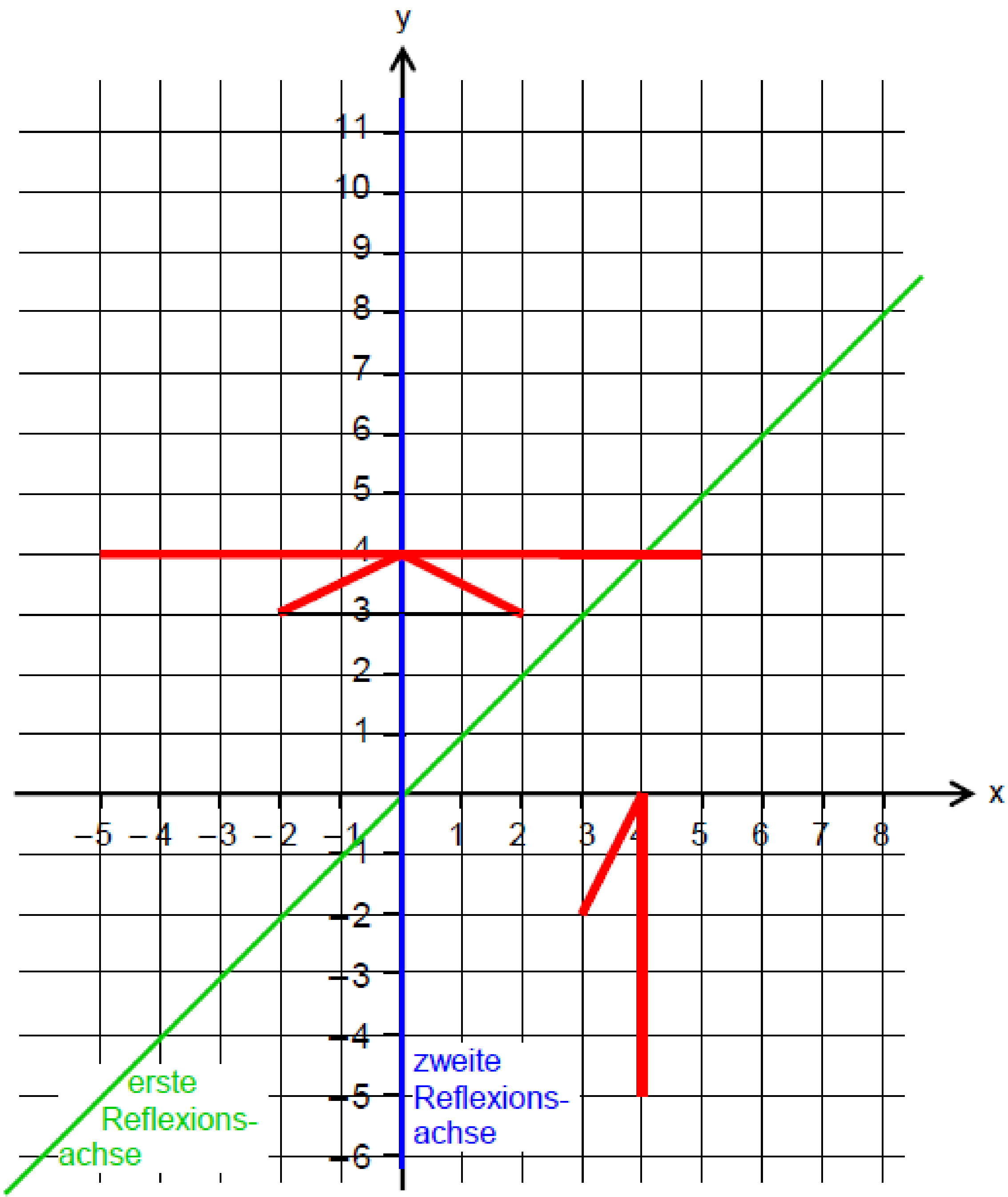


Zeichnerische Lösung

Und es ist klar erkennbar, dass es sich hier um eine Reflexion handelt, denn die Nasenspitze der roten **1**, die zuerst nach links zeigte, zeigt im reflektierten Bild nach rechts.

Dieses reflektierte Bild kann nun in einem zweiten Schritt erneut recht einfach zeichnerisch an der y-Achse reflektiert werden (siehe folgende Folie).

Und auch das rechnen wir nach der nächsten Folie dann nach.



Skizze der geometrischen Situation

Und hallo, hallo, Achtung, Suggestion!

Und hallo, hallo, wir brauchen einen neuen Namen für das doppelte Sandwich-Produkt: $\mathbf{r}_{\text{doppel-ref}}$ ist viel zu lang und klingt außerdem irgendwie blöd.

Aber wir hatten ja **eine rote 1**. Deshalb bezeichnen wir den zweifach reflektierten Vektor beim doppelten Sandwich-Produkt dieser Farbe entsprechend und sehr, sehr suggestiv einfach als $\mathbf{r}_{\text{rot}}$.

Es gilt also:

$$\mathbf{r}_{\text{rot}} = \mathbf{m}\,\mathbf{r}_{\text{ref}}\,\mathbf{m} = \mathbf{m}\,\mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}\,\mathbf{m}$$

Rechnerische Lösung

Die Zwischenergebnisse lauteten:

Nasenspitze: $\mathbf{r}_{\text{Aref}} = -\,\mathbf{2}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{3}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Kopfpunkt: $\mathbf{r}_{\text{Bref}} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Fußpunkt: $\mathbf{r}_{\text{Cref}} = -\,\mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{4}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Und der neue Reflexionsvektor lautet nun:

$$\mathbf{m} = \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rechnerische Lösung

Reflektierte Nasenspitze: $\mathbf{r}_{\mathrm{Aref}} = -\,\mathbf{2}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{3}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Doppelt reflektierte Nasenspitze:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Arot}} = \mathbf{m}\ \mathbf{r}_{\mathrm{Aref}}\ \mathbf{m}$$

$$= \mathbf{e_2}\ (-\ \mathbf{2}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{3}\ \mathbf{e_2})\ \mathbf{e_2}$$

$$= (\mathbf{3} + \mathbf{2}\ \mathbf{e_1}\mathbf{e_2})\ \mathbf{e_2}$$

$$= \mathbf{2}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{3}\ \mathbf{e_2}$$

Rechnerische Lösung

Reflektierte Nasenspitze: $\mathbf{r}_{\text{Aref}} = -\,\mathbf{2\ e_1} + \mathbf{3\ e_2} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Doppelt reflektierte Nasenspitze in Matrizenrechnung:

$$\mathbf{r}_{\text{Arot}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{2\ e_1} + \mathbf{3\ e_2}$$

Rechnerische Lösung

Reflektierter Kopfpunkt: $\mathbf{r}_{\text{Bref}} = \mathbf{4\ e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Doppelt reflektierter Kopfpunkt:

$$\mathbf{r}_{\text{Brot}} = \mathbf{m\ r}_{\text{Bref}}\ \mathbf{m}$$

$$= \mathbf{e_2\ 4\ e_2\ e_2}$$

$$= \mathbf{4\ e_2}$$

Rechnerische Lösung

Reflektierter Kopfpunkt: $\mathbf{r}_{\mathrm{Bref}} = \mathbf{4\ e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Doppelt reflektierter Kopfpunkt in Matrizenrechnung:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Brot}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{4\ e_2}$$

Rechnerische Lösung

Reflektierter Fußpunkt: $\mathbf{r}_{\mathrm{Cref}} = -\,\mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{4}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Doppelt reflektierter Fußpunkt:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Crot}} = \mathbf{m}\ \mathbf{r}_{\mathrm{Cref}}\ \mathbf{m}$$

$$= \mathbf{e_2}\,(-\,\mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{4}\ \mathbf{e_2})\ \mathbf{e_2}$$

$$= (\mathbf{4} + \mathbf{5}\ \mathbf{e_1 e_2})\ \mathbf{e_2}$$

$$= \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{4}\ \mathbf{e_2}$$

Rechnerische Lösung

Reflektierter Fußpunkt: $\mathbf{r}_{\text{Cref}} = -\, \mathbf{5\ e_1} + \mathbf{4\ e_2} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Doppelt reflektierter Fußpunkt in Matrizenrechnung:

$$\mathbf{r}_{\text{Crot}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{5\ e_1} + \mathbf{4\ e_2}$$

Endergebnisse

Nasenspitze: $\mathbf{r}_{\mathrm{A}} = \mathbf{3}\ \mathbf{e_1} - \mathbf{2}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

$\mathbf{r}_{\mathrm{Arot}} = \mathbf{2}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{3}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

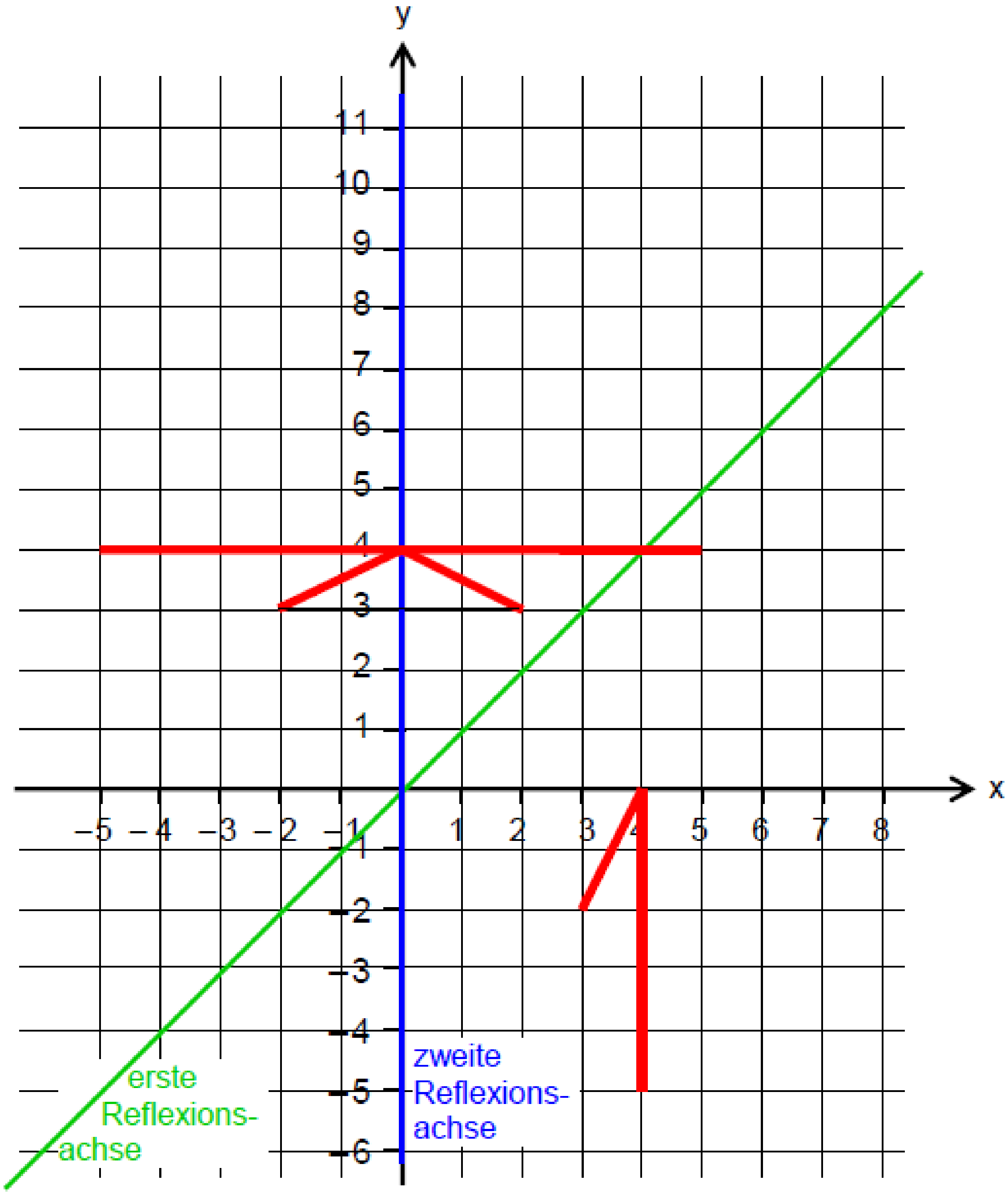
Kopfpunkt: $\mathbf{r}_{\mathrm{B}} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$\mathbf{r}_{\mathrm{Brot}} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Fußpunkt: $\mathbf{r}_{\mathrm{C}} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} - \mathbf{5}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

$\mathbf{r}_{\mathrm{Crot}} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_1} + \mathbf{4}\ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

Diese Ergebnisse stimmen mit der zeichnerischen Lösung überein (siehe noch einmal die folgende Skizze).



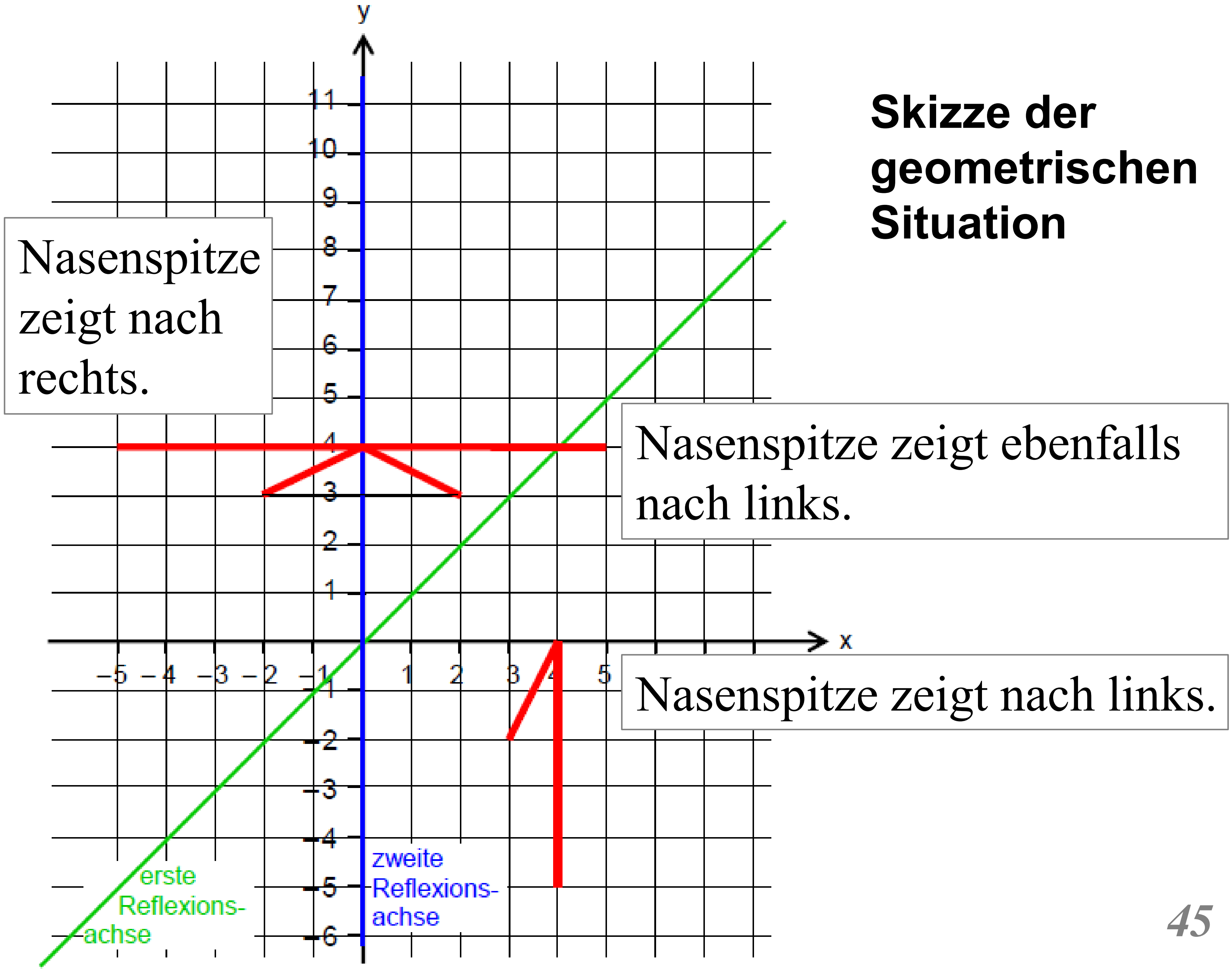
Skizze der geometrischen Situation

Interpretation

Und es ist klar erkennbar, dass es sich hier insgesamt nicht um eine Reflexion handelt, denn die Nasenspitze der roten **1**, die zuerst nach links zeigte, zeigt im doppelt reflektierten Bild ebenfalls nach links.

Eine zweifache Reflexion ergibt also insgesamt keine Reflexion.

Skizze der geometrischen Situation

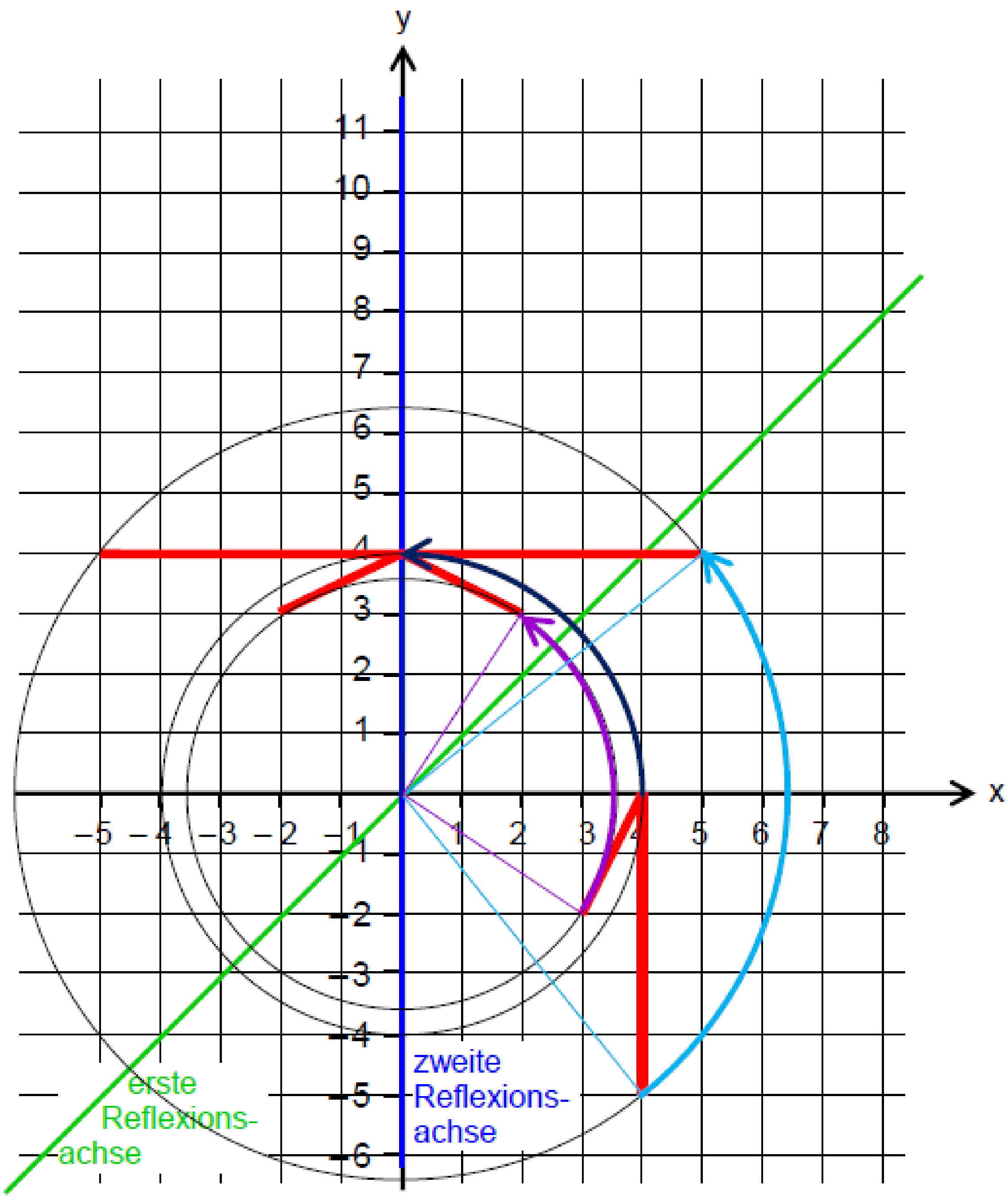


Interpretation

Und es ist klar erkennbar, dass es sich hier insgesamt nicht um eine Reflexion handelt, denn die Nasenspitze der roten **1**, die zuerst nach links zeigte, zeigt im doppelt reflektierten Bild ebenfalls nach links.

Eine zweifache Reflexion ergibt also insgesamt keine Reflexion, sondern eine …

(siehe nächste Folie)



Skizze der geometrischen Situation

Interpretation

Und es ist klar erkennbar, dass es sich hier insgesamt nicht um eine Reflexion handelt, denn die Nasenspitze der roten **1**, die zuerst nach links zeigte, zeigt im doppelt reflektierten Bild ebenfalls nach links.

Eine zweifache Reflexion ergibt also insgesamt keine Reflexion, sondern eine Rotation.

Interpretation

Und es ist klar erkennbar, dass es sich hier insgesamt nicht um eine Reflexion handelt, denn die Nasenspitze der roten **1**, die zuerst nach links zeigte, zeigt im doppelt reflektierten Bild ebenfalls nach links.

Eine zweifache Reflexion ergibt also insgesamt keine Reflexion, sondern eine Rotation.

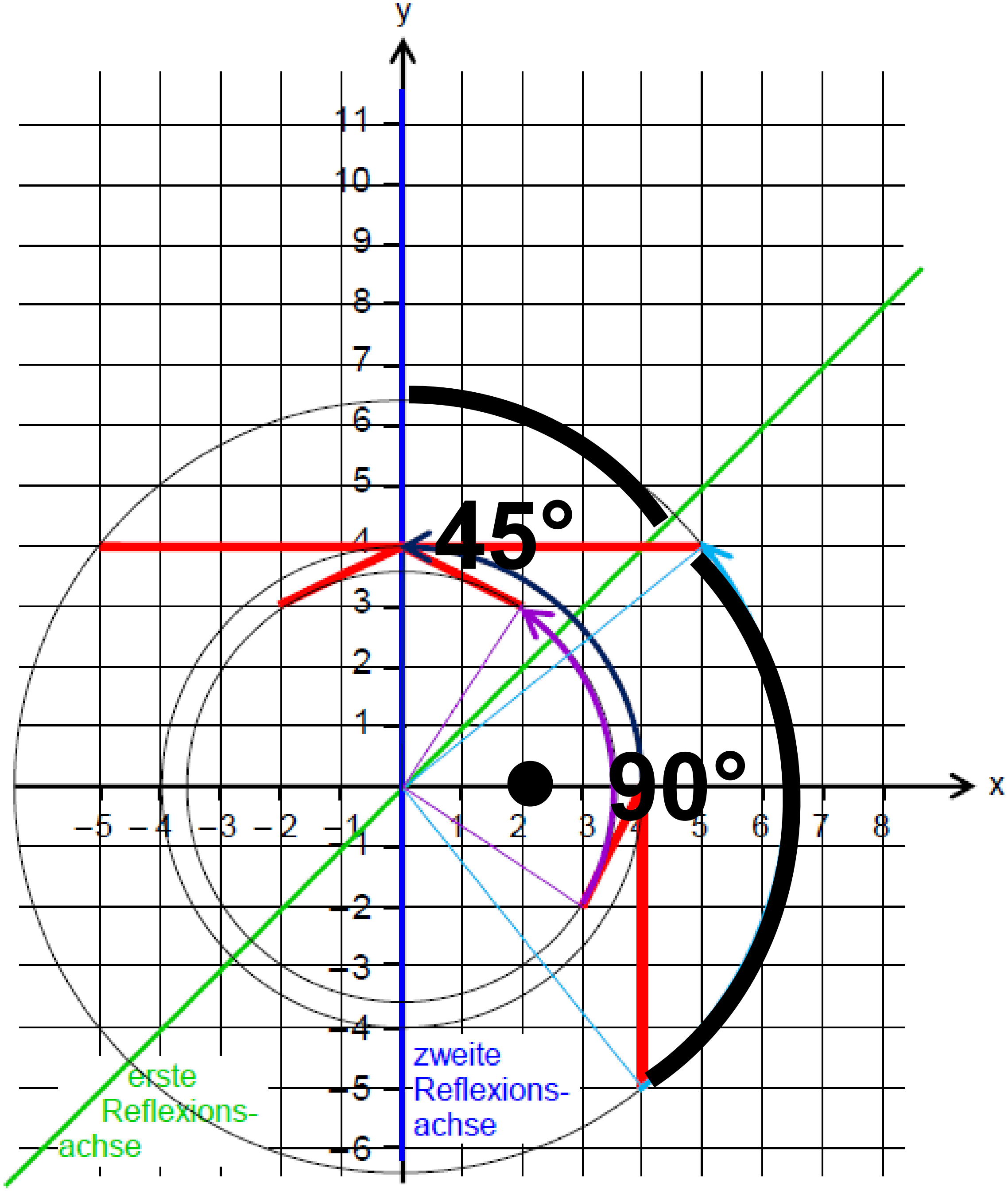
$\Rightarrow$ Das doppelt reflektierte Spiegelbild kann durch eine Rotation direkt aus der ursprünglichen Zahl **1** gebildet werden.

Interpretation

Und es ist klar erkennbar, dass es sich hier insgesamt nicht um eine Reflexion handelt, denn die Nasenspitze der roten **1**, die zuerst nach links zeigte, zeigt im doppelt reflektierten Bild ebenfalls nach links.

Eine zweifache Reflexion ergibt also insgesamt keine Reflexion, sondern eine Rotation.

Der Rotationswinkel ist dabei doppelt so groß wie der Winkel zwischen den beiden Reflexionsachsen.



Skizze der geometrischen Situation

Interpretation

Und es ist klar erkennbar, dass es sich hier insgesamt nicht um eine Reflexion handelt, denn die Nasenspitze der roten **1**, die zuerst nach links zeigte, zeigt im doppelt reflektierten Bild ebenfalls nach links.

Eine zweifache Reflexion ergibt also insgesamt keine Reflexion, sondern eine Rotation.

Der Rotationswinkel ist dabei doppelt so groß wie der Winkel zwischen den beiden Reflexionsachsen.

Und der Name passt auch: $\mathbf{r}_{\text{rot}}$ steht für $\mathbf{r}_{\text{rotation}}$

Was in einer Klausur passieren könnte

Eine typische Aufgabenstellung zur Rotation ist beispielsweise:

Gegeben ist irgendein Vektor **r** in der xy-Ebene.

Dieser Vektor soll in der xy-Ebene um irgendeinen Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ rotiert werden. (Wenn $\boldsymbol{\alpha} > 0$, also positiv ist, dann soll entgegen dem Uhrzeigersinn rotiert werden. Und wenn $\boldsymbol{\alpha} < 0$, also negativ ist, dann soll im Uhrzeigersinn rotiert werden.)

Und natürlich soll der rotierte Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{rot}}$ berechnet werden.

Was in einer Klausur passieren könnte

Eine typische Aufgabenstellung zur Rotation ist beispielsweise:

Gegeben ist irgendein Vektor **r** in der xy-Ebene.

Dieser Vektor soll in der xy-Ebene um irgendeinen Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ rotiert werden. Und natürlich soll der rotierte Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{rot}}$ berechnet werden.

Ganz klar, das kann sehr leicht mit dem doppelten Sandwich-Produkt

$$\mathbf{r}_{\mathrm{rot}} = \mathbf{m\ n\ r\ n\ m}$$

ausgerechnet werden.

Was in einer Klausur passieren könnte

Ganz klar, das kann sehr leicht mit dem doppelten Sandwich-Produkt

$$\mathbf{r}_{\mathrm{rot}} = \mathbf{m\ n\ r\ n\ m}$$

ausgerechnet werden.

Man muss dabei nur zwei geeignete Reflexionsvektoren **n** und **m** finden, die genau die Hälfte des Rotationswinkel, also $\frac{1}{2}\alpha$, einschließen.

Eine einfache Strategie ist dann, als ersten Reflexionsvektor den Basisvektor $\mathbf{e_1}$ in Richtung der x-Achse zu nehmen.

Was in einer Klausur passieren könnte

Man muss dabei nur zwei geeignete Reflexionsvektoren **n** und **m** finden, die genau die Hälfte des Rotationswinkel, also $\frac{1}{2}\alpha$, einschließen.

Eine einfache Strategie ist dann, als ersten Reflexionsvektor den Basisvektor $\mathbf{e_1}$ in Richtung der x-Achse zu nehmen:

$$\mathbf{n} = \mathbf{e_1}$$

Dann kann der zweite Reflexionsvektor leicht mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen ausgedrückt werden als:

$$\mathbf{m} = \cos\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right) \mathbf{e_1} + \sin\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right) \mathbf{e_2}$$

Die alte Aufgabe …

Die rote Zahl **1** (siehe folgende Folie) wird zuerst an der Diagonalen des I. bzw. III Quadranten reflektiert.

Das Spiegelbild der reflektierten Zahl **1** wird danach an der y-Achse reflektiert.

… hätte also auch …

Die alte Aufgabe hätte also auch so bearbeitet werden können:

Die rote Zahl **1** wird zuerst an der x-Achse reflektiert:

$$\mathbf{n} = \mathbf{e_1}$$

Das Spiegelbild der reflektierten Zahl **1** wird danach an der Diagonalen reflektiert:

$$\mathbf{m} = \cos\left(\tfrac{1}{2} \cdot \mathbf{90°}\right) \mathbf{e_1} + \sin\left(\tfrac{1}{2} \cdot \mathbf{90°}\right) \mathbf{e_2}$$

$$= \cos\left(\mathbf{45°}\right) \mathbf{e_1} + \sin\left(\mathbf{45°}\right) \mathbf{e_2}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \mathbf{e_1} + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \mathbf{e_2}$$

Werden diese Reflexionsvektoren genutzt …

Die alte Aufgabe hätte also auch so bearbeitet werden können:

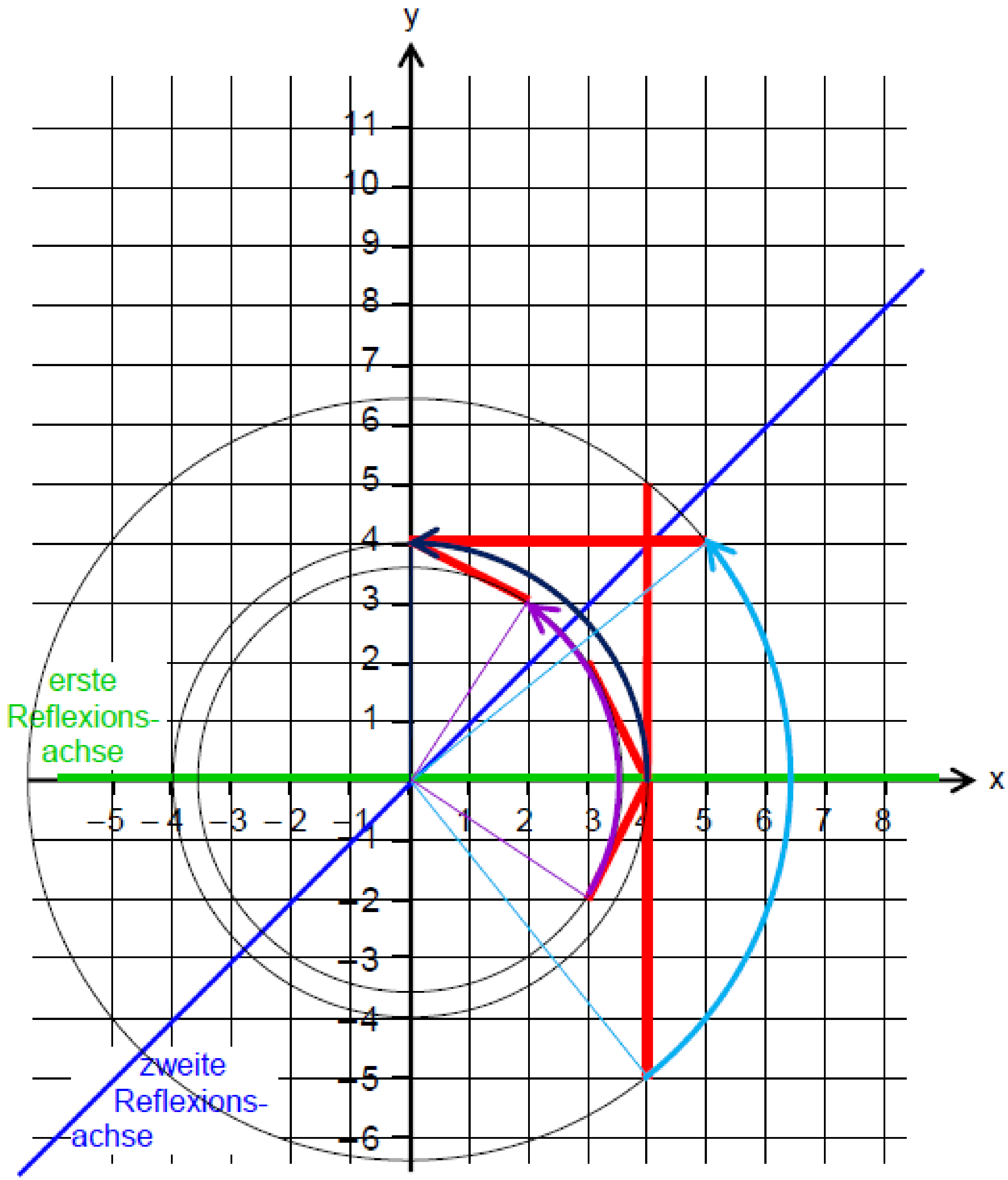
Werden die Reflexionsvektoren

$$\mathbf{n} = \mathbf{e_1}$$

und

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\mathbf{e_1} + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\mathbf{e_2}$$

genutzt, um die rote Zahl **1** der alten Aufgabe zu rotieren, ergibt sich die gleiche Lösung wie zuvor (siehe folgende Folie), denn auch diese beiden Reflexionsvektoren modellieren eine Rotation um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn.



Skizze der geometrischen Situation bei alternativen Reflexions-achsen

Zusammenfassung

Das doppelte Sandwich-Produkt

$$\mathbf{r}_{\mathrm{rot}} = \mathbf{m}\,\mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}\,\mathbf{m}$$

modelliert die Rotation des Vektors $\mathbf{r}$ in der Ebene, die durch die beiden Reflexionsvektoren $\mathbf{n}$ und $\mathbf{m}$ aufgespannt wird, um das Doppelte des Winkels, den die beiden Reflexionsvektoren $\mathbf{n}$ und $\mathbf{m}$ einschließen, sofern $\mathbf{n}$ und $\mathbf{m}$ Einheitsvektoren sind (also $\mathbf{n}^2 = \mathbf{m}^2 = 1$ gilt).

Verallgemeinerung der Zusammenfassung

Das doppelte Sandwich-Produkt

$$\mathbf{r}_{\text{rot}} = \mathbf{d}\,\mathbf{c}\,\mathbf{r}\,\mathbf{c}^{-1}\mathbf{d}^{-1}$$
$$= \frac{1}{\mathbf{c}^2\,\mathbf{d}^2}\,\mathbf{d}\,\mathbf{c}\,\mathbf{r}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}$$

modelliert die Rotation des Vektors **r** in der Ebene, die durch die beiden Reflexionsvektoren **c** und **d** beliebiger Länge aufgespannt wird, um das Doppelte des Winkels, den die beiden Reflexionsvektoren **c** und **d** einschließen.

Kurz und knapp

Das doppeltes Sandwich-Produkt

$$\mathbf{r}_{\text{rot}} = \mathbf{m}\,\mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}\,\mathbf{m} \qquad (\text{mit } \mathbf{n}^2 = \mathbf{m}^2 = 1)$$

oder

$$\mathbf{r}_{\text{rot}} = \mathbf{d}\,\mathbf{c}\,\mathbf{r}\,\mathbf{c}^{-1}\mathbf{d}^{-1}$$

beschreibt eine Rotation.

Zugabe für Nervensägen

Das doppeltes Sandwich-Produkt

$$\mathbf{r}_{\mathrm{rot}} = \mathbf{m\ n\ r\ n\ m} \qquad (\text{mit } \mathbf{n}^2 = \mathbf{m}^2 = 1)$$

oder

$$\mathbf{r}_{\mathrm{rot}} = \mathbf{d\ c\ r\ c}^{-1}\mathbf{d}^{-1}$$

beschreibt eine Rotation.

Mathematiker sind nervig. Immer wollen sie alles beweisen. Überlegen wir uns also als Zugabe, wie wir beweisen könnten, dass wir hier keine Reflexion, sondern eine Rotation haben.

Zuerst schauen wir uns noch einmal Reflexionen an

$$\mathbf{r}_{\text{ref}} = \mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n} \qquad\qquad (\text{mit } \mathbf{n}^2 = 1)$$

Für den Winkel $\boldsymbol{\gamma}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem reflektierten Vektor $\mathbf{r}_{\text{ref}}$ gilt:

$$\cos\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{\mathbf{r}^2}\,\mathbf{r} \bullet \mathbf{r}_{\text{ref}} = \frac{1}{2\,\mathbf{r}^2}\,(\mathbf{r}\,\mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n} + \mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}\,\mathbf{r})$$

Und egal, was wir machen, und egal, wie wir umformen, dieser Winkel $\boldsymbol{\gamma}$ wird immer vom Vektor $\mathbf{r}$ (und damit von seiner Lage) abhängen.

Wir können $\mathbf{r}$ auf der rechten Gleichungsseite nicht wegkürzen, denn unterschiedliche Vektoren $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ schließen unterschiedliche Winkel mit $\mathbf{r}_{1\text{ref}}$ und $\mathbf{r}_{2\text{ref}}$ ein.

Und jetzt zu den Rotationen

$$\mathbf{r}_{\text{rot}} = \mathbf{m\,n\,r\,n\,m} \qquad (\text{mit } \mathbf{n}^2 = \mathbf{m}^2 = 1)$$

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\text{rot}}$ gilt:

$$\cos\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{\mathbf{r}^2}\,\mathbf{r} \bullet \mathbf{r}_{\text{rot}}$$
$$= \frac{1}{2\,\mathbf{r}^2}\,(\mathbf{r\,m\,n\,r\,n\,m} + \mathbf{m\,n\,r\,n\,m\,r})$$

Wenn wir es schaffen, den Vektor $\mathbf{r}$ auf der rechten Gleichungsseite wegzukürzen, dann hängt der Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ nicht von der Lage des Vektors $\mathbf{r}$ ab. Alle Vektoren werden dann um den gleichen Winkel transformiert. Und das kann dann nur eine Rotation sein!

Und jetzt zu den Rotationen

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\text{rot}}$ gilt:

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\ r^2}} (\mathbf{r\ m\ n\ r\ n\ m} + \mathbf{m\ n\ r\ n\ m\ r})$$

Schauen wir ganz, ganz, ganz genau und ganz, ganz lange auf diese Formel. Was muss erfüllt sein, damit alle $\mathbf{r}$ auf der rechten Gleichungsseite verschwinden?

Und jetzt zu den Rotationen

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\text{rot}}$ gilt:

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\ \mathbf{r}^2} (\mathbf{r\ m\ n\ r\ n\ m} + \mathbf{m\ n\ r\ n\ m\ r})$$

Schauen wir ganz, ganz, ganz genau und ganz, ganz lange auf diese Formel. Was muss erfüllt sein, damit alle $\mathbf{r}$ auf der rechten Gleichungsseite verschwinden?

Also Mathematiker haben ganz, ganz lange auf diese Formel gestarrt und dann gesagt: Wenn die beiden $\mathbf{r}$ in der Klammer nebeneinander stehen würden, dann hätte wir mit $\mathbf{r}^2$ ein Skalar, das mit dem $\mathbf{r}^2$ im Nenner gekürzt werden könnte.

Und jetzt zu den Rotationen

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\text{rot}}$ gilt:

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\ r^2}} (\mathbf{r\ m\ n\ r\ n\ m} + \mathbf{m\ n\ r\ n\ m\ r})$$

Also Mathematiker haben ganz, ganz lange auf diese Formel gestarrt und dann gesagt: Wenn die beiden **r** in der Klammer nebeneinander stehen würden, dann hätte wir mit $\mathbf{r}^2$ ein Skalar, das mit dem $\mathbf{r}^2$ im Nenner gekürzt werden könnte. Und die beiden **r** würden nebeneinander stehen, wenn die Reihenfolge der Faktoren **m n r** umgedreht werden könnte in **r n m**.

Und jetzt zu den Rotationen

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\text{rot}}$ gilt:

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\ \mathbf{r}^2} (\mathbf{r}\ \mathbf{m}\ \mathbf{n}\ \mathbf{r}\ \mathbf{n}\ \mathbf{m} + \mathbf{m}\ \mathbf{n}\ \mathbf{r}\ \mathbf{n}\ \mathbf{m}\ \mathbf{r})$$

Also Mathematiker haben ganz, ganz lange auf diese Formel gestarrt und dann gesagt: Wenn die beiden $\mathbf{r}$ in der Klammer nebeneinander stehen würden, dann hätte wir mit $\mathbf{r}^2$ ein Skalar, das mit dem $\mathbf{r}^2$ im Nenner gekürzt werden könnte. Und die beiden $\mathbf{r}$ würden nebeneinander stehen, wenn die Reihenfolge der Faktoren **m n r** umgedreht werden könnte in **r n m** (und umgekehrt).

Und jetzt zu den Rotationen

Wir versuchen also, das Tripel-Produkt **m n r** dreier Vektoren, die alle in einer Ebene liegen, umzuformen:

$$\mathbf{m\,n\,r} = (\mathbf{m} \bullet \mathbf{n} + \mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= (\mathbf{m} \bullet \mathbf{n})\,\mathbf{r} + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$\uparrow$

Skalar (deshalb kommutative Multiplikation)

Und jetzt zu den Rotationen

Wir versuchen also, das Tripel-Produkt $\mathbf{m}\ \mathbf{n}\ \mathbf{r}$ dreier Vektoren, die alle in einer Ebene liegen, umzuformen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}\,\mathbf{n}\,\mathbf{r} &= (\mathbf{m} \bullet \mathbf{n} + \mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r} \\
&= (\mathbf{m} \bullet \mathbf{n})\,\mathbf{r} + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r} \\
&= \mathbf{r}\,(\mathbf{m} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{symmetrisches} \\ \text{Produkt}}}{\bullet} \mathbf{n}) + (\mathbf{m} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{anti-symmetrisches} \\ \text{Produkt}}}{\wedge} \mathbf{n})\,\mathbf{r}
\end{aligned}$$

Und jetzt zu den Rotationen

Wir versuchen also, das Tripel-Produkt **m n r** dreier Vektoren, die alle in einer Ebene liegen, umzuformen:

$$\mathbf{m}\,\mathbf{n}\,\mathbf{r} = (\mathbf{m} \bullet \mathbf{n} + \mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= (\mathbf{m} \bullet \mathbf{n})\,\mathbf{r} + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{m} \bullet \mathbf{n}) + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{n} \bullet \mathbf{m}) - (\mathbf{n} \underset{\uparrow}{\wedge} \mathbf{m})\,\mathbf{r}$$

Bivektor

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{m} = (n_x m_y - n_y m_x)\,\mathbf{e_1 e_2}$$

Und jetzt zu den Rotationen

Diese Umrechnung machen wir etwas ausführlicher:

$$\mathbf{n} = n_x\, \mathbf{e_1} + n_y\, \mathbf{e_2} \qquad\qquad \mathbf{r} = x\, \mathbf{e_1} + y\, \mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{m} = m_x\, \mathbf{e_1} + m_y\, \mathbf{e_2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{n} \wedge \mathbf{m} = (n_x m_y - n_y m_x)\, \mathbf{e_1 e_2}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{n} \wedge \mathbf{m})\, \mathbf{r} &= (n_x m_y - n_y m_x)\, \mathbf{e_1 e_2}\, (x\, \mathbf{e_1} + y\, \mathbf{e_2}) \\
&= (n_x m_y - n_y m_x)\, x\, \mathbf{e_1 e_2 e_1} + (n_x m_y - n_y m_x)\, y\, \mathbf{e_1 e_2 e_2} \\
&= x\,(n_x m_y - n_y m_x)\,(-\mathbf{e_1 e_1 e_2}) + y\,(n_x m_y - n_y m_x)\,(-\mathbf{e_2 e_1 e_2}) \\
&= -\,x\, \mathbf{e_1}\,(n_x m_y - n_y m_x)\, \mathbf{e_1 e_2} - y\, \mathbf{e_2}\,(n_x m_y - n_y m_x)\, \mathbf{e_1 e_2} \\
&= -\,(x\, \mathbf{e_1} + y\, \mathbf{e_2})\,(n_x m_y - n_y m_x)\, \mathbf{e_1 e_2} \\
&= -\,\mathbf{r}\,(\mathbf{n} \wedge \mathbf{m})
\end{aligned}$$

Und jetzt zu den Rotationen

Diese Umrechnung machen wir etwas ausführlicher:

$$\mathbf{n} = n_x\,\mathbf{e_1} + n_y\,\mathbf{e_2} \qquad\qquad \mathbf{r} = x\,\mathbf{e_1} + y\,\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{m} = m_x\,\mathbf{e_1} + m_y\,\mathbf{e_2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{n} \wedge \mathbf{m} = (n_x m_y - n_y m_x)\,\mathbf{e_1 e_2}$$

Also gilt:

$$(\mathbf{n} \wedge \mathbf{m})\,\mathbf{r} = -\,\mathbf{r}\,(\mathbf{n} \wedge \mathbf{m})$$

Und das setzen wir jetzt in unser Tripel-Produkt ein.

Und jetzt zu den Rotationen

Wir versuchen also, das Tripel-Produkt $\mathbf{m\ n\ r}$ dreier Vektoren, die alle in einer Ebene liegen, umzuformen:

$$\mathbf{m\,n\,r} = (\mathbf{m} \bullet \mathbf{n} + \mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= (\mathbf{m} \bullet \mathbf{n})\,\mathbf{r} + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{m} \bullet \mathbf{n}) + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{n} \bullet \mathbf{m}) - (\mathbf{n} \wedge \mathbf{m})\,\mathbf{r}$$

$\uparrow$

Bivektor-Multiplikation

$$(\mathbf{n} \wedge \mathbf{m})\,\mathbf{r} = -\,\mathbf{r}\,(\mathbf{n} \wedge \mathbf{m})$$

Und jetzt zu den Rotationen

Wir versuchen also, das Tripel-Produkt **m n r** dreier Vektoren, die alle in einer Ebene liegen, umzuformen:

$$\mathbf{m\,n\,r} = (\mathbf{m} \bullet \mathbf{n} + \mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= (\mathbf{m} \bullet \mathbf{n})\,\mathbf{r} + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{m} \bullet \mathbf{n}) + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{n} \bullet \mathbf{m}) - (\mathbf{n} \wedge \mathbf{m})\,\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{n} \bullet \mathbf{m}) - (-\,\mathbf{r}\,(\mathbf{n} \wedge \mathbf{m}))$$

Und jetzt zu den Rotationen

Wir versuchen also, das Tripel-Produkt **m n r** dreier Vektoren, die alle in einer Ebene liegen, umzuformen:

$$\mathbf{m}\,\mathbf{n}\,\mathbf{r} = (\mathbf{m} \bullet \mathbf{n} + \mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= (\mathbf{m} \bullet \mathbf{n})\,\mathbf{r} + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{m} \bullet \mathbf{n}) + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{n} \bullet \mathbf{m}) - (\mathbf{n} \wedge \mathbf{m})\,\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{n} \bullet \mathbf{m}) + \mathbf{r}\,(\mathbf{n} \wedge \mathbf{m})$$

Und jetzt zu den Rotationen

Wir versuchen also, das Tripel-Produkt **m n r** dreier Vektoren, die alle in einer Ebene liegen, umzuformen:

$$\mathbf{m\,n\,r} = (\mathbf{m} \bullet \mathbf{n} + \mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= (\mathbf{m} \bullet \mathbf{n})\,\mathbf{r} + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{m} \bullet \mathbf{n}) + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{n} \bullet \mathbf{m}) - (\mathbf{n} \wedge \mathbf{m})\,\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{n} \bullet \mathbf{m}) + \mathbf{r}\,(\mathbf{n} \wedge \mathbf{m})$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{n} \bullet \mathbf{m} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{m})$$

Und jetzt zu den Rotationen

Wir versuchen also, das Tripel-Produkt **m n r** dreier Vektoren, die alle in einer Ebene liegen, umzuformen:

$$\mathbf{m\,n\,r} = (\mathbf{m} \bullet \mathbf{n} + \mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= (\mathbf{m} \bullet \mathbf{n})\,\mathbf{r} + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{m} \bullet \mathbf{n}) + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{n})\,\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{n} \bullet \mathbf{m}) - (\mathbf{n} \wedge \mathbf{m})\,\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{n} \bullet \mathbf{m}) + \mathbf{r}\,(\mathbf{n} \wedge \mathbf{m})$$

$$= \mathbf{r}\,(\mathbf{n} \bullet \mathbf{m} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{m})$$

$$= \mathbf{r\,n\,m} \qquad\qquad \text{Endlich!!}$$

Und jetzt zu den Rotationen

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{rot}}$ gilt:

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\ r^2}} (\mathbf{r\ m\ n\ r\ n\ m} + \mathbf{m\ n\ r\ n\ m\ r})$$

Außerdem haben wir endlich

$$\mathbf{m\ n\ r} = \mathbf{r\ n\ m}$$

und setzen dies ein.

Und jetzt zu den Rotationen

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{rot}}$ gilt:

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\ r^2}} (\mathbf{r\ m\ n\ r\ n\ m} + \mathbf{m\ n\ r\ n\ m\ r})$$

Außerdem haben wir endlich

$$\mathbf{m\ n\ r} = \mathbf{r\ n\ m}$$

und setzen dies ein.

Und jetzt zu den Rotationen

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\text{rot}}$ gilt:

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\ r^2}} (\mathbf{r\ m\ n\ r\ n\ m} + \mathbf{m\ n\ r\ n\ m\ r})$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\ r^2}} (\mathbf{r\ r\ n\ m\ n\ m} + \mathbf{m\ n\ m\ n\ r\ r})$$

Und jetzt zu den Rotationen

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{rot}}$ gilt:

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\ r^2}} (\mathbf{r\ m\ n\ r\ n\ m} + \mathbf{m\ n\ r\ n\ m\ r})$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\ r^2}} (\mathbf{r}^2\ \mathbf{n\ m\ n\ m} + \mathbf{m\ n\ m\ n\ r}^2)$$

Und jetzt zu den Rotationen

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\text{rot}}$ gilt:

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\ r^2}} (\mathbf{r\ m\ n\ r\ n\ m} + \mathbf{m\ n\ r\ n\ m\ r})$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\ r^2}} (\mathbf{r}^2\ \mathbf{n\ m\ n\ m} + \mathbf{m\ n\ m\ n\ r}^2)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} (\mathbf{n\ m\ n\ m} + \mathbf{m\ n\ m\ n})$$

Und jetzt zu den Rotationen

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\text{rot}}$ gilt:

$$\cos\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\,r^2}}\,(\mathbf{r\,m\,n\,r\,n\,m} + \mathbf{m\,n\,r\,n\,m\,r})$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\,r^2}}\,(\mathbf{r}^2\,\mathbf{n\,m\,n\,m} + \mathbf{m\,n\,m\,n\,r}^2)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,(\mathbf{n\,m\,n\,m} + \mathbf{m\,n\,m\,n})$$

$\Rightarrow$ cos $\boldsymbol{\alpha}$ und damit auch der Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ hängen nicht von der Lage des Vektors **r** ab, sondern nur von der Lage der beiden Reflexionsvektoren **n** und **m**.

Außerdem:

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{rot}}$ gilt:

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\ r^2}} (\mathbf{r\ m\ n\ r\ n\ m} + \mathbf{m\ n\ r\ n\ m\ r})$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\ r^2}} (\mathbf{r}^2\ \mathbf{n\ m\ n\ m} + \mathbf{m\ n\ m\ n\ r}^2)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} (\mathbf{n\ m\ n\ m} + \mathbf{m\ n\ m\ n})$$

$$= \mathbf{n} \bullet (\mathbf{m\ n\ m}) = (\mathbf{n\ m\ n}) \bullet \mathbf{m}$$

Außerdem:

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{rot}}$ gilt:

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{n} \bullet (\mathbf{m}\,\mathbf{n}\,\mathbf{m}) = (\mathbf{n}\,\mathbf{m}\,\mathbf{n}) \bullet \mathbf{m}$$

Außerdem:

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{rot}}$ gilt:

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{n} \bullet (\mathbf{m\ n\ m}) = (\mathbf{n\ m\ n}) \bullet \mathbf{m}$$

Der Rotations-winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwi-schen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ …

Außerdem:

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{rot}}$ gilt:

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{n} \bullet (\mathbf{m\ n\ m}) = (\mathbf{n\ m\ n}) \bullet \mathbf{m}$$

Der Rotationswinkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ …

… ist genauso groß …

Außerdem:

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{rot}}$ gilt:

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{n} \bullet (\mathbf{m\ n\ m}) = (\mathbf{n\ m\ n}) \bullet \mathbf{m}$$

Der Rotationswinkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ …

… ist genauso groß …

… wie der Winkel zwischen dem Reflexionsvektor $\mathbf{n}$ und dem an der $\mathbf{m}$-Achse gespiegelten Vektor $\mathbf{n}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{m\ n\ m}$.

Außerdem:

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{r}$ und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\text{rot}}$ gilt:

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{n} \bullet (\mathbf{m\ n\ m}) = (\mathbf{n\ m\ n}) \bullet \mathbf{m}$$

Der Rotationswinkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}_{\text{ref}}$ …

… ist genauso groß …

… wie der Winkel zwischen dem an der **n**-Achse gespiegelten Vektor $\mathbf{m}_{\text{ref}} = \mathbf{n\ m\ n}$ und dem Reflexionsvektor **m**.

Außerdem:

Für den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen dem ursprünglichen Vektor **r** und dem rotierten Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{rot}}$ gilt:

Das ist genau das Doppelte des Winkels zwischen den beiden Reflexionsvektoren **n** und **m**.

Winkel zwischen dem Reflexionsvektor **n** und dem an der **m**-Achse gespiegelten Vektor $\mathbf{n}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{m\,n\,m}$.

Winkel zwischen dem an der **n**-Achse gespiegelten Vektor $\mathbf{m}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{n\,m\,n}$ und dem Reflexionsvektor **m**.

Schlussfolgerung

Der Rotationswinkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ ist genauso groß wie das Doppelte des Winkels zwischen den beiden Reflexionsvektoren $\mathbf{n}$ und $\mathbf{m}$.

Schlussfolgerung

Der Rotationswinkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ ist genauso groß wie das Doppelte des Winkels zwischen den beiden Reflexionsvektoren $\mathbf{n}$ und $\mathbf{m}$.

Und erneut wünscht Ihnen Earl John Montagu, der 4. Earl of Sandwich, Member of the House of Lords, Patriot Whig, British Ambassador to the Dutch Republic, Postmaster General, First Lord of the Admirality, Secretary of State for the Northern Department, ausdauernder Kartenspieler und namensgebender Erfinder des hochwohlgeborenen britischen Sandwiches einen Guten Appetit!

Schlussfolgerung

Der Rotationswinkel $\boldsymbol{\alpha}$ zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}_{\mathrm{ref}}$ ist genauso groß wie das Doppelte des Winkels zwischen den beiden Reflexionsvektoren **n** und **m**.

Vergessen wir alle Titel: Was bleibt, ist ein Sandwich.

Ergänzungsfolien 06:
Der kleine Computer hält Abstand

Mathematik 1 des Bachelor-Studiengangs Ingenieurinformatik der HTW Berlin

Corona-Semester Sommer 2020

– Dr. M. Horn –

Hallo !

Es geht um den Abstand

Eine erste Corona-App ist da. Aber vielleicht müssen Sie als Ingenieurinformatikerin oder Ingenieurinformatiker mal eine verbesserte Version programmieren. Oder Sie müssen Abstandsdaten, die mit Hilfe dieser oder einer anderen App gesammelt wurden, auswerten.

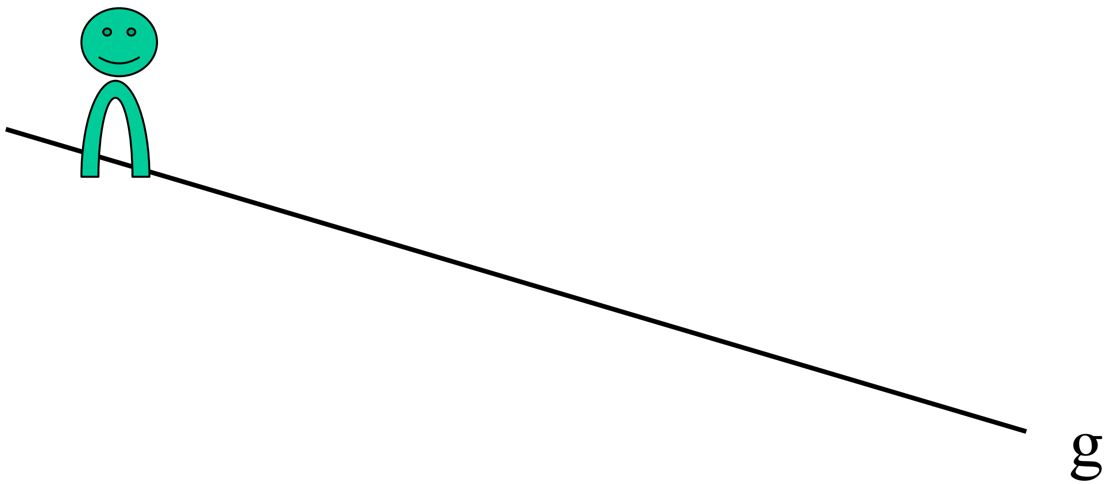
Auf jeden Fall müssen Sie dabei Situation wie …

(… siehe folgende Folie …)

mathematisch verstehen und beschreiben können.

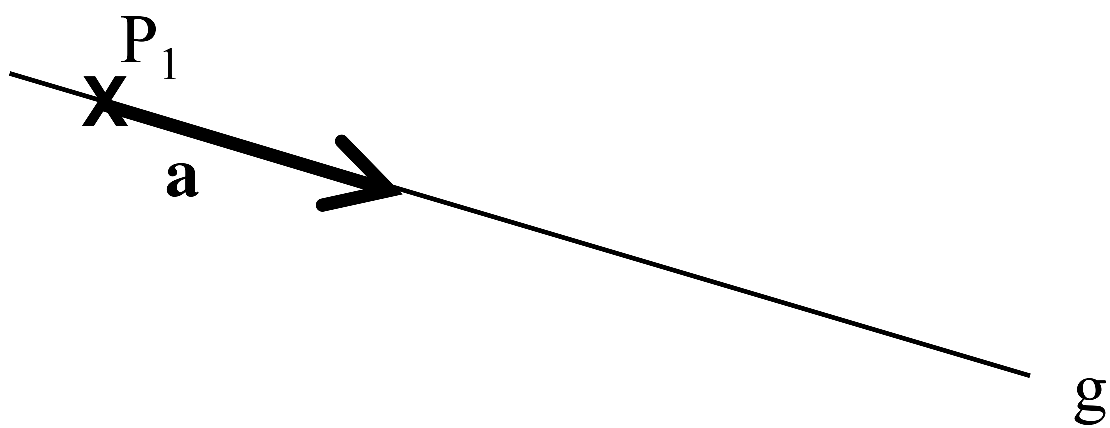
Abstand eines Punktes von einer Geraden

Also beispielsweise läuft ein Corona-Superspreader auf einer Geraden g entlang.



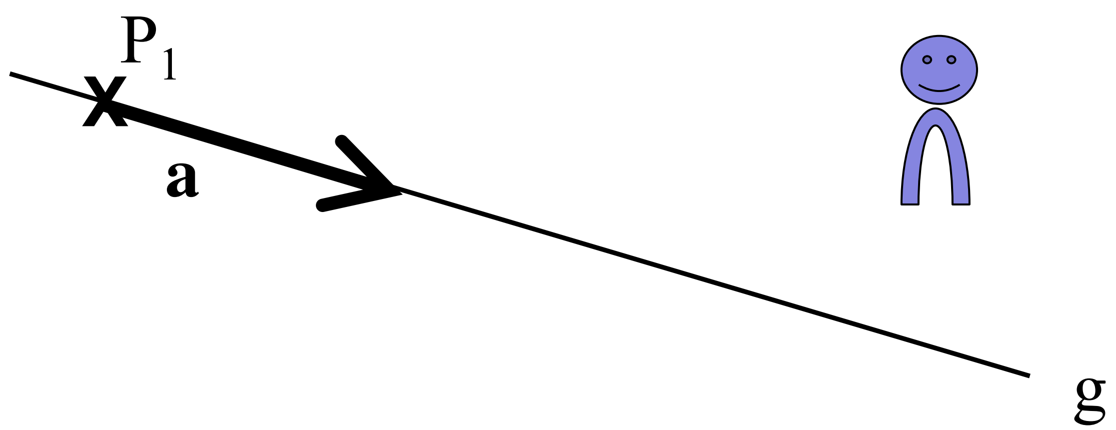
Abstand eines Punktes von einer Geraden

Er befindet sich am Punkt P_1 und läuft in Richtung des Vektors **a**.



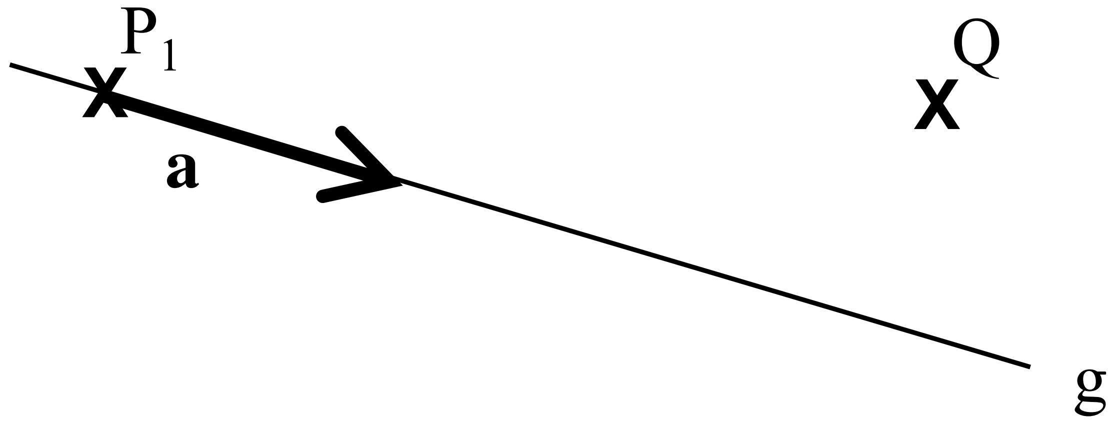
Abstand eines Punktes von einer Geraden

In einiger Entfernung befindet sich eine zweite, gesunde Person.



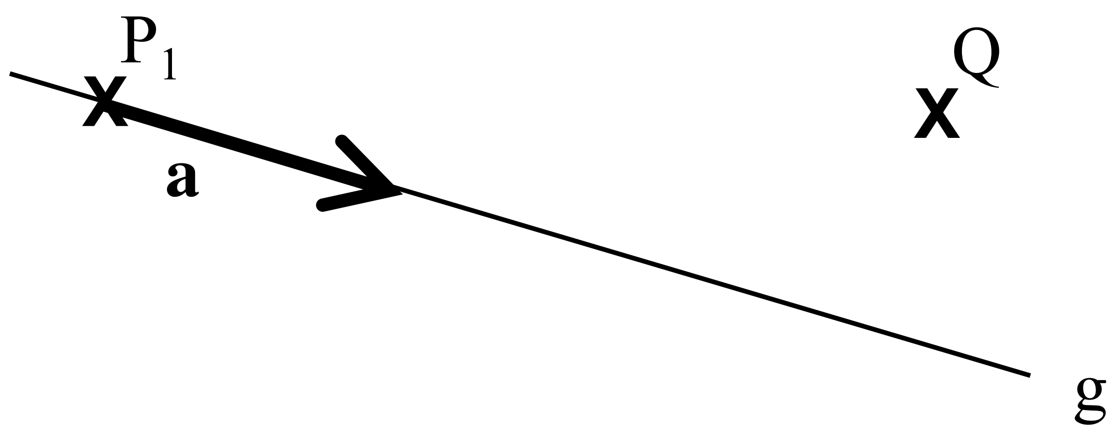
Abstand eines Punktes von einer Geraden

In einiger Entfernung befindet sich eine zweite, gesunde Person am Punkt Q.



Abstand eines Punktes von einer Geraden

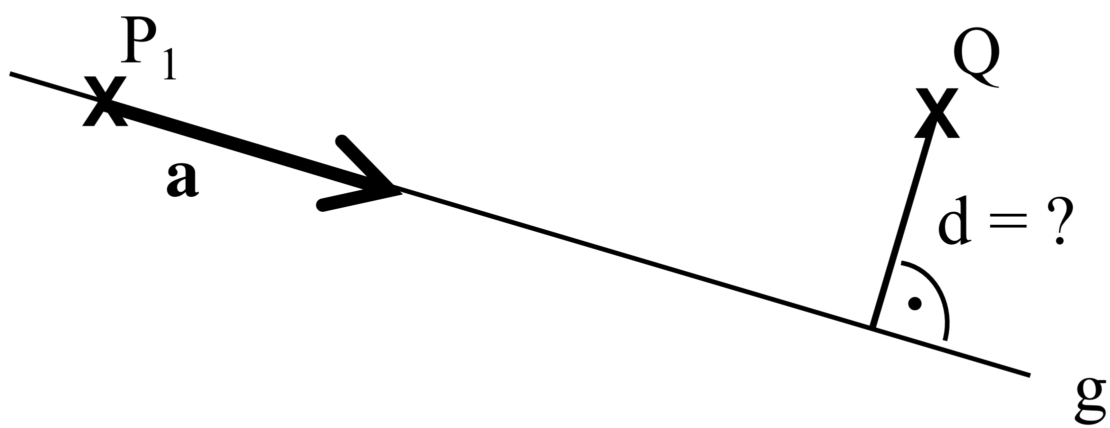
Die Frage ist nun **nicht**:



Wie groß ist der senkrechte (also der kürzeste) Abstand d dieses Punktes Q von der Geraden g?

Abstand eines Punktes von einer Geraden

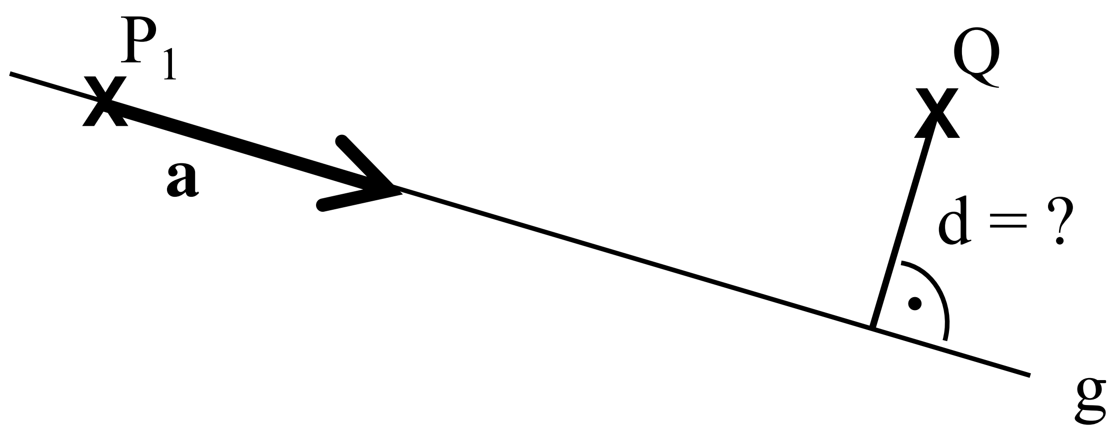
Die Frage ist nun **nicht**:



Wie groß ist der senkrechte (also der kürzeste) Abstand d dieses Punktes Q von der Geraden g?

Abstand eines Punktes von einer Geraden

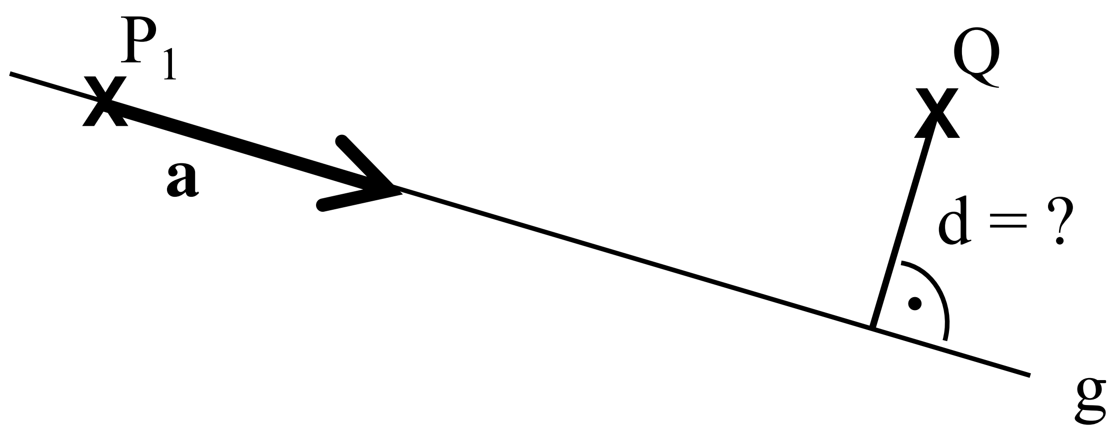
Die Frage ist nun **nicht**:



Wie groß ist der senkrechte (also der kürzeste) Abstand d dieses Punktes Q von der Geraden g?
Das ist eine Länge. Nach dieser Länge soll jetzt nicht gefragt werden …

Abstand eines Punktes von einer Geraden

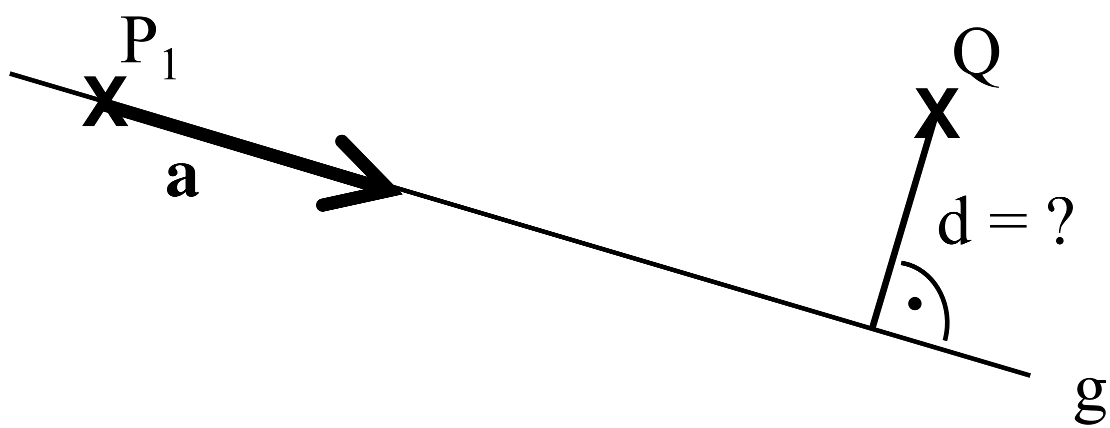
Die Frage ist nun **nicht**:



Wie groß ist der senkrechte (also der kürzeste) Abstand d dieses Punktes Q von der Geraden g?
Das ist eine Länge. Nach dieser Länge (also einer reellen Zahl) soll jetzt nicht gefragt werden …

Abstand eines Punktes von einer Geraden

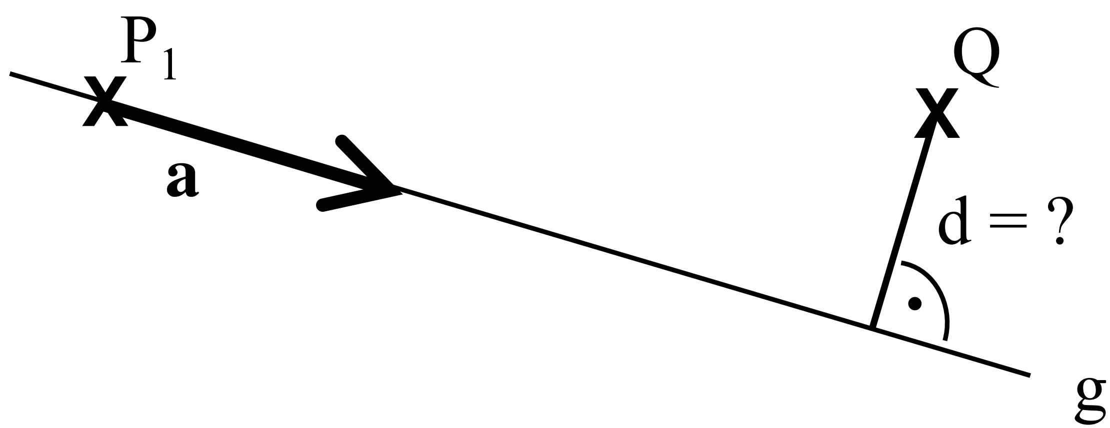
Die Frage ist nun **nicht**:



Wie groß ist der senkrechte (also der kürzeste) Abstand d dieses Punktes Q von der Geraden g?
Das ist eine Länge. Nach dieser Länge soll jetzt nicht gefragt werden, denn die Antwort kennen Sie schon.

Abstand eines Punktes von einer Geraden

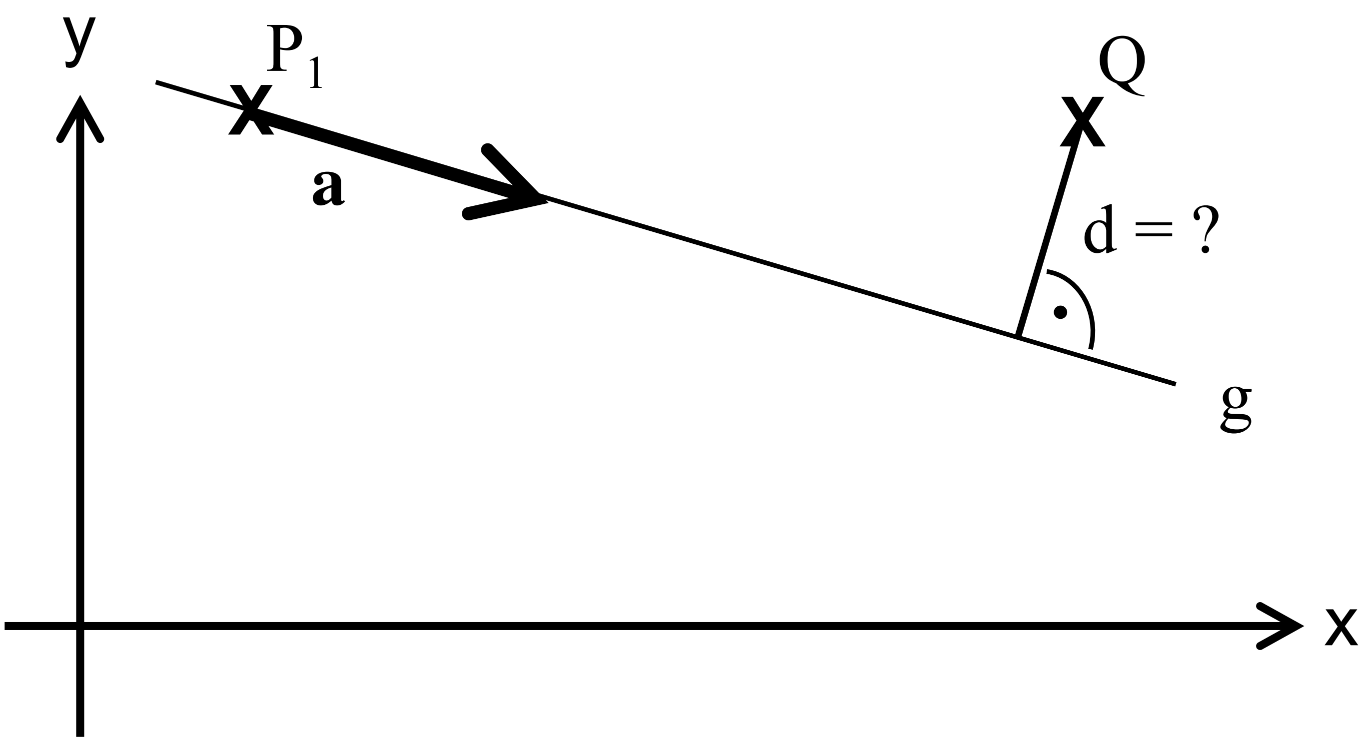
Die Frage ist nun **nicht**:



Die (altmodische) Formel zur Berechnung des Abstands d hatte ich Ihnen ja schon in einer der Vorlesungsfolien angegeben.

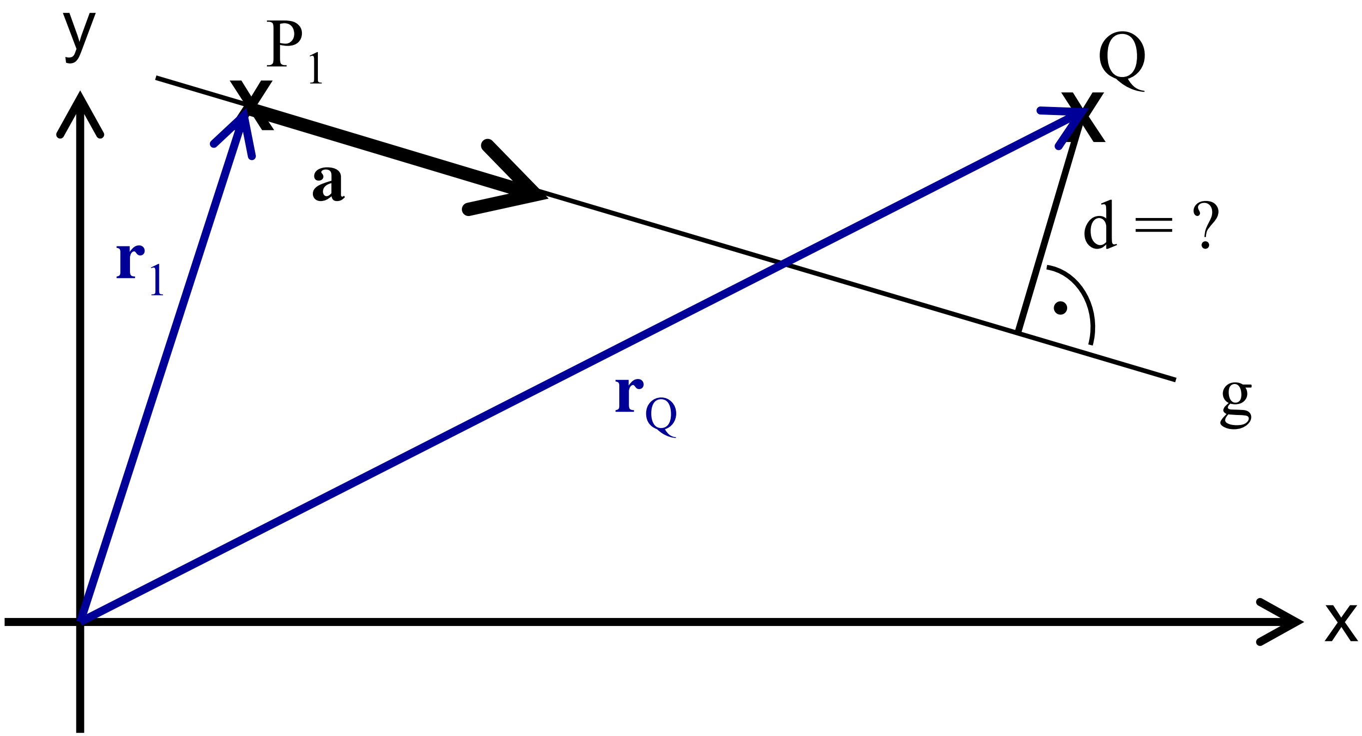
Abstand eines Punktes von einer Geraden

Wenn wir uns ein Koordinatensystem denken …



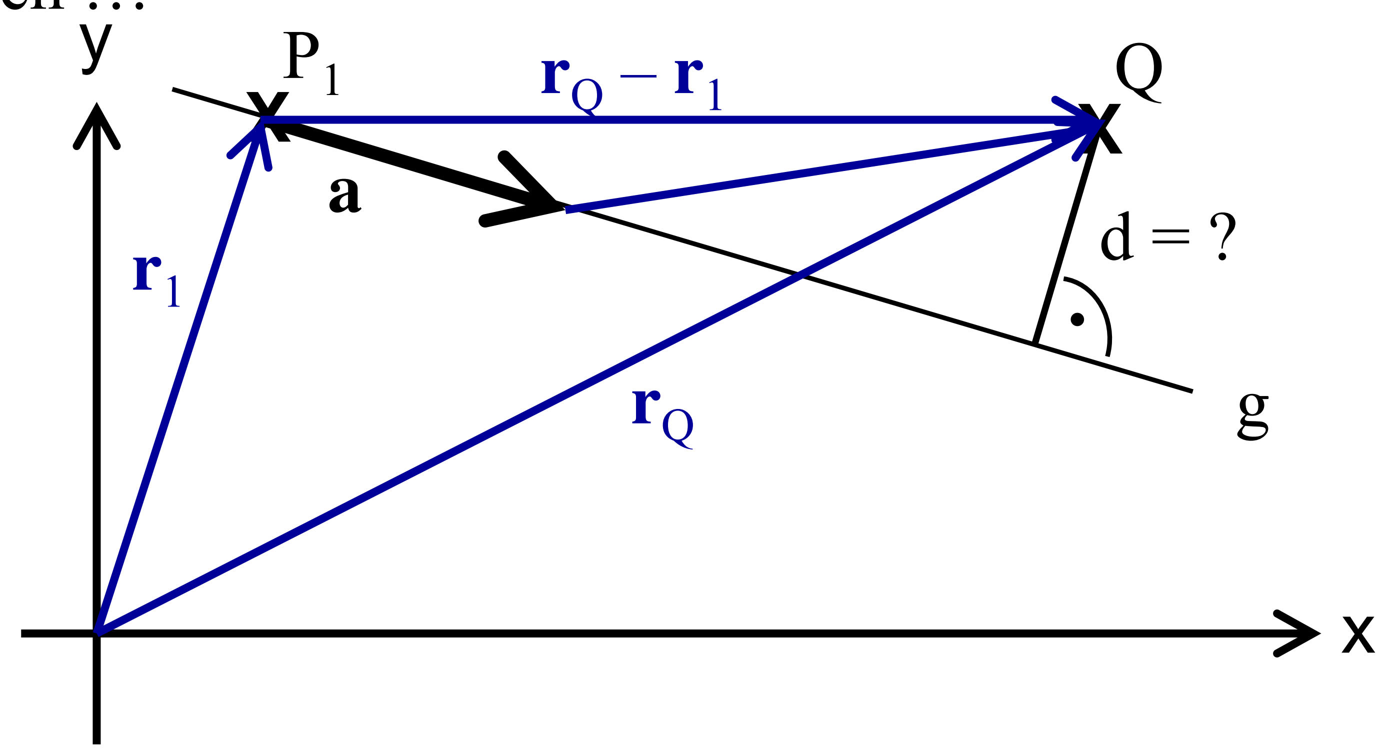
Abstand eines Punktes von einer Geraden

Wenn wir uns ein Koordinatensystem denken und dort die entsprechenden Ortsvektoren eintragen …



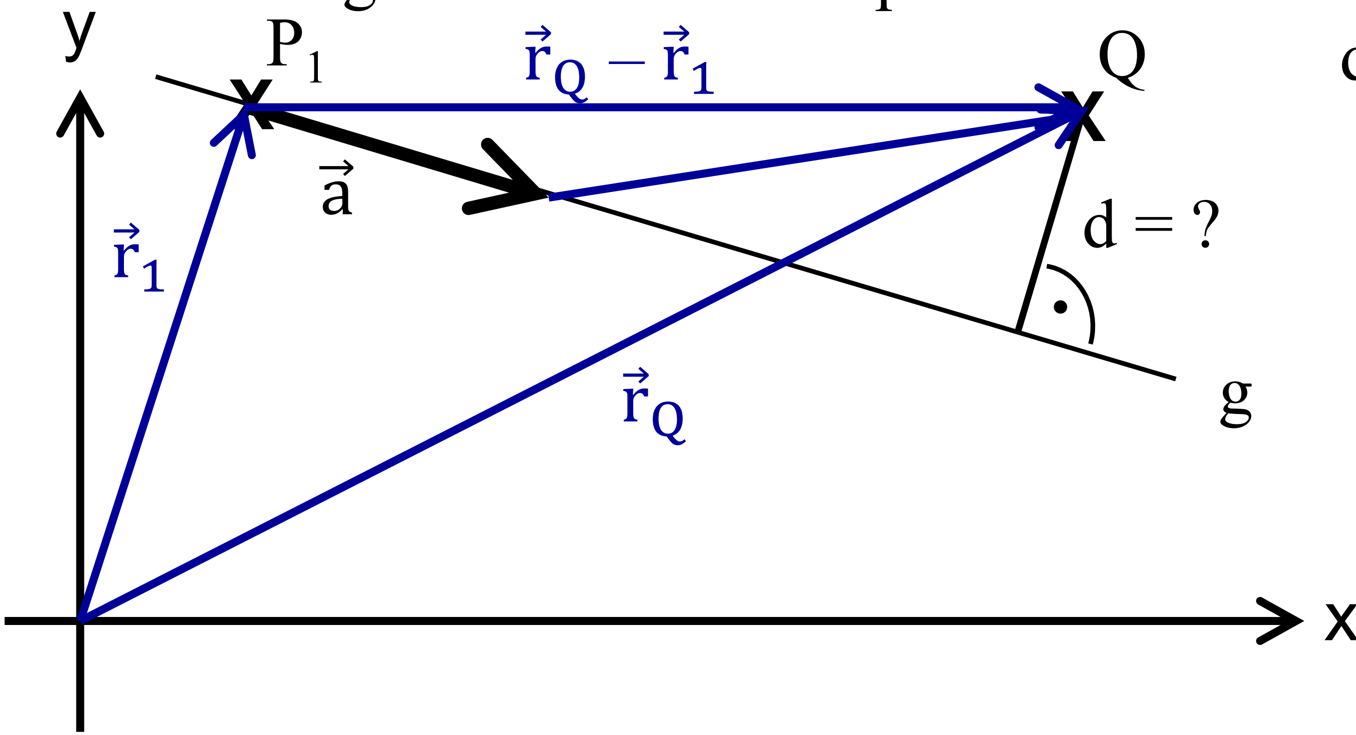
Abstand eines Punktes von einer Geraden

Wenn wir uns ein Koordinatensystem denken und dort die entsprechenden Orts- bzw. Differenzvektoren eintragen …



Abstand eines Punktes von einer Geraden

Wenn wir uns ein Koordinatensystem denken und dort die entsprechenden Orts- bzw. Differenzvektoren eintragen und dann ganz altmodische Spaltenvektoren verwenden …



Abstand eines Punktes von einer Geraden

Wenn wir uns ein Koordinatensystem denken und dort die entsprechenden Orts- bzw. Differenzvektoren eintragen und dann ganz altmodische Spaltenvektoren verwenden, dann kann der der reellwertige, kürzeste Abstand d zwischen dem Punkt Q und der Geraden g der Geradengleichung $\vec{r}_{(\lambda)} = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a}$ mit Hilfe der Formel

$$d = \frac{\left|\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)\right|}{|\vec{a}|}$$

berechnet werden.

Abstand eines Punktes von einer Geraden

Wenn wir uns ein Koordinatensystem denken und dort die entsprechenden Orts- bzw. Differenzvektoren eintragen und dann ganz altmodische Spaltenvektoren verwenden, dann kann der der reellwertige, kürzeste Abstand d zwischen dem Punkt Q und der Geraden g der Geradengleichung $\vec{r}_{(\lambda)} = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a}$ mit Hilfe der Formel

$$d = \frac{\left|\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)\right|}{|\vec{a}|}$$

berechnet werden.

Diese Formel ist höchst altmodisch, denn in ihr wird das komische Kreuzprodukt (Vektorprodukt) verwendet.

Abstand eines Punktes von einer Geraden

Diese altmodische Formel habe ich übrigens ganz einfach aus der (wirklich sehr guten) Formelsammlung

Lothar Papula: Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler. 12. Auflage mit über 400 Abbildungen, zahlreichen Rechenbeispielen und einer ausführlichen Integraltafel. Springer Vieweg / Springer Fachmedien, Wiesbaden 2017

abgeschrieben.

Abstand eines Punktes von einer Geraden

Diese altmodische Formel habe ich übrigens ganz einfach aus der (wirklich sehr guten) Formelsammlung

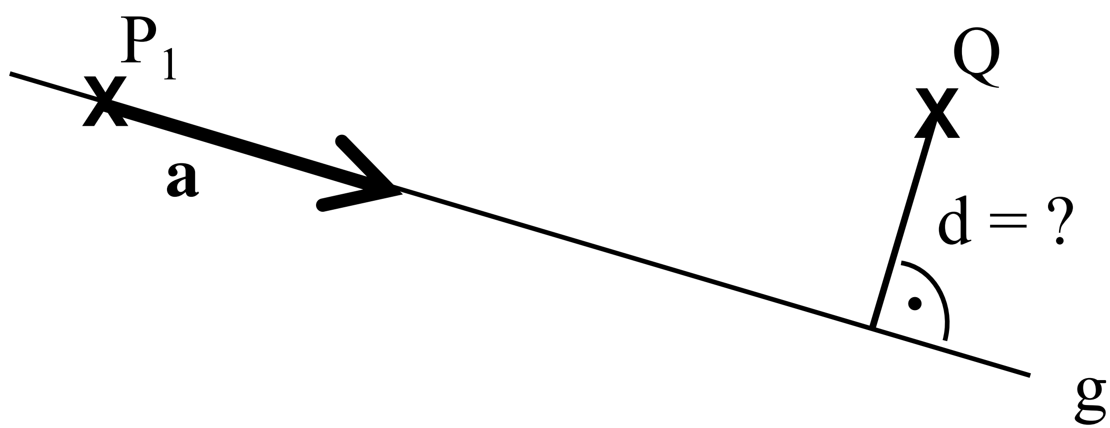
Lothar Papula: Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler. 12. Auflage mit über 400 Abbildungen, zahlreichen Rechenbeispielen und einer ausführlichen Integraltafel. Springer Vieweg / Springer Fachmedien, Wiesbaden 2017

abgeschrieben.

Dort findet sich die Formel auf S. 58 im Abschnitt 4.2.3.

Abstand eines Punktes von einer Geraden

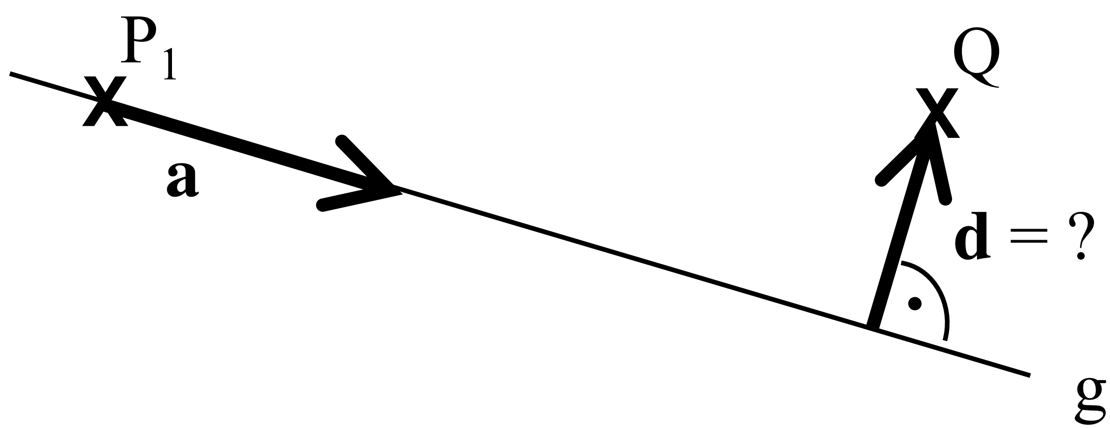
Also: Die Frage ist nun **nicht**:



Wie groß ist der senkrechte (also der kürzeste) Abstand d dieses Punktes Q von der Geraden g?

Abstand eines Punktes von einer Geraden

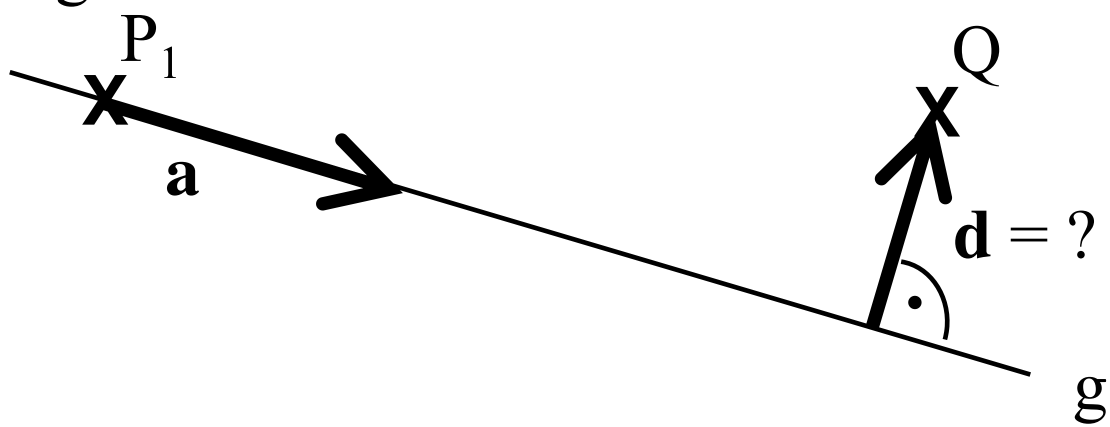
Stattdessen lautet unsere Frage nun:



Wie lautet der Abstandsvektor **d** zwischen der Geraden g und dem Punkt Q?

Abstand eines Punktes von einer Geraden

Hier suchen wir also nicht lediglich eine Länge d (normal gedruckt), sondern einen Abstandsvektor **d**, der deshalb **fett** gedruckt ist.



Wie lautet der Abstandsvektor **d** zwischen der Geraden g und dem Punkt Q?

Abstand eines Punktes von einer Geraden

Hier suchen wir also nicht lediglich eine Länge d (normal gedruckt), sondern einen Abstandsvektor **d**, der deshalb **fett** gedruckt ist.

Dieser Vektor **d** enthält dann sowohl Informationen zur Länge $d = \sqrt{\mathbf{d}^2}$ wie auch zur Richtung. Wir wissen also mehr, wenn wir **d** anstelle von lediglich d ausrechnen.

Wie lautet der Abstandsvektor **d** zwischen der Geraden g und dem Punkt Q?

Abstand eines Punktes von einer Geraden

Hier suchen wir also nicht lediglich eine Länge d (normal gedruckt), sondern einen Abstandsvektor **d**, der deshalb **fett** gedruckt ist.

Und um diesen Abstandsvektor **d** berechnen zu können, müssen wir eigentlich nichts anderes tun, als die konventionelle, altmodische Formel

$$\mathrm{d} = \frac{\left|\vec{\mathrm{a}} \times (\vec{\mathrm{r}}_Q - \vec{\mathrm{r}}_1)\right|}{|\vec{\mathrm{a}}|}$$

in die Mathematik des kleinen Computers zu übersetzen.

Der kleine, doofe Computer ist ganz modern

Diese Mathematik des kleinen, behäbigen Computers ist viel moderner als die Mathematik des Kreuzprodukts $\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)$ im Zähler der Formel für d, weil wir ja wissen:

Das äußere Produkt zweier Vektoren ist kein neuer, weiterer Vektor wie beim altmodischen Kreuzprodukt $\times$, sondern ein Bivektor und damit ein zweidimensionales, orientiertes Flächenstück – der orientierte Flächeninhalt eines Parallelogramms.

Der kleine, doofe Computer ist ganz modern

Diese Mathematik des kleinen, behäbigen Computers ist viel moderner als die Mathematik des Kreuzprodukts $\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)$ im Zähler der Formel für d, weil wir ja wissen:

Das äußere Produkt zweier Vektoren ist kein neuer, weiterer Vektor wie beim altmodischen Kreuzprodukt $\times$, sondern ein Bivektor und damit ein zweidimensionales, orientiertes Flächenstück – der orientierte Flächeninhalt eines Parallelogramms.

Das ist modern, weil die geometrische Interpretation als Flächenelement Sinn macht.

Der kleine, doofe Computer ist ganz modern

Diese Mathematik des kleinen, behäbigen Computers ist viel moderner als die Mathematik des Kreuzprodukts $\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)$ im Zähler der Formel für d, weil wir ja wissen:

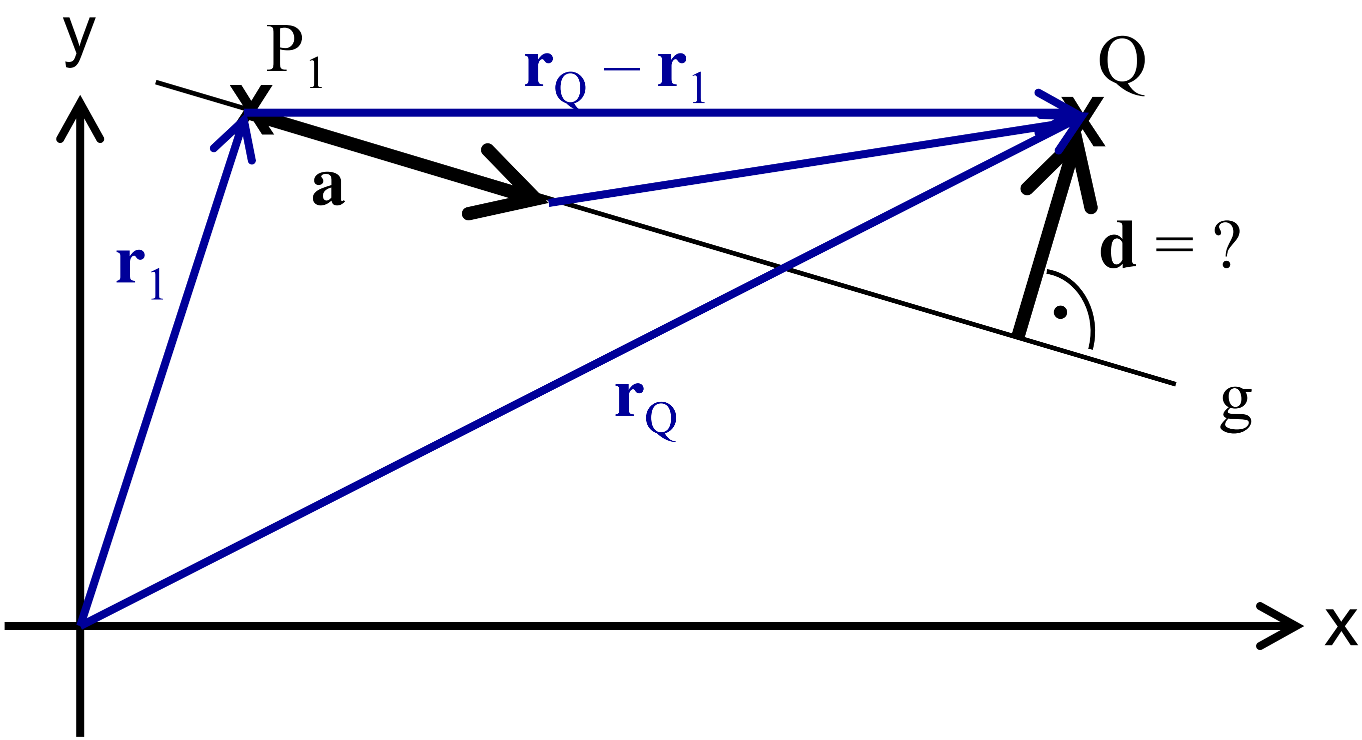
Das äußere Produkt zweier Vektoren ist kein neuer, weiterer Vektor wie beim altmodischen Kreuzprodukt $\times$, sondern ein Bivektor und damit ein zweidimensionales, orientiertes Flächenstück – der orientierte Flächeninhalt eines Parallelogramms.

Das ist modern, weil die geometrische Interpretation als Flächenelement Sinn macht – und besonders weil …

… siehe ganz hinten in diesen Ergänzungsfolien

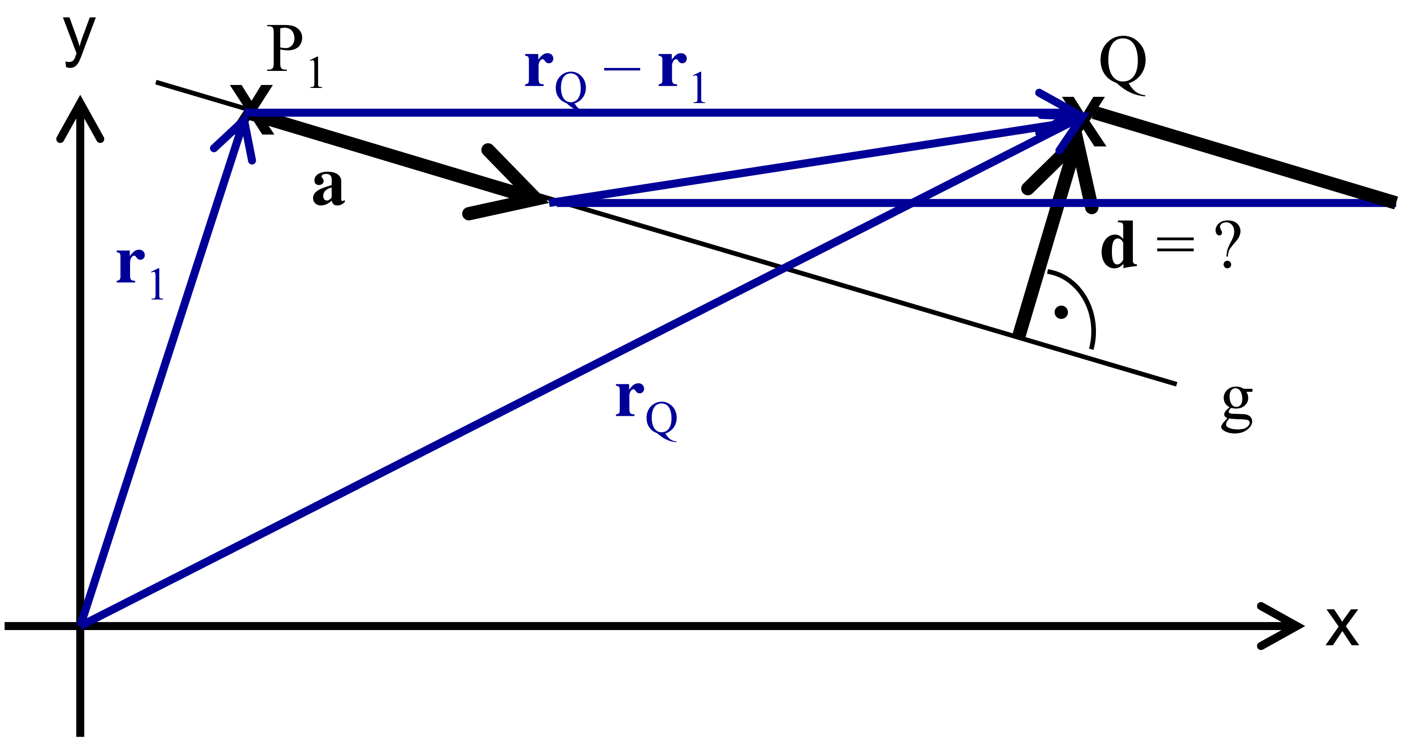
Abstand eines Punktes von einer Geraden

Wir betrachten also die Parallelogramme, die von den Vektoren in unserer Skizze aufgespannt werden:



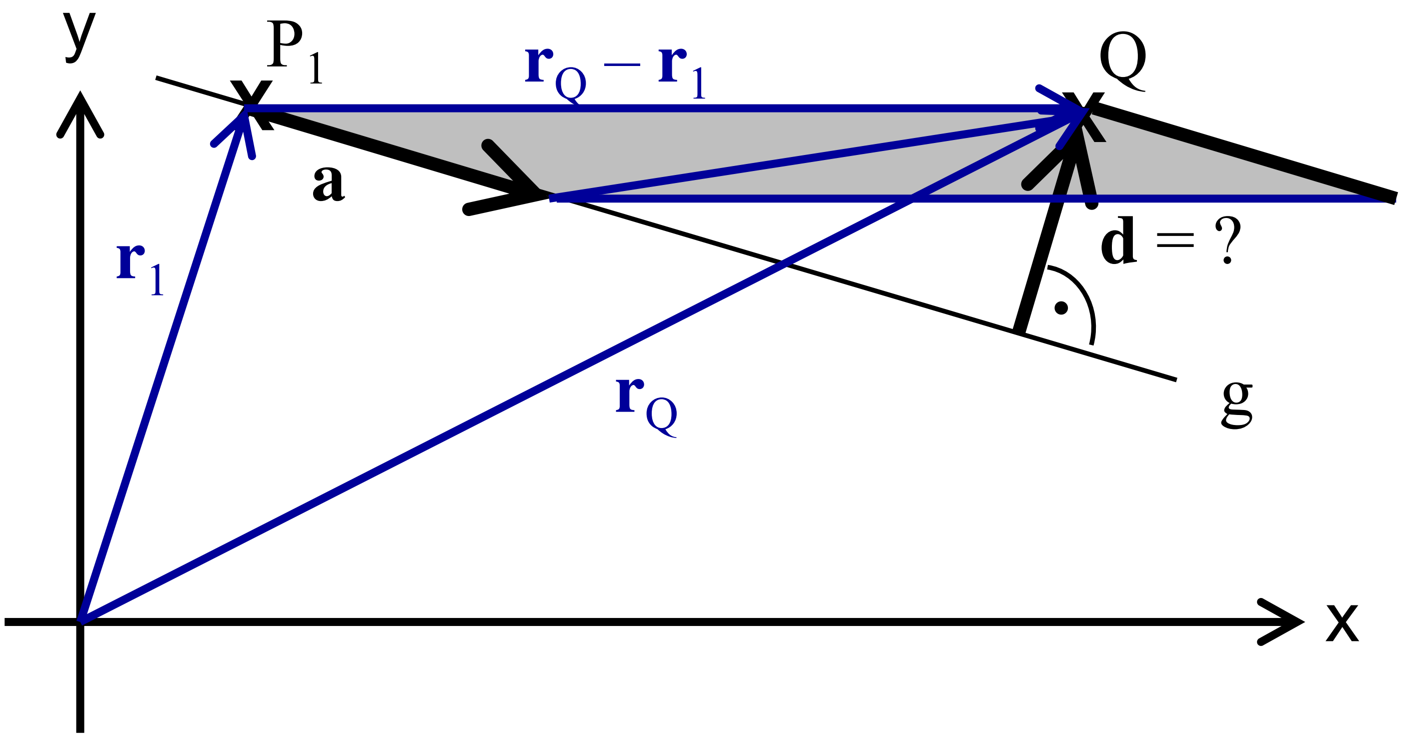
Abstand eines Punktes von einer Geraden

Wir betrachten also die Parallelogramme, die von den Vektoren in unserer Skizze aufgespannt werden:



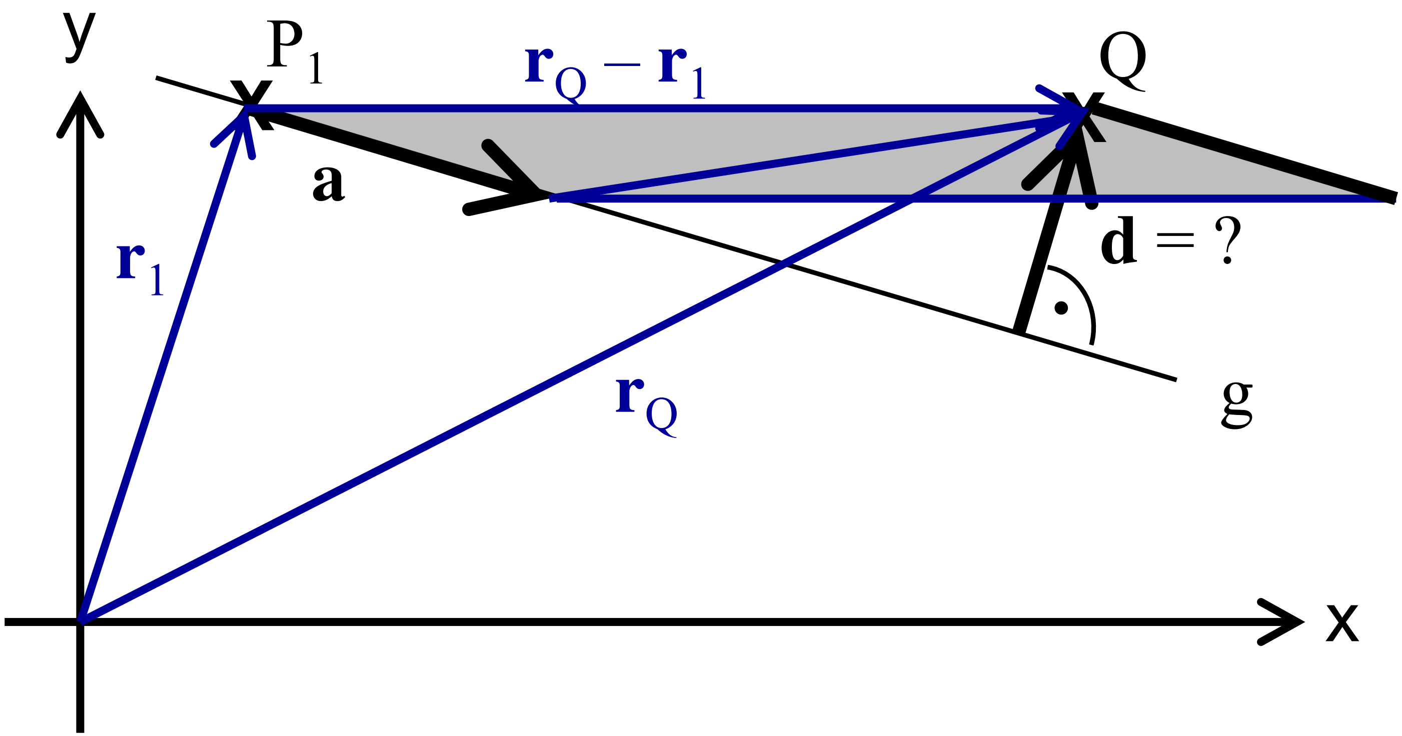
Abstand eines Punktes von einer Geraden

Erstes Parallelogramm:



Abstand eines Punktes von einer Geraden

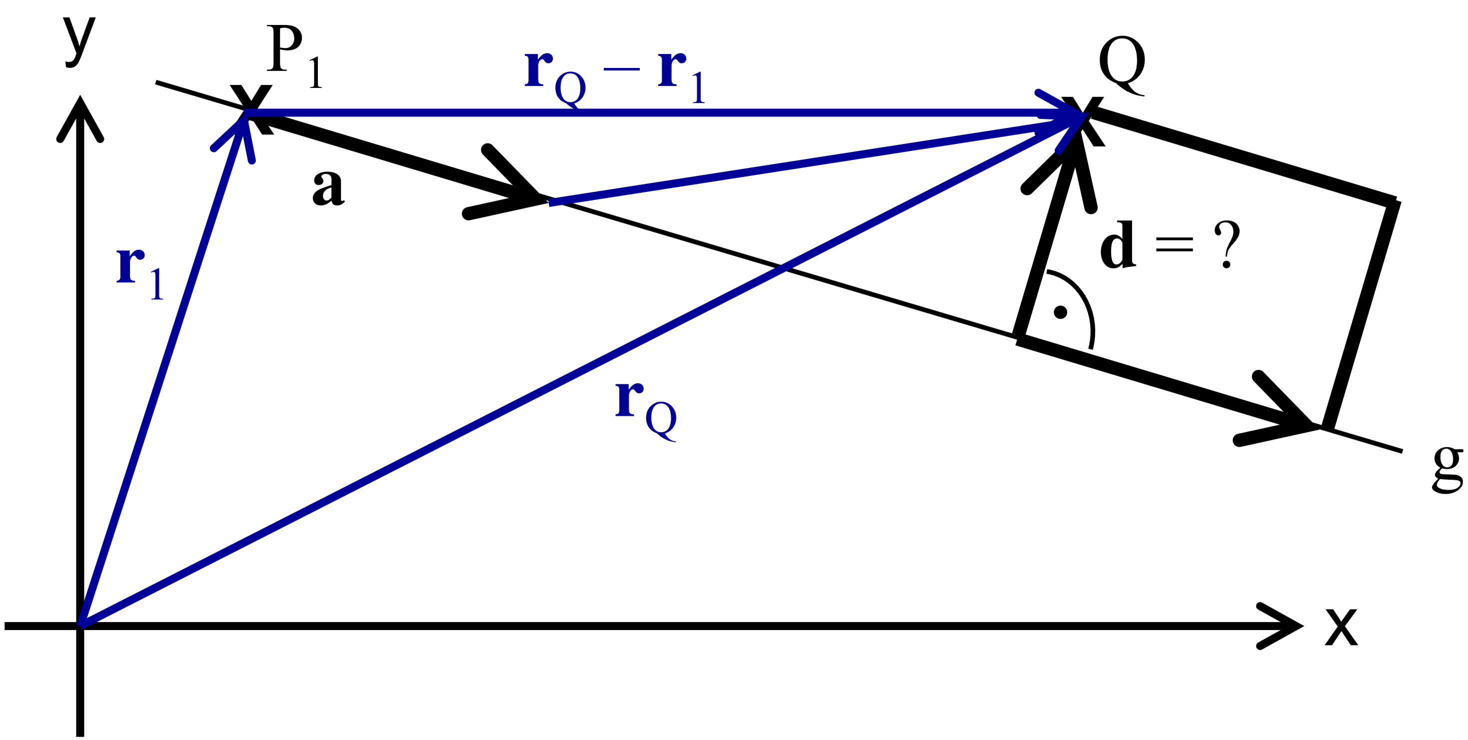
Erstes Parallelogramm:



Orientierte Fläche: $\mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1)$

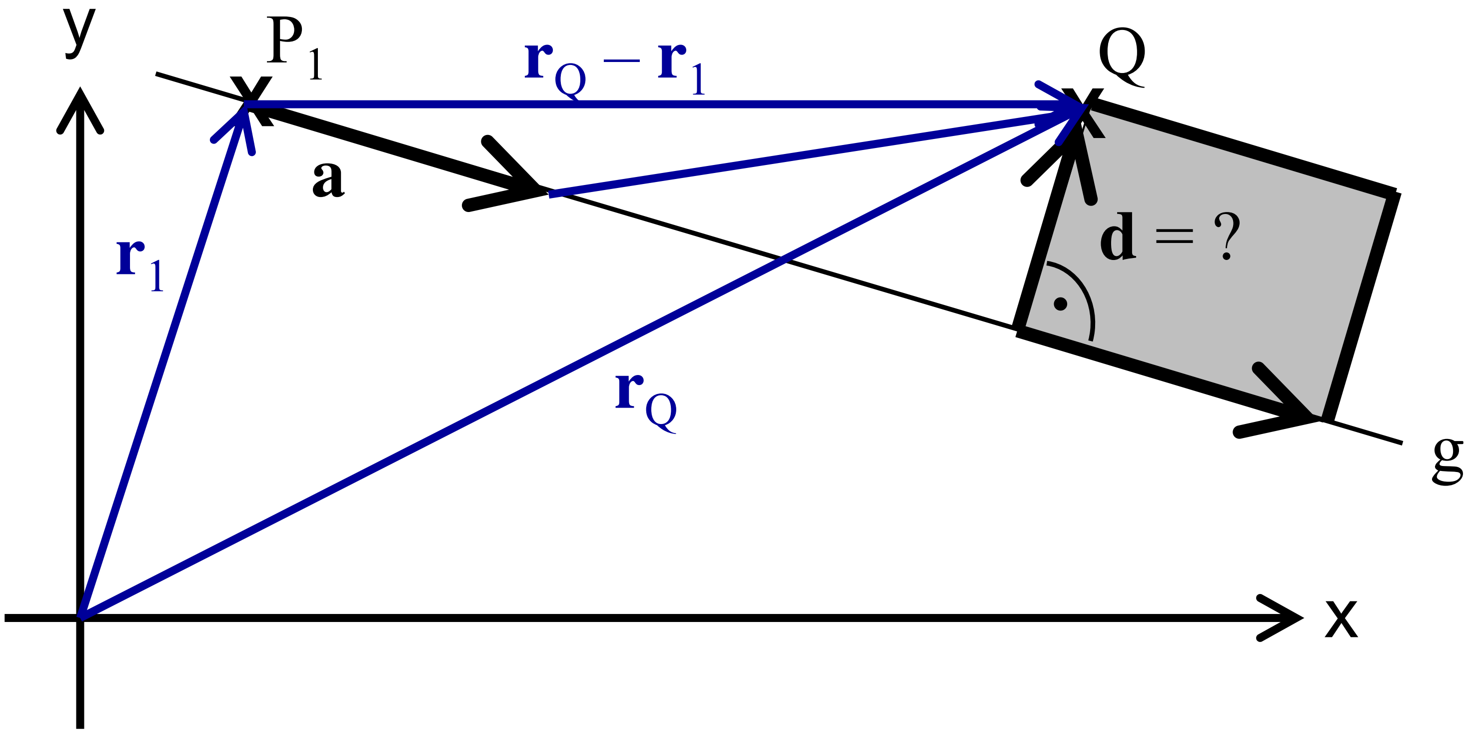
Abstand eines Punktes von einer Geraden

Und das zweites Parallelogramm …



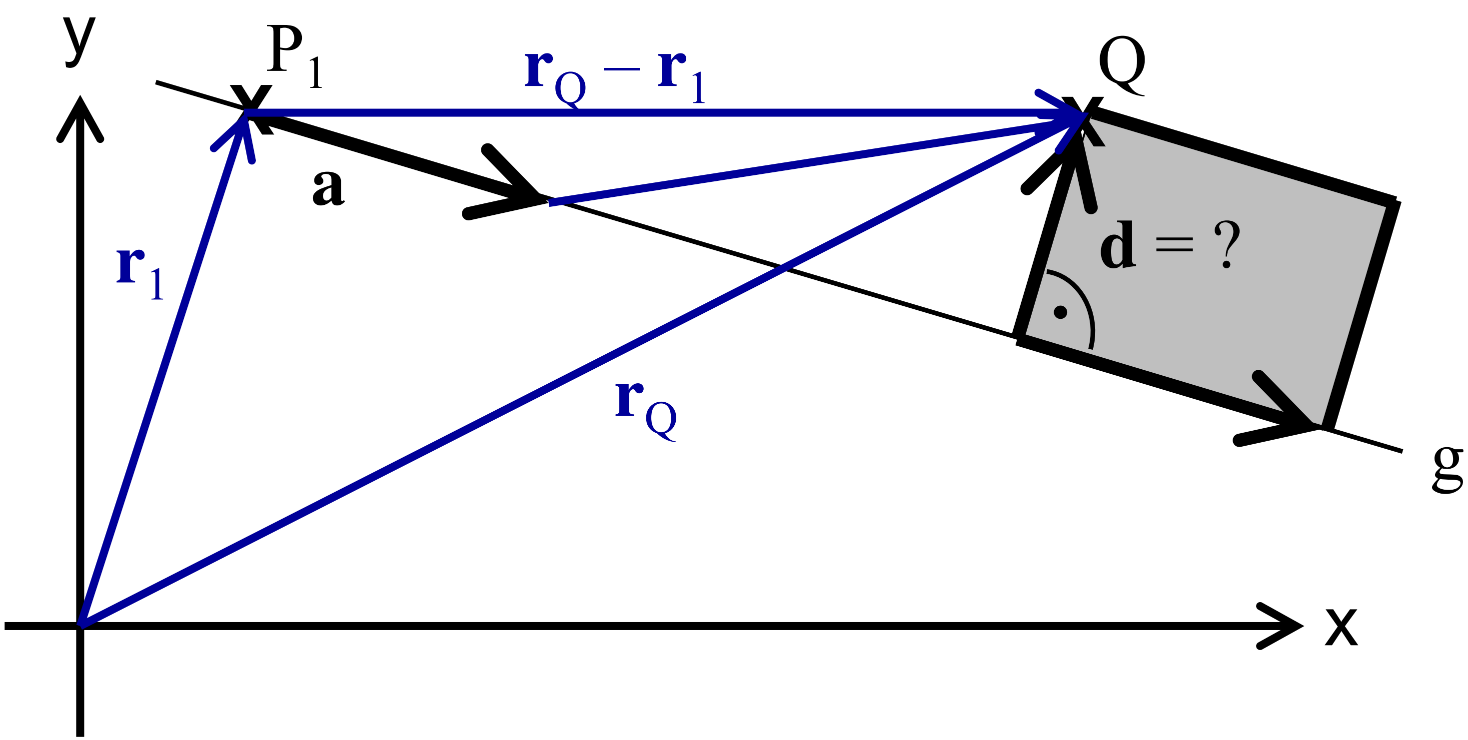
Abstand eines Punktes von einer Geraden

Und das zweites Parallelogramm ist ein Rechteck:



Abstand eines Punktes von einer Geraden

Und das zweites Parallelogramm ist ein Rechteck:



Orientierte Fläche: $\mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{d} = \mathbf{a}\,\mathbf{d}$

Flächengleichheit

Da der Flächeninhalt und damit beide orientierten Flächen identisch sind …

Flächengleichheit

Da der Flächeninhalt und damit beide orientierten Flächen identisch sind …

also jeweils die Bivektor-Anteile der Geometrischen Produkte identisch sind …

Flächengleichheit

Da der Flächeninhalt und damit beide orientierten Flächen identisch sind, gilt:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}\,\mathbf{d} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_\mathrm{Q} - \mathbf{r}_1)$$

Flächengleichheit

Da der Flächeninhalt und damit beide orientierten Flächen identisch sind, gilt:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}\,\mathbf{d} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_{\mathrm{Q}} - \mathbf{r}_1)$$

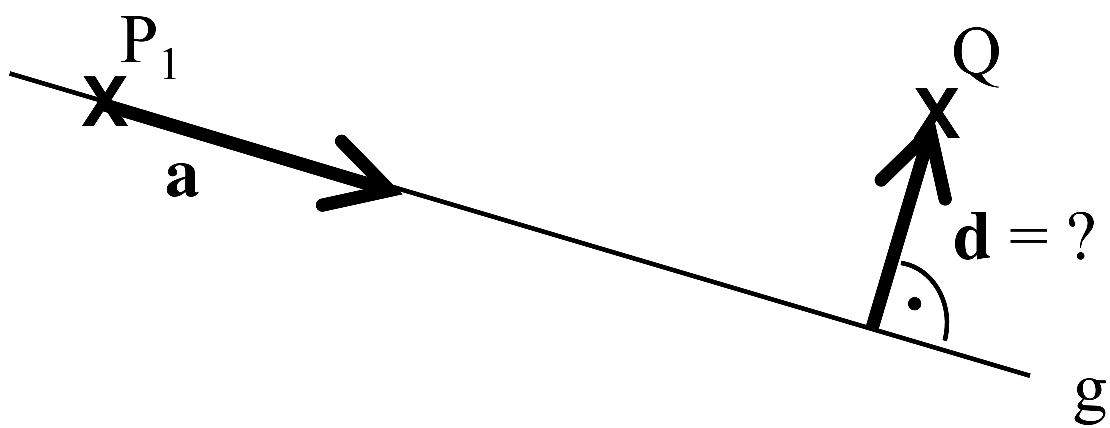
Für den Abstandsvektor **d** zwischen der Geraden g und dem Punkt Q gilt somit:

$$\mathbf{a}^{-1}\,\mathbf{a}\,\mathbf{d} = \mathbf{a}^{-1}\left(\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_{\mathrm{Q}} - \mathbf{r}_1)\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{d} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}^2}\,\mathbf{a}\left(\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_{\mathrm{Q}} - \mathbf{r}_1)\right)$$

Zusammenfassung

Wie lautet der Abstandsvektor **d** zwischen der Geraden g und dem Punkt Q?



Ergebnis: $$\mathbf{d} = \frac{1}{\mathbf{a}^2}\,\mathbf{a}\left(\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1)\right)$$

Beispielaufgabe

Ein Corona-Superspreader bewegt sich auf der Geraden

$$\mathbf{r}_{(\lambda)} = 22{,}5 \text{ m } \mathbf{e_1} + 935{,}0 \text{ m } \mathbf{e_2} + \lambda\,(2{,}4 \text{ m } \mathbf{e_1} - 1{,}8 \text{ m } \mathbf{e_2})$$

Berechnen Sie den Abstandsvektor **d** zwischen dieser Geraden und einer Person, die sich am Punkt

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}} = 750 \text{ m } \mathbf{e_1} + 400 \text{ m } \mathbf{e_2}$$

befindet.

Beispielaufgabe – Lösungsansatz

Es sind somit die folgenden Größen gegeben:

Ortsvektoren der beiden Personen:

$$\mathbf{r}_1 = 22{,}5\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_1} + 935{,}0\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{r}_Q = 750\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_1} + 400\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_2}$$

Richtungsvektor der Geraden:

$$\mathbf{a} = 2{,}4\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_1} - 1{,}8\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_2}$$

Beispielaufgabe – Lösungsansatz

Es sind somit die folgenden Größen gegeben:

Ortsvektoren der beiden Personen:

$$\mathbf{r}_1 = 22{,}5 \text{ m } \mathbf{e_1} + 935{,}0 \text{ m } \mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{r}_Q = 750 \text{ m } \mathbf{e_1} + 400 \text{ m } \mathbf{e_2}$$

Richtungsvektor der Geraden:

$$\mathbf{a} = 2{,}4 \text{ m } \mathbf{e_1} - 1{,}8 \text{ m } \mathbf{e_2}$$

Der Differenzvektor berechnet sich deshalb zu:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1 &= (750 - 22{,}5) \text{ m } \mathbf{e_1} + (400 - 935{,}0) \text{ m } \mathbf{e_2} \\ &= 727{,}5 \text{ m } \mathbf{e_1} - 535 \text{ m } \mathbf{e_2}\end{aligned}$$

Beispielaufgabe – Lösungsansatz

Es sind somit die folgenden Größen gegeben:

Ortsvektoren der beiden Personen:

$$\mathbf{r}_1 = 22{,}5\ \text{m}\ \mathbf{e_1} + 935{,}0\ \text{m}\ \mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{r}_Q = 750\ \text{m}\ \mathbf{e_1} + 400\ \text{m}\ \mathbf{e_2}$$

Richtungsvektor der Geraden:

$$\mathbf{a} = 2{,}4\ \text{m}\ \mathbf{e_1} - 1{,}8\ \text{m}\ \mathbf{e_2}$$

Und das Quadrat des Richtungsvektors beträgt:

$$\mathbf{a}^2 = (2{,}4\ \text{m}\ \mathbf{e_1} - 1{,}8\ \text{m}\ \mathbf{e_2})^2$$

$$= 9{,}0\ \text{m}^2$$

Beispielaufgabe – Lösungsansatz

Bekannte Größen: $\mathbf{r}_1 = 22{,}5\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_1} + 935{,}0\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_2}$

$\mathbf{r}_Q = 750\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_1} + 400\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_2}$

$\Rightarrow \quad \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1 = 727{,}5\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_1} - 535\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_2}$

$\mathbf{a} = 2{,}4\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_1} - 1{,}8\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_2}$

$\Rightarrow \quad \mathbf{a}^2 = 9{,}0\ \mathrm{m}^2$

Gesuchte Größe: $\mathbf{d} = ?$

Lösungsformel: $$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a^2}}\,\mathbf{a}\,(\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1))$$

Beispielaufgabe – Lösungsweg

Bekannte Größen: $\mathbf{r}_1 = 22{,}5\ \text{m}\ \mathbf{e_1} + 935{,}0\ \text{m}\ \mathbf{e_2}$

$\mathbf{r}_Q = 750\ \text{m}\ \mathbf{e_1} + 400\ \text{m}\ \mathbf{e_2}$

$\Rightarrow \quad \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1 = 727{,}5\ \text{m}\ \mathbf{e_1} - 535\ \text{m}\ \mathbf{e_2}$

$\mathbf{a} = 2{,}4\ \text{m}\ \mathbf{e_1} - 1{,}8\ \text{m}\ \mathbf{e_2}$

$\Rightarrow \quad \mathbf{a}^2 = 9{,}0\ \text{m}^2$

Berechnung des äußeren Produkts:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1) \\
&\quad = (2{,}4\ \text{m}\ \mathbf{e_1} - 1{,}8\ \text{m}\ \mathbf{e_2}) \wedge (727{,}5\ \text{m}\ \mathbf{e_1} - 535\ \text{m}\ \mathbf{e_2}) \\
&\quad = 2{,}4 \cdot (-\,535)\ \text{m}^2\ \mathbf{e_1 e_2} - 1{,}8 \cdot 727{,}5\ \text{m}^2\ \mathbf{e_2 e_1} \\
&\quad = 25{,}5\ \text{m}^2\ \mathbf{e_1 e_2}
\end{aligned}$$

Beispielaufgabe – Lösungsweg

Einsetzen in die Lösungsformel:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{\mathbf{a}^2}\,\mathbf{a}\,(\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1))$$

$$= \frac{1}{9{,}0\ \mathrm{m}^2}\,(2{,}4\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_1} - 1{,}8\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_2})\,(25{,}5\ \mathrm{m}^2\ \mathbf{e_1 e_2})$$

$$= \frac{1}{9{,}0\ \mathrm{m}^2}\,(61{,}2\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_2} + 45{,}9\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_1})$$

$$= 5{,}1\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_1} + 6{,}8\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_2}$$

Beispielaufgabe – Lösungsweg

Einsetzen in die Lösungsformel:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{\mathbf{a}^2}\,\mathbf{a}\,(\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1))$$

$$= \frac{1}{9{,}0\ \mathrm{m}^2}\,(2{,}4\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_1} - 1{,}8\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_2})\,(25{,}5\ \mathrm{m}^2\ \mathbf{e_1 e_2})$$

$$= \frac{1}{9{,}0\ \mathrm{m}^2}\,(61{,}2\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_2} + 45{,}9\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_1})$$

$$= 5{,}1\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_1} + 6{,}8\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_2}$$

$\Rightarrow$ Der Abstandsvektor **d** zwischen der Geraden des Corona-Superspreaders und der zweiten Person beträgt:

$$\mathbf{d} = 5{,}1\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_1} + 6{,}8\ \mathrm{m}\ \mathbf{e_2}$$

Beispielaufgabe des kleinen Computers

Natürlich kann die Beispielaufgabe

> Ein Corona-Superspreader bewegt sich auf der Geraden
>
> $$\mathbf{r}_{(\lambda)} = 22{,}5\text{ m }\mathbf{e_1} + 935{,}0\text{ m }\mathbf{e_2} + \lambda\,(2{,}4\text{ m }\mathbf{e_1} - 1{,}8\text{ m }\mathbf{e_2})$$
>
> Berechnen Sie den Abstandsvektor **d** zwischen dieser Geraden und einer Person, die sich am Punkt
>
> $$\mathbf{r}_Q = 750\text{ m }\mathbf{e_1} + 400\text{ m }\mathbf{e_2}$$
>
> befindet.

auch in die Mathematik des kleinen Computers übersetzt werden. Er rechnet ja nur mit (2 x 2)-Matrizen. Was anderes kann er nicht.

Beispielaufgabe des kleinen Computers

Wir müssen dann alles, aber wirklich auch alles, in die Mathematik der (2 x 2)-Matrizen übersetzen. Für andere mathematische Objekte wurde er nicht programmiert.

Beispielaufgabe des kleinen Computers

Wir müssen dann alles, aber wirklich auch alles, in die Mathematik der (2 x 2)-Matrizen übersetzen. Für andere mathematische Objekte wurde er nicht programmiert.

Selbst die physikalischen Einheiten – da sie mathematisch formal als Faktoren gedeutet werden – sind dann nichts anderes als (2 x 2)-Matrizen und müssen fett gedruckt werden:

$$\mathbf{750\ m} = \begin{pmatrix} 750 & 0 \\ 0 & 750 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{m} & 0 \\ 0 & \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 750\ \mathrm{m} & 0 \\ 0 & 750\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

Beispielaufgabe des kleinen Computers

Wir müssen dann alles, aber wirklich auch alles, in die Mathematik der (2 x 2)-Matrizen übersetzen. Für andere mathematische Objekte wurde er nicht programmiert.

Selbst die physikalischen Einheiten – da sie mathematisch formal als Faktoren gedeutet werden – sind dann nichts anderes als (2 x 2)-Matrizen und müssen fett gedruckt werden. Beziehungsweise gilt mit Basisvektor:

$$\mathbf{750\ m\ e_1} = \begin{pmatrix} 750 & 0 \\ 0 & 750 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{m} & 0 \\ 0 & \mathrm{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 750\ \mathrm{m} & 0 \\ 0 & 750\ \mathrm{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 750\ \mathrm{m} & 0 \\ 0 & -750\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

Beispielaufgabe des kleinen Computers

Die Beispielaufgabe lautet dann: Ein Corona-Superspreader bewegt sich auf der Geraden

$$\mathbf{r}_{(\lambda)} = \mathbf{22{,}5\ m\ e_1} + \mathbf{935{,}0\ m\ e_2} + \boldsymbol{\lambda}\ \mathbf{(2{,}4\ m\ e_1} - \mathbf{1{,}8\ m\ e_2)}$$

$$= \begin{pmatrix} 22{,}5\ \mathrm{m} + \lambda\ 2{,}4\ \mathrm{m} & 935{,}0\ \mathrm{m} - \lambda\ 1{,}8\ \mathrm{m} \\ 935{,}0\ \mathrm{m} - \lambda\ 1{,}8\ \mathrm{m} & -22{,}5\ \mathrm{m} - \lambda\ 2{,}4\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Abstandsvektor **d** zwischen dieser Geraden und einer Person, die sich am Punkt

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}} = \mathbf{750\ m\ e_1} + \mathbf{400\ m\ e_2} = \begin{pmatrix} 750\ \mathrm{m} & 400\ \mathrm{m} \\ 400\ \mathrm{m} & -750\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

befindet.

Beispielaufgabe des kleinen Computers

Es sind somit die folgenden Größen gegeben:

Ortsvektoren der beiden Personen:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{22{,}5\ m\ e_1} + \mathbf{935{,}0\ m\ e_2} = \begin{pmatrix} 22{,}5\ \mathrm{m} & 935\ \mathrm{m} \\ 935\ \mathrm{m} & -22{,}5\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_\mathrm{Q} = \mathbf{750\ m\ e_1} + \mathbf{400\ m\ e_2} = \begin{pmatrix} 750\ \mathrm{m} & 400\ \mathrm{m} \\ 400\ \mathrm{m} & -750\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

Richtungsvektor der Geraden:

$$\mathbf{a} = \mathbf{2{,}4\ m\ e_1} - \mathbf{1{,}8\ m\ e_2} = \begin{pmatrix} 2{,}4\ \mathrm{m} & -1{,}8\ \mathrm{m} \\ -1{,}8\ \mathrm{m} & -2{,}4\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

Beispielaufgabe des kleinen Computers

Der Differenzvektor berechnet sich in der Mathematik des kleinen Computers zu:

$$\mathbf{r}_\mathrm{Q} - \mathbf{r}_1 = (\mathbf{750\ m\ e_1} + \mathbf{400\ m\ e_2}) - (\mathbf{22{,}5\ m\ e_1} + \mathbf{935{,}0\ m\ e_2})$$

$$= \begin{pmatrix} 750\ \mathrm{m} & 400\ \mathrm{m} \\ 400\ \mathrm{m} & -750\ \mathrm{m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 22{,}5\ \mathrm{m} & 935\ \mathrm{m} \\ 935\ \mathrm{m} & -22{,}5\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 727{,}5\ \mathrm{m} & -535{,}0\ \mathrm{m} \\ -535{,}0\ \mathrm{m} & -727{,}5\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{727{,}5\ m\ e_1} - \mathbf{535{,}0\ m\ e_2}$$

Beispielaufgabe des kleinen Computers

Und das Quadrat des Richtungsvektors beträgt für den kleinen Computer:

$$\mathbf{a}^2 = (\mathbf{2{,}4\ m\ e_1} - \mathbf{1{,}8\ m\ e_2})^2$$

$$= \begin{pmatrix} 2{,}4\ \text{m} & -1{,}8\ \text{m} \\ -1{,}8\ \text{m} & -2{,}4\ \text{m} \end{pmatrix}^2$$

$(\mathbf{a}/\mathbf{m})^2$			
		2,4	– 1,8
		– 1,8	– 2,4
2,4	– 1,8	9,0	0
– 1,8	– 2,4	0	9,0

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 9{,}0 & 0 \\ 0 & 9{,}0 \end{pmatrix}$$

Beispielaufgabe des kleinen Computers

Und das Quadrat des Richtungsvektors beträgt für den kleinen Computer:

$$\mathbf{a}^2 = (\mathbf{2{,}4\ m\ e_1} - \mathbf{1{,}8\ m\ e_2})^2$$

$$= \begin{pmatrix} 2{,}4\ \mathrm{m} & -1{,}8\ \mathrm{m} \\ -1{,}8\ \mathrm{m} & -2{,}4\ \mathrm{m} \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 9{,}0\ \mathrm{m}^2 & 0 \\ 0 & 9{,}0\ \mathrm{m}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{9{,}0\ m^2}$$

Beispielaufgabe des kleinen Computers

Zusammenstellung der bekannten Größen:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{22{,}5\ m\ e_1} + \mathbf{935{,}0\ m\ e_2} = \begin{pmatrix} 22{,}5\ \mathrm{m} & 935\ \mathrm{m} \\ 935\ \mathrm{m} & -22{,}5\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_\mathrm{Q} = \mathbf{750\ m\ e_1} + \mathbf{400\ m\ e_2} = \begin{pmatrix} 750\ \mathrm{m} & 400\ \mathrm{m} \\ 400\ \mathrm{m} & -750\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_\mathrm{Q} - \mathbf{r}_1 = \mathbf{727{,}5\ m\ e_1} - \mathbf{535{,}0\ m\ e_2} = \begin{pmatrix} 727{,}5\ \mathrm{m} & -535{,}0\ \mathrm{m} \\ -535{,}0\ \mathrm{m} & -727{,}5\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{2{,}4\ m\ e_1} - \mathbf{1{,}8\ m\ e_2} = \begin{pmatrix} 2{,}4\ \mathrm{m} & -1{,}8\ \mathrm{m} \\ -1{,}8\ \mathrm{m} & -2{,}4\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{9{,}0\ m^2} = \begin{pmatrix} 9{,}0\ \mathrm{m}^2 & 0 \\ 0 & 9{,}0\ \mathrm{m}^2 \end{pmatrix}$$

Beispielaufgabe des kleinen Computers

Zusammenstellung der bekannten Größen:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{22{,}5\ m\ e_1} + \mathbf{935{,}0\ m\ e_2} = \begin{pmatrix} 22{,}5\ \mathrm{m} & 935\ \mathrm{m} \\ 935\ \mathrm{m} & -22{,}5\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{750\ m\ e_1} + \mathbf{400\ m\ e_2} = \begin{pmatrix} 750\ \mathrm{m} & 400\ \mathrm{m} \\ 400\ \mathrm{m} & -750\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1 = \mathbf{727{,}5\ m\ e_1} - \mathbf{535{,}0\ m\ e_2} = \begin{pmatrix} 727{,}5\ \mathrm{m} & -535{,}0\ \mathrm{m} \\ -535{,}0\ \mathrm{m} & -727{,}5\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} = \frac{\mathbf{2{,}4}}{\mathbf{9\ m}}\,\mathbf{e}_1 - \frac{\mathbf{1{,}8}}{\mathbf{9\ m}}\,\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2{,}4}{9\ \mathrm{m}} & -\frac{1{,}8}{9\ \mathrm{m}} \\ -\frac{1{,}8}{9\ \mathrm{m}} & -\frac{2{,}4}{9\ \mathrm{m}} \end{pmatrix}$$

Lösungsansatz des kleinen Computers

Gesuchte Größe: $\mathbf{d} = ?$

Lösungsformel: $$\mathbf{d} = \frac{1}{\mathbf{a}^2}\,\mathbf{a}\,\big(\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_\mathrm{Q} - \mathbf{r}_1)\big)$$

$$= \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}\,\big(\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_\mathrm{Q} - \mathbf{r}_1)\big)$$

Lösungsansatz des kleinen Computers

Gesuchte Größe: $\mathbf{d} = ?$

Lösungsformel: $\mathbf{d} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}\,(\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_\mathrm{Q} - \mathbf{r}_1))$

Berechnung des äußeren Produkts:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_\mathrm{Q} - \mathbf{r}_1)$$

$$= (\mathbf{2{,}4\ m\ e_1 - 1{,}8\ m\ e_2}) \wedge (\mathbf{727{,}5\ m\ e_1 - 535\ m\ e_2})$$

$$= \begin{pmatrix} 2{,}4\ \mathrm{m} & -1{,}8\ \mathrm{m} \\ -1{,}8\ \mathrm{m} & -2{,}4\ \mathrm{m} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 727{,}5\ \mathrm{m} & -535{,}0\ \mathrm{m} \\ -535{,}0\ \mathrm{m} & -727{,}5\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

Lösungsansatz des kleinen Computers

Äußeres Produkt:

$$\begin{pmatrix} 2{,}4 & -1{,}8 \\ -1{,}8 & -2{,}4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 727{,}5 & -535{,}0 \\ -535{,}0 & -727{,}5 \end{pmatrix} = \dots$$

$$\begin{array}{rr|rr} & & 727{,}5 & -535{,}0 \\ & & -535{,}0 & -727{,}5 \\ \hline 2{,}4 & -1{,}8 & 2709{,}0 & 25{,}5 \\ -1{,}8 & -2{,}4 & -25{,}5 & 2709{,}0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2709{,}0 & 25{,}5 \\ -25{,}5 & 2709{,}0 \end{pmatrix}$$

Lösungsansatz des kleinen Computers

Äußeres Produkt:

$$\begin{pmatrix} 2{,}4 & -1{,}8 \\ -1{,}8 & -2{,}4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 727{,}5 & -535{,}0 \\ -535{,}0 & -727{,}5 \end{pmatrix} = \dots$$

$$\begin{array}{rr|rr} & & 727{,}5 & -535{,}0 \\ & & -535{,}0 & -727{,}5 \\ \hline 2{,}4 & -1{,}8 & 2709{,}0 & 25{,}5 \\ -1{,}8 & -2{,}4 & -25{,}5 & 2709{,}0 \end{array} \qquad \begin{array}{rr|rr} & & 2{,}4 & -1{,}8 \\ & & -1{,}8 & -2{,}4 \\ \hline 727{,}5 & -535{,}0 & 2709{,}0 & -25{,}5 \\ -535{,}0 & -727{,}5 & 25{,}5 & 2709{,}0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2709{,}0 & 25{,}5 \\ -25{,}5 & 2709{,}0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2709{,}0 & -25{,}5 \\ 25{,}5 & 2709{,}0 \end{pmatrix}$$

Lösungsansatz des kleinen Computers

Äußeres Produkt:

$$\begin{pmatrix} 2{,}4 & -1{,}8 \\ -1{,}8 & -2{,}4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 727{,}5 & -535{,}0 \\ -535{,}0 & -727{,}5 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{\frac{1}{2}} \left[\begin{pmatrix} 2709{,}0 & 25{,}5 \\ -25{,}5 & 2709{,}0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2709{,}0 & -25{,}5 \\ 25{,}5 & 2709{,}0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \mathbf{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 51{,}0 \\ -51{,}0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 25{,}5 \\ -25{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{25{,}5\ e_1 e_2}$$

Lösungsansatz des kleinen Computers

Äußeres Produkt mit Einheiten:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_\mathrm{Q} - \mathbf{r}_1)$$

$$= (\mathbf{2{,}4\ m\ e_1 - 1{,}8\ m\ e_2}) \wedge (\mathbf{727{,}5\ m\ e_1 - 535\ m\ e_2})$$

$$= \begin{pmatrix} 2{,}4\ \mathrm{m} & -1{,}8\ \mathrm{m} \\ -1{,}8\ \mathrm{m} & -2{,}4\ \mathrm{m} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 727{,}5\ \mathrm{m} & -535{,}0\ \mathrm{m} \\ -535{,}0\ \mathrm{m} & -727{,}5\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 25{,}5\ \mathrm{m}^2 \\ -25{,}5\ \mathrm{m}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{25{,}5\ m^2\ e_1 e_2}$$

Lösungsansatz des kleinen Computers

Einsetzen in die Lösungsformel:

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}\left(\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2{,}4}{9\text{ m}} & -\frac{1{,}8}{9\text{ m}} \\ -\frac{1{,}8}{9\text{ m}} & -\frac{2{,}4}{9\text{ m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 25{,}5\text{ m}^2 \\ -25{,}5\text{ m}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5{,}1\text{ m} & 6{,}8\text{ m} \\ 6{,}8\text{ m} & -5{,}1\text{ m} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{5{,}1\ m\ e_1} + \mathbf{6{,}8\ m\ e_2}$$

Lösungsansatz des kleinen Computers

Einsetzen in die Lösungsformel:

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}\left(\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 5{,}1\text{ m} & 6{,}8\text{ m} \\ 6{,}8\text{ m} & -5{,}1\text{ m} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{5{,}1\ m\ e_1 + 6{,}8\ m\ e_2}$$

$\Rightarrow$ Der Abstandsvektor **d** zwischen der Geraden des Corona-Superspreaders und der zweiten Person beträgt:

$$\mathbf{d = 5{,}1\ m\ e_1 + 6{,}8\ m\ e_2}$$

Vergleich mit der altmodischen Formel

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}\,(\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_\mathrm{Q} - \mathbf{r}_1))$$

$$\mathrm{d} = \frac{\left|\vec{\mathrm{a}} \times (\vec{\mathrm{r}}_Q - \vec{\mathrm{r}}_1)\right|}{|\vec{\mathrm{a}}|}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{2{,}4\ m\ e_1 - 1{,}8\ m\ e_2}$$

$$\vec{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} 2{,}4\ \mathrm{m} \\ -1{,}8\ \mathrm{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_\mathrm{Q} - \mathbf{r}_1 = \mathbf{727{,}5\ m\ e_1 - 535{,}0\ m\ e_2}$$

$$\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{Q} - \vec{\mathrm{r}}_1 = \begin{pmatrix} 727{,}5\ \mathrm{m} \\ -535{,}0\ \mathrm{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vergleich mit der altmodischen Formel

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}\,(\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1))$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{2{,}4\ m\ e_1 - 1{,}8\ m\ e_2}$$

$$\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1 = \mathbf{727{,}5\ m\ e_1 - 535{,}0\ m\ e_2}$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1) = \mathbf{25{,}5\ m^2\ e_1 e_2}$$

$$\mathrm{d} = \frac{\left|\vec{\mathrm{a}} \times (\vec{\mathrm{r}}_Q - \vec{\mathrm{r}}_1)\right|}{|\vec{\mathrm{a}}|}$$

$$\vec{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} 2{,}4\ \mathrm{m} \\ -1{,}8\ \mathrm{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathrm{r}}_Q - \vec{\mathrm{r}}_1 = \begin{pmatrix} 727{,}5\ \mathrm{m} \\ -535{,}0\ \mathrm{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathrm{a}}\ \mathrm{x}\ (\vec{\mathrm{r}}_Q - \vec{\mathrm{r}}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25{,}5\ \mathrm{m}^2 \end{pmatrix}$$

Vergleich mit der altmodischen Formel

$\mathbf{d} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}\,(\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1))$	$\mathrm{d} = \dfrac{\left\lvert\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)\right\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert}$
$\mathbf{a} = \mathbf{2{,}4\ m\ e_1 - 1{,}8\ m\ e_2}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2{,}4\ \mathrm{m} \\ -1{,}8\ \mathrm{m} \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1 = \mathbf{727{,}5\ m\ e_1 - 535{,}0\ m\ e_2}$	$\vec{r}_Q - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 727{,}5\ \mathrm{m} \\ -535{,}0\ \mathrm{m} \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1) = \mathbf{25{,}5\ m^2\ e_1 e_2}$	$\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25{,}5\ \mathrm{m}^2 \end{pmatrix}$

Bis hierhin sieht alles noch recht ähnlich aus.

Vergleich mit der altmodischen Formel

Es sieht aber nur so aus …

In Wahrheit sehen wir hier eine konzeptuelle Katastrophe vor uns: Beim Kreuzprodukt wird ein Flächenstück nicht als Fläche dargestellt, sondern durch eine Normale (also einen Vektor, der senkrecht zur betrachteten Fläche steht) repräsentiert.

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_{\mathrm{Q}} - \mathbf{r}_1) = \mathbf{25{,}5\ m^2\ e_1 e_2} \qquad \Bigg| \qquad \vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25{,}5\ \mathrm{m}^2 \end{pmatrix}$$

Bis hierhin sieht alles noch recht ähnlich aus.

Vergleich mit der altmodischen Formel

Es sieht aber nur so aus …

In Wahrheit sehen wir hier eine konzeptuelle Katastrophe vor uns: Beim Kreuzprodukt wird ein Flächenstück nicht als Fläche dargestellt, sondern durch eine Normale (also einen Vektor, der senkrecht zur betrachteten Fläche steht) repräsentiert.

Das funktioniert nur in einem dreidimensionalen Raum.

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_1) = \mathbf{25{,}5\ m^2\ e_1 e_2}$$

$$\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25{,}5\ \mathrm{m}^2 \end{pmatrix}$$

Vergleich mit der altmodischen Formel

Es sieht aber nur so aus …

In Wahrheit sehen wir hier eine konzeptuelle Katastrophe vor uns: Beim Kreuzprodukt wird ein Flächenstück nicht als Fläche dargestellt, sondern durch eine Normale (also einen Vektor, der senkrecht zur betrachteten Fläche steht) repräsentiert.

Das funktioniert nur in einem dreidimensionalen Raum.

In einem zweidimensionalen Raum existiert keine Senkrechte. Und in höher-dimensionalen Räumen existieren unendlich viele verschiedene senkrechte Vektoren zu einer Fläche.

Deshalb konnten wir zu Beginn schreiben:
Der kleine, doofe Computer ist ganz modern

Diese Mathematik des kleinen, behäbigen Computers ist viel moderner als die Mathematik des Kreuzprodukts $\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)$ im Zähler der Formel für d, weil wir ja wissen:

Das äußere Produkt zweier Vektoren ist kein neuer, weiterer Vektor wie beim altmodischen Kreuzprodukt x, sondern ein Bivektor und damit ein zweidimensionales, orientiertes Flächenstück – der orientierte Flächeninhalt eines Parallelogramms.

Das ist modern, weil die geometrische Interpretation als Flächenelement Sinn macht – und besonders weil …

Der kleine, doofe Computer ist ganz modern

Diese Mathematik des kleinen, behäbigen Computers ist viel moderner als die Mathematik des Kreuzprodukts, weil die geometrische Interpretation als Flächenelement Sinn macht – und besonders weil …

… die Formel des kleinen Computers immer und überall gilt, egal wie viele Dimensionen ein Raum hat.

Der kleine, doofe Computer ist ganz modern

Diese Mathematik des kleinen, behäbigen Computers ist viel moderner als die Mathematik des Kreuzprodukts, weil die geometrische Interpretation als Flächenelement Sinn macht – und besonders weil …

… die Formel des kleinen Computers immer und überall gilt, egal wie viele Dimensionen ein Raum hat.

Die altmodische Kreuzprodukt-Formel gilt nur im Spezialfall dreidimensionaler Räume.

Der kleine, doofe Computer ist ganz modern

Diese Mathematik des kleinen, behäbigen Computers ist viel moderner als die Mathematik des Kreuzprodukts, weil die geometrische Interpretation als Flächenelement Sinn macht – und besonders weil …

… die Formel des kleinen Computers immer und überall gilt, egal wie viele Dimensionen ein Raum hat.

Die altmodische Kreuzprodukt-Formel gilt nur im Spezialfall dreidimensionaler Räume. In allen anderen Fällen ist die Kreuzprodukt-Formel nutzlos und unbrauchbar.

Bitte merken:

Die altmodische Kreuzprodukt-Formel gilt nur im Spezialfall dreidimensionaler Räume. In allen anderen Fällen ist die Kreuzprodukt-Formel nutzlos und unbrauchbar.

Der kleine, doofe Computer ist ganz modern

Die altmodische Kreuzprodukt-Formel gilt nur im Spezialfall dreidimensionaler Räume. In allen anderen Fällen ist die Kreuzprodukt-Formel nutzlos und unbrauchbar. Trotzdem können wir hier mit ihr noch schnell den Betrag des Abstands d ausrechnen:

$$\mathrm{d} = \frac{\left|\vec{\mathrm{a}} \times (\vec{\mathrm{r}}_Q - \vec{\mathrm{r}}_1)\right|}{|\vec{\mathrm{a}}|} = \frac{25{,}5\ \mathrm{m}^2}{3\ \mathrm{m}} = 8{,}5\ \mathrm{m}$$

Der kleine, doofe Computer ist ganz modern

Die altmodische Kreuzprodukt-Formel gilt nur im Spezialfall dreidimensionaler Räume. In allen anderen Fällen ist die Kreuzprodukt-Formel nutzlos und unbrauchbar. Trotzdem können wir hier mit ihr noch schnell den Betrag des Abstands d ausrechnen:

$$\mathrm{d} = \frac{\left|\vec{\mathrm{a}} \times (\vec{\mathrm{r}}_Q - \vec{\mathrm{r}}_1)\right|}{|\vec{\mathrm{a}}|} = \frac{25{,}5\ \mathrm{m}^2}{3\ \mathrm{m}} = 8{,}5\ \mathrm{m}$$

Aber das können wir mit Hilfe der Mathematik des kleinen Computers natürlich auch:

$$\mathrm{d} = \sqrt{\mathbf{d}^2}$$

Der kleine, doofe Computer ist ganz modern

Wir berechnen zum Schluss deshalb, nur so als Probe:

$$\mathbf{d}^2 = (5{,}1\ \text{m}\ \mathbf{e_1} + 6{,}8\ \text{m}\ \mathbf{e_2})^2 = 72{,}25\ \text{m}^2$$

$$\text{d} = \sqrt{\mathbf{d^2}} = \sqrt{72{,}25\ \text{m}^2} = 8{,}5\ \text{m}$$

Der kleine, doofe Computer ist ganz modern

Wir berechnen zum Schluss deshalb, nur so als Probe:

$$\mathbf{d}^2 = (5{,}1\text{ m }\mathbf{e_1} + 6{,}8\text{ m }\mathbf{e_2})^2 = 72{,}25\text{ m}^2$$

$$\text{d} = \sqrt{\mathbf{d^2}} = \sqrt{72{,}25\text{ m}^2} = 8{,}5\text{ m}$$

$\Rightarrow$ Der Betrag des kürzesten (senkrechten) Abstands der Geraden des Corona-Superspreaders zur zweiten Person beträgt 8,5 m.

Der kleine, doofe Computer ist ganz modern

Und der kleine Computer berechnet zum Schluss, nur so als Probe:

$$\mathbf{d}^2 = (\mathbf{5{,}1\ m\ e_1} + \mathbf{6{,}8\ m\ e_2})^2$$

$$= \begin{pmatrix} 5{,}1\text{ m} & 6{,}8\text{ m} \\ 6{,}8\text{ m} & -5{,}1\text{ m} \end{pmatrix}^2$$

		5,1	6,8
		6,8	– 5,1
5,1	6,8	72,25	0
6,8	– 5,1	0	72,25

Der kleine, doofe Computer ist ganz modern

Und der kleine Computer berechnet zum Schluss, nur so als Probe:

$$\mathbf{d}^2 = (\mathbf{5{,}1\ m\ e_1} + \mathbf{6{,}8\ m\ e_2})^2$$

$$= \begin{pmatrix} 5{,}1\text{ m} & 6{,}8\text{ m} \\ 6{,}8\text{ m} & -5{,}1\text{ m} \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 72{,}25\text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 72{,}25\text{ m}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{72{,}25\ m^2}$$

Der kleine, doofe Computer ist ganz modern

Und der kleine Computer berechnet zum Schluss, nur so als Probe:

$$\mathbf{d}^2 = (\mathbf{5{,}1\ m\ e_1} + \mathbf{6{,}8\ m\ e_2})^2$$

$$= \begin{pmatrix} 5{,}1\ \mathrm{m} & 6{,}8\ \mathrm{m} \\ 6{,}8\ \mathrm{m} & -5{,}1\ \mathrm{m} \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 72{,}25\ \mathrm{m}^2 & 0 \\ 0 & 72{,}25\ \mathrm{m}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{72{,}25\ m^2}$$

$$\Rightarrow \quad |\mathbf{d}| = \sqrt{\mathbf{d}^2}$$

Der kleine, doofe Computer ist ganz modern

Und der kleine Computer berechnet zum Schluss, nur so als Probe:

$$\mathbf{d}^2 = \begin{pmatrix} 72{,}25\ \mathrm{m}^2 & 0 \\ 0 & 72{,}25\ \mathrm{m}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{72{,}25\ m^2}$$

$$\Rightarrow \qquad |\mathbf{d}| = \sqrt{\mathbf{d^2}}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{72{,}25\ \mathrm{m}^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{72{,}25\ \mathrm{m}^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8{,}5\ \mathrm{m} & 0 \\ 0 & 8{,}5\ \mathrm{m} \end{pmatrix} = \mathbf{8{,}5\ m}$$

Der kleine, doofe Computer ist ganz modern

Und der kleine Computer berechnet zum Schluss, nur so als Probe:

$$\mathbf{d}^2 = \begin{pmatrix} 72{,}25\ \mathrm{m}^2 & 0 \\ 0 & 72{,}25\ \mathrm{m}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{72{,}25\ m^2}$$

$$\Rightarrow \qquad |\mathbf{d}| = \sqrt{\mathbf{d}^2} = \begin{pmatrix} 8{,}5\ \mathrm{m} & 0 \\ 0 & 8{,}5\ \mathrm{m} \end{pmatrix} = \mathbf{8{,}5\ m}$$

Und da die Probe gelungen ist, machen wir hier endgültig Schluss für heute.

Ergänzungsfolien 07: Albert Einstein bringt immer alles durcheinander

Mathematik 1 des Bachelor-Studiengangs Ingenieurinformatik der HTW Berlin

Corona-Semester Sommer 2020

– Dr. M. Horn –

Hallo !

Zürich – ETH – Mathematik-Vorlesung

Der junge Albert Einstein und die junge Mileva Marić sitzen in der Mathematik-Vorlesung von Prof. Minkowski und werfen sich verstohlen Blicke zu.

Doch während Mileva eifrig mitschreibt, scheint Albert mehr an seiner Nachbarin als an den mathematischen Ausführungen von Prof. Minkowski interessiert.

Prof. Minkowski setzt an:

„Wir haben hier jetzt die (2 x 2)-Matrizen mit reellen Elementen a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} …“

Zürich – ETH – Mathematik-Vorlesung

Und Mileva schreibt:

„Quadratische (2 x 2)-Matrizen $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Alle a_{ij} sind reell…“

Und Albert kramt einen Zettel aus der Hosentasche und schreibt:

„Mein liebes Doxerl, mein liebes Miezchen!
Sei herzlich dafür geküsst und verdrückt, grad so, wie Du‘s möchtest und wies Dir gehört.“

Und Prof. Minkowski redet weiter …

Zürich – ETH – Mathematik-Vorlesung

Und Prof. Minkowski redet weiter und fährt fort:

„Und diese Matrizen lassen sich zerlegen in, ähm, zerlegen in einen Skalar und ähm, ähm, einen Bivektor, auch einen Vektoranteil. Ach was, das ist einfach eine Linearkombination aus dem allen…“

Und Mileva schreibt:

„Linerkombination aus …“

Aber da wird sie von Albert unterbrochen, der ihr den Zettel zusteckt. Sie liest ihn und wird ganz rot.

Zürich – ETH – Mathematik-Vorlesung

Währenddessen erklärt Prof. Minkowski weiter:

„Der Basisskalar ist (hier ist Mileva etwas abgelenkt und Albert hört sowieso nicht zu.) Und dann haben wir zwei Basisvektoren und einen Basis-Bivektor, warten Sie, das schreibe ich mal an die Tafel…“

Und Mileva kichert und versucht, mitzuschreiben:

„1 Basisskalar, 2 Basisvektoren, 1 Basis-Bivektor!“

Und Albert holt schon einen weiteren Zettel aus der Hosentasche und schreibt:

Zürich – ETH – Mathematik-Vorlesung

Und Albert schreibt:

„Mein geliebtes Schätzchen! Am Sonntag küss‘ ich Dich mündlich! Und wirst Du mir ein kleines Heiligtum sein. So eine herrliche Partie hast Du noch nicht gemacht, dies verspreche ich Dir jetzt schon und wenns auch Katzen hagelt…“

Und Prof. Minkowski schreibt die vier Basisvektoren an die Tafel. Und Mileva schreibt ab:

„Basisskalar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Basisvektoren: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – – “

Und da wird sie auch schon wieder von Albert abgelenkt,

Zürich – ETH – Mathematik-Vorlesung

Und da wird sie auch schon wieder von Albert abgelenkt, der ihr den zweiten Zettel zuschiebt.

Mileva liest ihn und lacht laut auf. Das gefällt Prof. Minkowski aber gar nicht. Streng schaut er nach oben, die Hörsaal-Reihen hoch und brummt:

„Sie schon wieder, Einstein! Nur Augen für die Frauen. Man könnt‘ ja denken, Sie sind ein fauler Hund. Aber das sag‘ ich Ihnen jetzt nicht, sondern nur dem Born, der erzählt das sicher nicht weiter.“

Und da ist die Vorlesung auch schon zu Ende.

Zürich – ETH – Mathematik-Vorlesung

Leider war das nur die verkürzte Version der Mathematik-Vorlesung von Prof. Minkowski in Zürich. Was genau Prof. Minkowski von seinem Studenten Einstein gehalten hat, kann beispielsweise in der Einstein-Biographie

Johannes Wickert: Albert Einstein (rowohlts monographien, Band 162). Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg 1972

auf S. 14 (oder einer der zahlreichen anderen Einstein-Biographien) nachgelesen werden.

Zürich – ETH – Mathematik-Vorlesung

Ob Prof. Minkowski den jungen Albert Einstein wirklich als „faulen Hund“ bezeichnet hat, ist nicht ganz klar. Auf jeden Fall hat Einstein die Vorlesungen recht oft geschwänzt, und Prof. Minkowski bezeichnete ihn deshalb als „Faulpelz“.

Daraus wurde in der englischen Übersetzung „lazy dog“, das dann wohl wieder ins Deutsche zurückübersetzt den „faulen Hund“ ergab, der sich beispielsweise in …

(Der spätere Nobelpreisträger Max Born war damals übrigens Assistent von Minkowski.)

Zürich – ETH – Mathematik-Vorlesung

Daraus wurde in der englischen Übersetzung „lazy dog“, das dann wohl weiter erst ins Finnische und dann zurück ins Deutsche übersetzt den „faulen Hund“ ergab, der sich beispielsweise in

Jukka Maalampi: Die Weltlinie. Albert Einstein und die moderne Physik. Aus dem Finnischen übersetzt von Manfred Stern, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2008

auf S. 65 findet.

Zürich – ETH – Mathematik-Vorlesung

Gar nicht faul war Einstein allerdings im Schreiben von Liebesbriefen. Diese Briefe füllen ganze Bücher:

Albert Einstein, Mileva Marić: Am Sonntag küss‘ ich Dich mündlich. Die Liebesbriefe 1897 – 1903, herausgegeben von Jürgen Renn & Robert Schulmann. Piper-Verlag, München 1994.

Da wundert es nicht, dass Einstein in Zürich keine Zeit hatte, die Vorlesungen zu besuchen.

Zürich – abends

In ihrer Studentenbude schauen sich Albert und Mileva abends die (leider unvollständigen) Mitschriften der Mathematik-Vorlesung durch:

Zürich – abends

In ihrer Studentenbude schauen sich Albert und Mileva abends die (leider unvollständigen) Mitschriften der Mathematik-Vorlesung durch:

„Quadratische (2 x 2)-Matrizen $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Alle a_{ij} sind reell.

Linearkombination aus

1 Basisskalar, 2 Basisvektoren, 1 Basis-Bivektor!

Basisskalar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Basisvektoren: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – – “

Zürich – abends

„Na, viel hat der olle Minkowski heute ja nicht gemacht…“, mosert Albert, „da fehlt ja die Hälfte!“

„Vielleicht stand da noch mehr an der Tafel,“ entgegnet Mileva, „aber Deine Zetterl haben halt etwas vom Abschreiben abgelenkt…“

Und sie wird rot: „Jetzt aber zum Mündlichen, was Du versprochen hast.“

Doch Albert murrt: „Da stehen nur zwei Matrizen, …“

Zürich – abends

Doch Albert murrt: „Da stehen nur zwei Matrizen, es müssten aber doch vier sein … ein Basisskalar, zwei Basisvektoren und ein Basis-Bivektor, das gibt doch vier. Das müssten doch auch die versnobten Mathematiker sehen.“

„Ja, da standen vier an der Tafel – – Die anderen zwei konnte ich aber nicht so schnell abschreiben, wo doch der Minkowski zu Schimpfen angefangen hat,“ meint Mileva, „aber ich hab‘ sie mir im Kopf gemerkt!“

Zürich – abends

Das interessiert den Albert nun doch sehr: „Und wie sahen die anderen beiden (2 x 2)-Matrizen denn aus?“

Und Mileva versucht, sich zu erinnern.: „Also die beiden Matrizen, die ich aufgeschrieben hab‘, hatten ja nur Eintragungen auf der Hauptdiagonalen: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ war der Basisskalar, das ist ja klar. Und dann gibt es da den einen Basisvektor $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Und bei den anderen beiden Matrizen gab es nur Eintragungen auf der Nebendiagonalen. Die sahen dann wohl irgendwie so aus, Moment, ich hab‘s gleich, so wie …“

Zürich – abends

Und jetzt erinnert sich Mileva ganz genau: „Ja, die sahen so aus: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$."

Albert freut sich: „Das also sind der fehlende Basis-vektor und der fehlende Basis-Bivektor. Sehr schön!"

Doch Mileva ist noch nicht zufrieden: „Ich weiß nur nicht mehr so genau, welche Matrix von den beiden nun der Basisvektor und welche der Basis-Bivektor ist."

Zürich – abends

Doch das kümmert Albert nicht sonderlich: „Ach, das ist doch kein Problem. Beim dem einen Basisvektor haben wir doch ein Minuszeichen drin. Da ist doch klar, dass der andere Basisvektor auch die Matrix mit dem einen Minuszeichen sein muss.“

Mileva: „Also $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?“

Albert: „Klar, am besten, ich schreib‘ das alles mal auf …“

Und er notiert: …

Zürich – abends

Und Albert notiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \qquad \rightarrow \text{ Basisskalar}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1} \qquad \rightarrow \text{ Basisvektor}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_0} \qquad \rightarrow \text{ noch ein Basisvektor}$$

Zürich – abends

Und Albert notiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \qquad \rightarrow \text{ Basisskalar}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1} \qquad \rightarrow \text{ Basisvektor}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_0} \qquad \rightarrow \text{ noch ein Basisvektor}$$

Doch Mileva unterbricht ihn und wundert sich: „$\mathbf{e_0}$, warum e-Null? Ich glaube, der Minkowski hatte da einen anderen Namen.“

Zürich – abends

Doch dem Albert ist das egal: „Aber Doxerl, mein liebes Mietzechen, das macht doch nichts. Namen sind mir schnurzpiepwurschtegal. Hauptsache, der Minkowski verwendet keine griechischen Buchstaben, irgendwelche Gammas, … γ oder so. Das überlassen wir am besten exzentrischen Briten mit französischen Namen."

Doch Mileva ist nicht zufrieden: „Aber e-Null? Warum die Null?"

Doch da ist Albert konsequent: „Bei mir fangen alle Zahlen immer und immer wieder bei Null an!"

Zürich – abends

Doch da ist Albert konsequent und auch zielstrebig: „Und das passt ja dann auch zum Bivektor, den könnten wir doch dann ausrechnen …“

Mileva: „Ja, das hat Prof. Minkowski auch gemacht, gerade dann, als Du Deine Zetterl geschrieben hast.“

Albert: „Ist ja auch kein Problem. Jeder Basis-Bivektor ist doch einfach das Produkt aus zwei Basisvektoren. Und da wir nur zwei Basisvektoren haben, müssen wir die beiden einfach nur multiplizieren. Das wäre dann, also das wären dann $\mathbf{e_1}$ mal $\mathbf{e_0}$, also als Matrizenmultiplikation wären das dann $\mathbf{e_1 e_0}$, also …“

Zürich – abends

Doch rechnen, das kann Mileva viel besser als Albert. Und das macht sie auch gleich: „Warte mal, im Falkschen Schema ist $\mathbf{e_1 e_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ doch ganz einfach …“

Und sie schreibt:

$$
\begin{array}{cc|cc}
 & & 0 & 1 \\
 & & -1 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 1 & 0
\end{array}
$$

Zürich – abends

Albert: „Perfekt! Also entspricht die vierte Matrix, die Du Dir gemerkt hast, tatsächlich unserem Basis-Bivektor.“

Mileva: „Ja, das Produkt zeigt es eindeutig: $\mathbf{e_1 e_0}$ ist in Matrizenform:

$$\mathbf{e_1 e_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist das unser fehlender Basis-Bivektor.“

Zürich – abends

Und Albert ergänzt seine Übersicht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \qquad \rightarrow \text{ Basisskalar}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1} \qquad \rightarrow \text{ Basisvektor}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_0} \qquad \rightarrow \text{ noch ein Basisvektor}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1 e_0} \qquad \rightarrow \text{ Basis-Bivektor}$$

Zürich – abends

Und Albert ergänzt seine Übersicht:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \mathbf{1} \qquad \rightarrow \text{ Basisskalar}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \mathbf{e_1} \qquad \rightarrow \text{ Basisvektor}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \mathbf{e_0} \qquad \rightarrow \text{ noch ein Basisvektor}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \mathbf{e_1 e_0} \qquad \rightarrow \text{ Basis-Bivektor}$$

Und jetzt haben Mileva und Albert endlich Zeit, sich um das Mündliche zu kümmern.

Zürich – am nächsten Morgen

Am nächsten Morgen, Busserl, Schatzerl, Busserl, und Albert fragt: „Und was machen wir heute, ganz ohne die Mathe-Vorlesung von King Kowski???

Mileva: „Ach, sei doch nicht so modern. Englisch reden die doch erst in hundert Jahren!“

Albert: „Dann also was altertümlich Romantisches! Die alten Griechen! Nehmen wir doch den Pythagoras und den Euklid und probieren den mit King Kowskis Matrizen aus!“

Zürich – am nächsten Morgen

Mileva: „Und wie soll das gehen? Pythagoras und Euklid mit den Matrizen vom Minkowski zusammenzubringen?“

Albert: „Na im Internet, da habe ich …“

Mileva: „Internet, was ist das?“

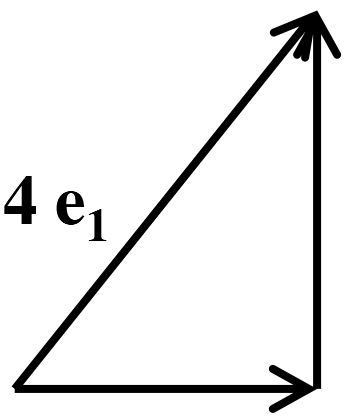
Albert: „Äh, pardon, im Internat, da habe ich …“

Mileva: „Aber du warst doch gar nicht im Internat!“

Albert: „Ach Schatzerl, lenk‘ doch jetzt nicht ab!“

Zürich – am nächsten Morgen

Albert: „Ach Schatzerl, lenk‘ doch jetzt nicht ab! Wir nehmen einfach das folgende Dreieck …



$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{5}\,\mathbf{e}_{\mathbf{0}} + \mathbf{4}\,\mathbf{e}_{\mathbf{1}}$

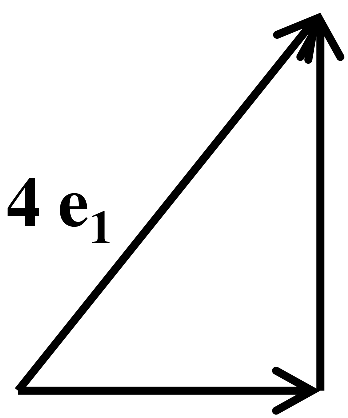
$\mathbf{b} = \mathbf{5}\,\mathbf{e}_{\mathbf{0}}$

$\mathbf{a} = \mathbf{4}\,\mathbf{e}_{\mathbf{1}}$

… und rechnen damit den Pythagoras nach – mit den Basisvektoren, die wir gestern abend aufgeschrieben haben!“

Zürich – am nächsten Morgen

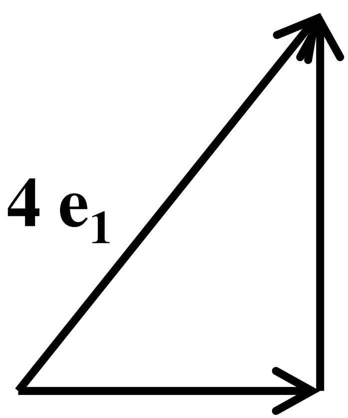
Mileva: „Also die $\mathbf{e}_1$-Richtung, die zeigt nach rechts, so wie bei einer x-Achse.“



Albert: „Ja, und die die $\mathbf{e}_0$-Richtung, die zeigt nach oben. Irgendwohin muss sie ja zeigen.“

Zürich – am nächsten Morgen

Mileva: „Na das ist dann doch einfach. Da müssen wir doch einfach nur quadrieren!“



Und schon rechnet Mileva los …

Und schon rechnet Mileva

Seiten-
vektoren:

$$\mathbf{a} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} + \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

Und schon rechnet Mileva

Seiten-
vektoren:

$$\mathbf{a} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} + \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a}^2$		4	0
		0	– 4
4	0	16	0
0	– 4	0	16

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{16}$$

Und schon rechnet Mileva

Seiten-vektoren: $\mathbf{a} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbf{a}^2 = \mathbf{16} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

$\mathbf{b} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{c} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} + \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

$\mathbf{b}^2$		0	5
		– 5	0
0	5	– 25	0
– 5	0	0	– 25

$\Rightarrow \quad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} -25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}$

$= -\,\mathbf{25}$

Und schon rechnet Mileva

Seiten-
vektoren:

$$\mathbf{a} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^2 = \mathbf{16} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}^2 = -\ \mathbf{25} = \begin{pmatrix} -25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} + \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{c}^2$		4	5
		– 5	– 4
4	5	– 9	0
– 5	– 4	0	– 9

$$\Rightarrow \quad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$= -\ \mathbf{9}$$

Und schon rechnet Mileva

Seiten-vektoren:

$$\mathbf{a} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^2 = \mathbf{16} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}^2 = -\ \mathbf{25} = \begin{pmatrix} -25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} + \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}^2 = -\ \mathbf{9} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Mileva: „Sieht doch gut aus!“

Und schon rechnet Mileva

Seiten-vektoren:

$$\mathbf{a} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^2 = \mathbf{16} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}^2 = -\ \mathbf{25} = \begin{pmatrix} -25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} + \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}^2 = -\ \mathbf{9} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Mileva: „Sieht doch gut aus!“

Albert: „Und vor allem passt alles!“

Mileva: „Ja, der Pythagoras stimmt! Es gilt wieder …“

Der relativistische Pythagoras

Seiten-
vektoren:

$$\mathbf{a} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^2 = \mathbf{16} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}^2 = -\ \mathbf{25} = \begin{pmatrix} -25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} + \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}^2 = -\ \mathbf{9} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Mileva: „Ja, der Pythagoras stimmt! Es gilt wieder:

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{16} - \mathbf{25}$$

$$= -\ \mathbf{9}$$

$$= \mathbf{c}^2$$

Der relativistische Pythagoras

Seiten-vektoren:

$$\mathbf{a} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^2 = \mathbf{16} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}^2 = -\ \mathbf{25} = \begin{pmatrix} -25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} + \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}^2 = -\ \mathbf{9} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Mileva: „Ja, der Pythagoras stimmt! Es gilt wieder:

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{16} - \mathbf{25} = -\ \mathbf{9} = \mathbf{c}^2$$

“

Albert: „Nur eins ist komisch.“

Mileva: „Hmm, ja, seltsam, manche Quadrate sind negativ!“

Der relativistische Pythagoras

Mileva: „Obwohl der Pythagoras ganz klar stimmt! Es gilt auf jeden Fall wieder:

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{16} - \mathbf{25} = -\mathbf{9} = \mathbf{c}^2$$ “

Albert: „Komisch ist es trotzdem. Und das hat der Minkowski wirklich so an der Tafel gehabt?“

Mileva: „So genau erinner‘ ich mich da nicht mehr. Das kann ich nicht so hundertprozentig sagen, ob es ganz genau so an der Tafel stand.“

Albert: „Da haben wir doch hier tatsächlich einen Basisvektor, der positiv quadriert, nämlich $\mathbf{e_1}^2 = \mathbf{1}$ …“

Der relativistische Pythagoras

Mileva: „… und einen anderen Basisvektor, der negativ quadriert, nämlich $\mathbf{e_0}^2 = -\mathbf{1}$.“

Und sie überprüft das schnell:

$\mathbf{e_1}^2$		1	0
		0	– 1
1	0	1	0
0	– 1	0	1

$\mathbf{e_0}^2$		0	1
		– 1	0
0	1	– 1	0
– 1	0	0	– 1

Der relativistische Pythagoras

Mileva: „Klar wie Kloßbrühe, mathematisch nahtlos bewiesen: $\mathbf{e_1}^2 = \mathbf{1}$ und $\mathbf{e_0}^2 = -\mathbf{1}$ stimmen.“

Albert: „Und deshalb haben wir hier ein ganz komisches rechtwinkliges Dreieck.“

Mileva: „Wir haben hier ein Dreieck, bei dem die Hypotenuse kürzer ist als die beiden Katheten!“

Albert: „Ja, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{16}$. Der Kathetenvektor **a** ist damit 4 reelle Seiteneinheiten lang.
Und der Kathetenvektor **b** ist wegen $\mathbf{b}^2 = -\mathbf{25}$ jetzt 5 imaginäre Seiteneinheiten lang.“

Der relativistische Pythagoras

Und Albert wiederholt: „$\mathbf{a}^2 = \mathbf{16}$. Der Kathetenvektor **a** ist damit 4 reelle Seiteneinheiten lang.
Und der Kathetenvektor **b** ist wegen $\mathbf{b}^2 = -\mathbf{25}$ jetzt 5 imaginäre Seiteneinheiten lang."

Mileva: „Aber beim Hypotenusenvektor kam $\mathbf{c}^2 = -\mathbf{9}$ raus. Das heißt, er ist nur 3 imaginäre Seiteneinheiten lang. Und das ist viel kürzer als bei den anderen Seiten."

Albert: „Viel, viel kürzer!"

Mileva: „Und viel, viel seltsamer als beim Minkowski an der Tafel. Vielleicht sollten wie es ihm mal zeigen?"

Der relativistische Pythagoras

Albert: „Dem alten Kauz? Wenn wir das dem Minkowski zeigen, wird der doch gleich wieder so mystisch wie ein alter Grieche. Der Minkowski schwafelt doch sowieso dauernd vom ollen Platon und seinem Höhlengleichnis."

Mileva: „Ja, erst neulich als Du mir wieder Briefchen geschrieben hast, hat er losgenuschelt: Der Platon in seiner Höhle, der sieht die Welt nicht, sondern nur die Schatten der Welt da draußen vor der Höhle."

Das gefällt dem Albert und er fängt an, den Minkowski nachzumachen, sehr pathetisch nachzuahmen …

Der relativistische Pythagoras

Das gefällt dem Albert und er fängt an, den Minkowski nachzumachen, sehr pathetisch nachzuahmen : M. H.! Emm Haahhh! Meine Herren! Ihre Tendenz ist eine radiakle! Und eine phänomenale! Von Stund‘ an sollen alle völlig zu Schatten herabsinken! Werden wir dem Schatten winken!“

Hier winkt Albert jetzt ganz pathetisch (und Mileva lacht): „Nur noch eine Art Union – wer weiß das schon – soll Selbständigkeit bewahren und wir werden nach Cöln fahren! Und eine prästabilisierte Harmonie, die kommet weder heute noch nie!“

Und jetzt kann Mileva kaum noch aufhören zu lachen!

Der relativistische Pythagoras

Und jetzt kann Mileva kaum noch aufhören zu lachen und sie schnappt nach Luft: „Ja, ah, ah, lass uns unsere, ah, ah, komischen Matrizen mal dem Minkowski zeigen. Mal schauen, was er so sagt!“

Albert: „Und ich sag‘ Dir was: der Minkowski wird wirklich so eine Rede halten. Und alle werden sie andächtig anhören und abdrucken in vielen, vielen Büchern. Und in dieser Rede wird der Minkowski sagen, dass der Einstein nicht nur Kartoffeln schält, sondern wahre Kerne schält. Doxerl, hast du mich schon mal Kerne schälten gesehen?“

Der relativistische Pythagoras

Einstein hat natürlich recht. Die Rede von Minkowski kann man nachlesen in:

Hendrik Antoon Lorentz, Albert Einstein, Hermann Minkowski: Das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung von Abhandlungen. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, Berlin 1913.

Dort ist die Rede auf den Seiten 56 – 68 abgedruckt.

Der relativistische Pythagoras

Und weil die Rede vom Prof. Minkowski wirklich, wirklich lustig ist (aber keiner hat gelacht damals, alle haben nur andächtig gelauscht und hinterher ganz toll geklatscht), wurde sie tatsächlich ganz oft nachgedruckt, beispielsweise relativ neu in:

Wolfgang Trageser (Hrsg.): Das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung von Originalarbeiten zur Relativitätstheorie Einsteins. 2. Auflage, Springer Spektrum / Springer Nature 2018.

Zürich – nachmittags

Am Nachmittag gehen Albert und Mileva dann wirklich zu Prof. Minkowski an die ETH und zeigen ihm ihre Rechnungen.

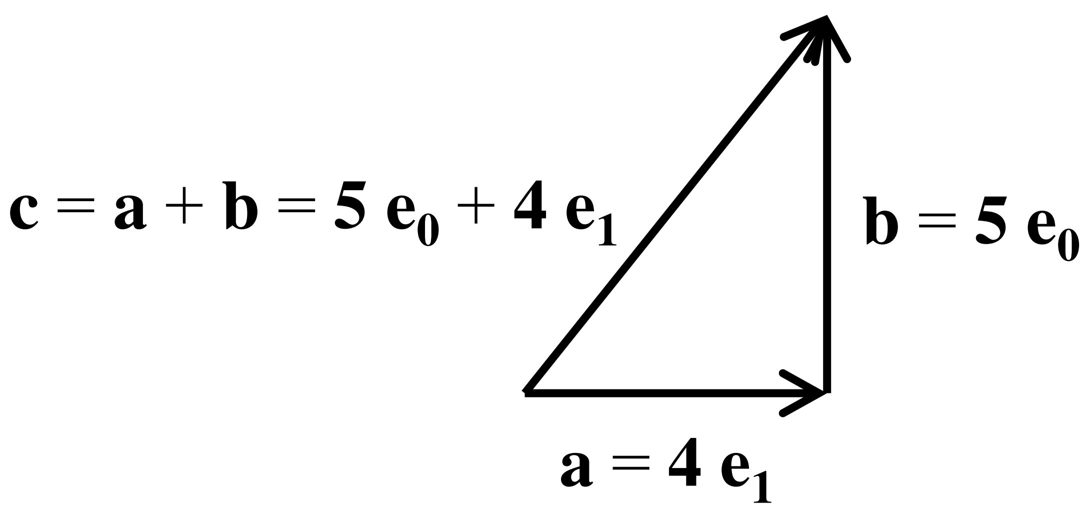
Doch Prof. Minkowski hat keine Zeit (Besprechungen, lauter Besprechungen, herrje!) und meint nur: „Soso, der Einstein und die Marić, jetzt drehen Sie mal Ihr Dreieck um 30° und rechnen dann alles noch mal nach. Uf Wiiderlugge, drrr Herr, uf Wiiderlugge, die Dame!“

Und schon ist Minkowski weg und setzt sich in seine siebte Besprechung am heutigen Tag.

Zürich – wieder zuhause bei Albert und Mileva

Zurück in ihrer Studentenbude fangen Albert und Mileva gleich an zu rechnen.

Albert: „Also als erstes drehen wir unser Dreieck um 30°. Das Dreieck sah ja so aus …“

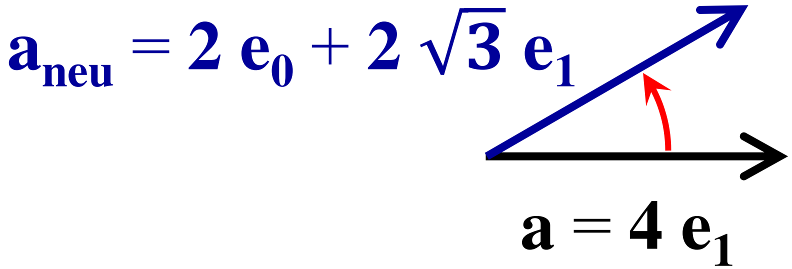


Zürich – wieder zuhause bei Albert und Mileva

Und Mileva meint: „Wir brauchen also die trigonometrischen Funktionen:

$$\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad \sin 30° = \frac{1}{2}$$

Aus dem alten $\mathbf{a} = 4\,\mathbf{e}_1$ wird also der neue Seitenvektor $\mathbf{a}_{neu} = 2\,\mathbf{e}_0 + 2\sqrt{3}\,\mathbf{e}_1$"



Warning: Do not believe in red arrows!

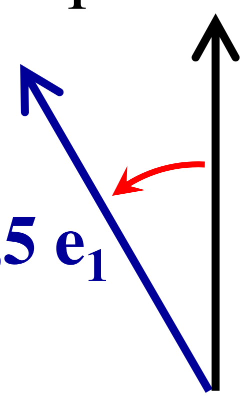
Zürich – wieder zuhause bei Albert und Mileva

Und Albert ergänzt: „Mit

$$\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad\qquad \sin 30° = \frac{1}{2}$$

wird aus dem alten $\mathbf{b} = 5\,\mathbf{e_0}$ dann der neue Seitenvektor $\mathbf{b_{neu}} = 2{,}5\,\sqrt{3}\,\mathbf{e_0} - 2{,}5\,\mathbf{e_1}$“

$$\mathbf{b_{neu}} = 2{,}5\,\sqrt{3}\,\mathbf{e_0} - 2{,}5\,\mathbf{e_1}$$



$$\mathbf{b} = 5\,\mathbf{e_0}$$

Warning: Do not believe in red arrows!

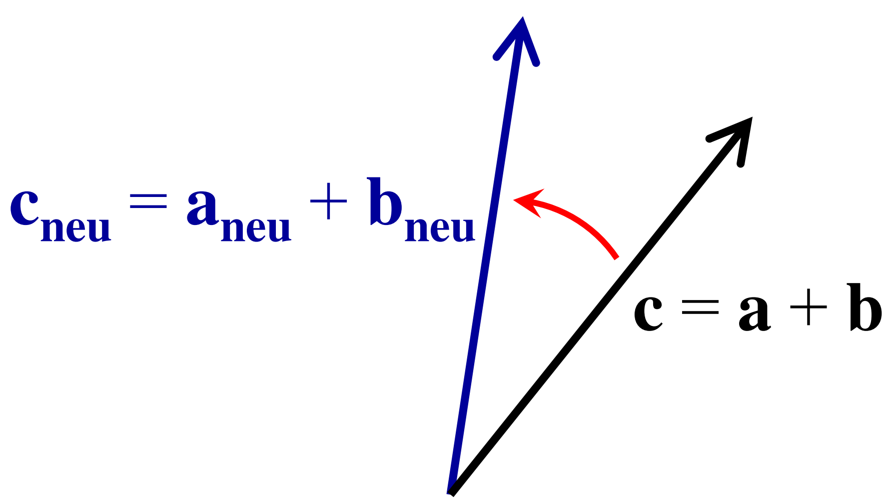
Zürich – wieder zuhause bei Albert und Mileva

Mileva: „Und der neue Seitenvektor $\mathbf{c}_{\mathbf{neu}}$ ist dann einfach die Summe aus $\mathbf{a}_{\mathbf{neu}}$ und $\mathbf{b}_{\mathbf{neu}}$."

Und sie rechnet: $\mathbf{c}_{\mathbf{neu}} = \mathbf{a}_{\mathbf{neu}} + \mathbf{b}_{\mathbf{neu}}$

$$= \mathbf{2\,e_0 + 2\sqrt{3}\,e_1 + 2{,}5\sqrt{3}\,e_0 - 2{,}5\,e_1}$$

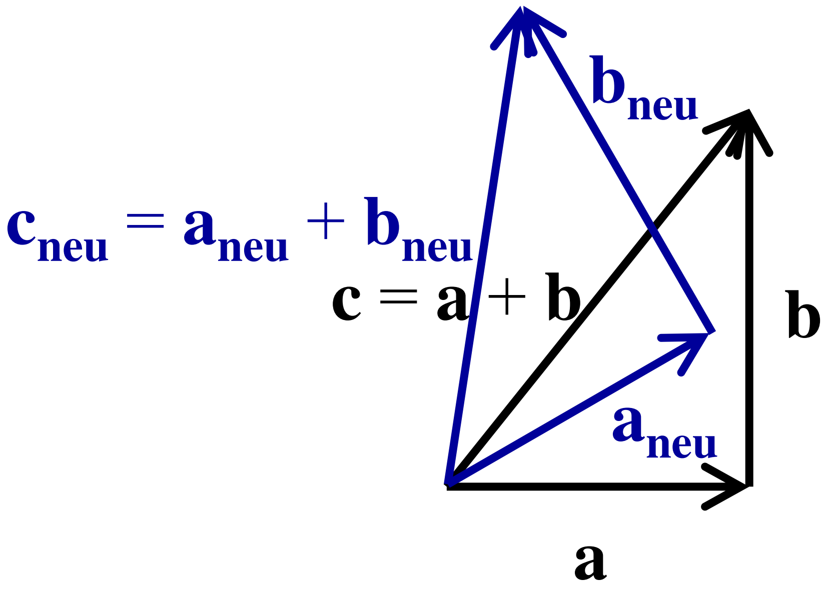
$$= \mathbf{(2 + 2{,}5\sqrt{3})\,e_0 + (-\,2{,}5 + 2\sqrt{3})\,e_1}$$



Warning: Do not believe in red arrows!

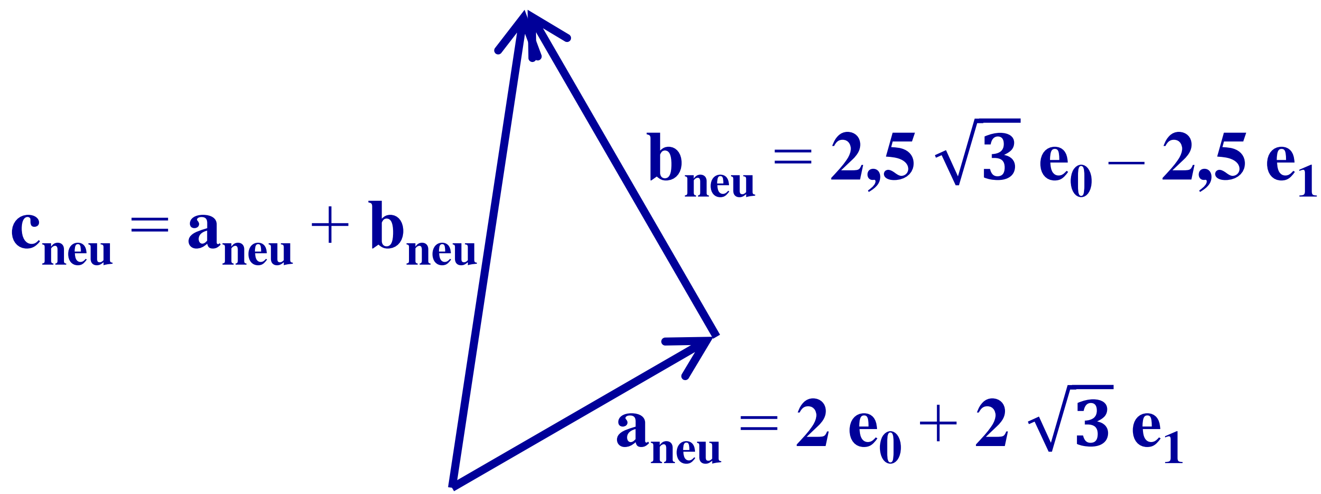
Zürich – wieder zuhause bei Albert und Mileva

Albert: „Und setzt man dann alles zusammen, sieht das so aus …“



Zürich – wieder zuhause bei Albert und Mileva

Albert: „Und setzt man dann alles zusammen, sieht das so aus …“



Mileva: „Na, dann rechnen wir mal wieder los!“

Und schon rechnet Mileva

Seiten-vektoren:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{neu}} = \mathbf{2}\ \mathbf{e}_{\mathbf{0}} + \mathbf{2}\ \sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e}_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 2 \\ -2 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{neu}} = \mathbf{2{,}5}\ \sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e}_{\mathbf{0}} - \mathbf{2{,}5}\ \mathbf{e}_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} -2{,}5 & 2{,}5\sqrt{3} \\ -2{,}5\sqrt{3} & 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_{\mathbf{neu}} = (\mathbf{2} + \mathbf{2{,}5}\ \sqrt{\mathbf{3}}\ )\ \mathbf{e}_{\mathbf{0}} + (-\ \mathbf{2{,}5} + \mathbf{2}\ \sqrt{\mathbf{3}})\ \mathbf{e}_{\mathbf{1}}$$

$$= \begin{pmatrix} -2{,}5 + 2\sqrt{3} & 2 + 2{,}5\sqrt{3} \\ -2 - 2{,}5\sqrt{3} & 2{,}5 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Und schon rechnet Mileva

Seiten-
vektoren: $\mathbf{a_{neu}} = \mathbf{2\ e_0} + \mathbf{2\ \sqrt{3}\ e_1} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 2 \\ -2 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a_{neu}}^2 = \mathbf{8} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc}
\mathbf{a_{neu}}^2 & & 2\sqrt{3} & 2 \\
 & & -2 & -2\sqrt{3} \\
\hline
2\sqrt{3} & 2 & 8 & 0 \\
-2 & -2\sqrt{3} & 0 & 8
\end{array}$$

Und schon rechnet Mileva

Seiten-vektoren: $\mathbf{b_{neu}} = \mathbf{2{,}5\,\sqrt{3}\,e_0} - \mathbf{2{,}5\,e_1} = \begin{pmatrix} -2{,}5 & 2{,}5\sqrt{3} \\ -2{,}5\sqrt{3} & 2{,}5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{b_{neu}}^2 = -\,\mathbf{12{,}5} = \begin{pmatrix} -12{,}5 & 0 \\ 0 & -12{,}5 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{b_{neu}}^2$		$-2{,}5$	$2{,}5\sqrt{3}$
		$-2{,}5\sqrt{3}$	$2{,}5$
$-2{,}5$	$2{,}5\sqrt{3}$	$-12{,}5$	0
$-2{,}5\sqrt{3}$	$2{,}5$	0	$-12{,}5$

Und schon rechnet Mileva

Seiten-vektoren:

$$\mathbf{c_{neu}} = (\mathbf{2} + \mathbf{2{,}5}\,\sqrt{\mathbf{3}})\ \mathbf{e_0} + (-\ \mathbf{2{,}5} + \mathbf{2}\,\sqrt{\mathbf{3}})\ \mathbf{e_1}$$

$$= \begin{pmatrix} -2{,}5 + 2\sqrt{3} & 2 + 2{,}5\sqrt{3} \\ -2 - 2{,}5\sqrt{3} & 2{,}5 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{c_{neu}}^2 = -\ \mathbf{4{,}5} - \mathbf{20}\sqrt{\mathbf{3}} = \begin{pmatrix} -4{,}5 - 20\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -4{,}5 - 20\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{c_{neu}}^2$		$-2{,}5 + 2\sqrt{3}$	$2 + 2{,}5\sqrt{3}$
		$-2 - 2{,}5\sqrt{3}$	$2{,}5 - 2\sqrt{3}$
$-2{,}5 + 2\sqrt{3}$	$2 + 2{,}5\sqrt{3}$	$-4{,}5 - 20\sqrt{3}$	0
$-2 - 2{,}5\sqrt{3}$	$2{,}5 - 2\sqrt{3}$	0	$-4{,}5 - 20\sqrt{3}$

Und schon rechnet Mileva

Seitenvektoren: $\mathbf{a_{neu}} = \mathbf{2\ e_0} + \mathbf{2\sqrt{3}\ e_1}$

$\mathbf{b_{neu}} = \mathbf{2{,}5\sqrt{3}\ e_0} - \mathbf{2{,}5\ e_1}$

$\mathbf{c_{neu}} = (\mathbf{2} + \mathbf{2{,}5\sqrt{3}}\ )\ \mathbf{e_0} + (-\ \mathbf{2{,}5} + \mathbf{2\sqrt{3}})\ \mathbf{e_1}$

Quadrate:

$$\mathbf{a_{neu}}^2 = \mathbf{8} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b_{neu}}^2 = -\ \mathbf{12{,}5} = \begin{pmatrix} -12{,}5 & 0 \\ 0 & -12{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c_{neu}}^2 = -\ \mathbf{4{,}5} - \mathbf{20\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} -4{,}5 - 20\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -4{,}5 - 20\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Und schon rechnet Mileva

Seitenvektoren: $\mathbf{a_{neu}} = \mathbf{2\ e_0 + 2\sqrt{3}\ e_1}$

$\mathbf{b_{neu}} = \mathbf{2{,}5\sqrt{3}\ e_0} - \mathbf{2{,}5\ e_1}$

$\mathbf{c_{neu}} = (\mathbf{2} + \mathbf{2{,}5\sqrt{3}}\ )\ \mathbf{e_0} + (-\ \mathbf{2{,}5} + \mathbf{2\sqrt{3}})\ \mathbf{e_1}$

Quadrate:

$$\mathbf{a_{neu}}^2 = \mathbf{8} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b_{neu}}^2 = -\ \mathbf{12{,}5} = \begin{pmatrix} -12{,}5 & 0 \\ 0 & -12{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c_{neu}}^2 = -\ \mathbf{4{,}5} - \mathbf{20\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} -4{,}5 - 20\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -4{,}5 - 20\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Und Albert mosert: „Da hast Du Dich doch sicher verrechnet. Die Summen stimmen doch nicht!“

Und schon rechnet Mileva

Seitenvektoren: $\mathbf{a}_{\mathbf{neu}} = \mathbf{2}\ \mathbf{e}_0 + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e}_1$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{neu}} = \mathbf{2{,}5}\sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e}_0 - \mathbf{2{,}5}\ \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{c}_{\mathbf{neu}} = (\mathbf{2} + \mathbf{2{,}5}\sqrt{\mathbf{3}}\ )\ \mathbf{e}_0 + (-\ \mathbf{2{,}5} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}})\ \mathbf{e}_1$$

Quadrate:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{neu}}{}^2 = \mathbf{8} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{neu}}{}^2 = -\ \mathbf{12{,}5} = \begin{pmatrix} -12{,}5 & 0 \\ 0 & -12{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_{\mathbf{neu}}{}^2 = -\ \mathbf{4{,}5} - \mathbf{20}\sqrt{\mathbf{3}} = \begin{pmatrix} -4{,}5 - 20\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -4{,}5 - 20\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Und auch Mileva ist zerknirscht: „Ja, $\mathbf{a}_{\mathbf{neu}}{}^2 + \mathbf{b}_{\mathbf{neu}}{}^2$ gibt jetzt nicht mehr $\mathbf{c}_{\mathbf{neu}}{}^2$.“

Und jetzt rechnet Albert

Albert: „Ich rechne das am Besten mal nach. Bei den Basisvektoren haben wir doch immer eine Anti-Kommutativität, da sie senkrecht zueinander stehen:

$$\mathbf{e_1 e_0} = -\,\mathbf{e_0 e_1}$$

Und außerdem kennen wir deren seltsame Normierung:

$$\mathbf{e_0}^2 = -\,\mathbf{1} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{e_1}^2 = \mathbf{1}$$

Damit kann man doch alles leicht nachrechnen."

Und jetzt rechnet Albert

Seitenvektoren: $\mathbf{a_{neu}} = \mathbf{2\ e_0} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e_1}$

$\mathbf{b_{neu}} = \mathbf{2{,}5}\sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e_0} - \mathbf{2{,}5\ e_1}$

$\mathbf{c_{neu}} = (\mathbf{2} + \mathbf{2{,}5}\sqrt{\mathbf{3}}\ )\ \mathbf{e_0} + (-\ \mathbf{2{,}5} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}})\ \mathbf{e_1}$

Quadrate:

$$\mathbf{a_{neu}}^2 = (\mathbf{2\ e_0} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e_1})^2$$

$$= \mathbf{4\ e_0}^2 + \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e_0e_1} + \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e_1e_0} + \mathbf{12\ e_1}^2$$

$$= \mathbf{4}\ (-\ \mathbf{1}) + \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e_0e_1} - \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e_0e_1} + \mathbf{12}\ (\mathbf{1})$$

$$= -\ \mathbf{4} + \mathbf{12} = \mathbf{8}$$

Albert: „Das ist tatsächlich Dein Ergebnis! Es ist voll und ganz richtig!“

Und jetzt rechnet Albert

Seitenvektoren: $\mathbf{a}_{\mathbf{neu}} = \mathbf{2\ e_0 + 2\sqrt{3}\ e_1}$

$\mathbf{b}_{\mathbf{neu}} = \mathbf{2{,}5\sqrt{3}\ e_0 - 2{,}5\ e_1}$

$\mathbf{c}_{\mathbf{neu}} = \mathbf{(2 + 2{,}5\sqrt{3}\ )\ e_0 + (-\ 2{,}5 + 2\sqrt{3})\ e_1}$

Quadrate:

$$\mathbf{b}_{\mathbf{neu}}{}^2 = \mathbf{(2{,}5\sqrt{3}\ e_0 - 2{,}5\ e_1)}^2$$

$$= \mathbf{18{,}75\ e_0{}^2 + 6{,}25\sqrt{3}\ e_0e_1 + 6{,}25\sqrt{3}\ e_1e_0 + 6{,}25\ e_1{}^2}$$

$$= \mathbf{18{,}75\ (-\ 1) + 6{,}25\sqrt{3}\ e_0e_1 - 6{,}25\sqrt{3}\ e_0e_1 + 6{,}25\ (1)}$$

$$= -\ \mathbf{18{,}75 + 6{,}25 = -\ 12{,}5}$$

Albert: „Auch Dein zweites Ergebnis ist richtig! Kongratulationen!!“

Und jetzt rechnet Albert

Seitenvektoren: $\mathbf{a_{neu} = 2\ e_0 + 2\sqrt{3}\ e_1}$

$\mathbf{b_{neu} = 2{,}5\sqrt{3}\ e_0 - 2{,}5\ e_1}$

$\mathbf{c_{neu} = (2 + 2{,}5\sqrt{3}\ )\ e_0 + (-\ 2{,}5 + 2\sqrt{3})\ e_1}$

Quadrate:

$$\mathbf{c_{neu}}^2 = \mathbf{((2 + 2{,}5\sqrt{3}\ )\ e_0 + (-\ 2{,}5 + 2\sqrt{3})\ e_1)^2}$$

$$= \mathbf{(4 + 10\sqrt{3} + 18{,}75)\ e_0}^2 + \mathbf{(6{,}25 - 10\sqrt{3} + 12)\ e_1}^2$$

$$= -\ \mathbf{4 - 10\sqrt{3} - 18{,}75 + 6{,}25 - 10\sqrt{3} + 12}$$

$$= -\ \mathbf{4{,}5 - 20\sqrt{3}}$$

Albert: „Sapperlott, auch das drittte Ergebnis ist richtig! Da haben wir jetzt aber ein Problem!“

Zusammenfassung

Quadrate: $\mathbf{a_{neu}}^2 = \mathbf{8}$

$\mathbf{b_{neu}}^2 = -\ \mathbf{12{,}5}$

$\mathbf{c_{neu}}^2 = -\ \mathbf{4{,}5} - \mathbf{20\sqrt{3}}$

Mileva: „Ja, ein gewaltiges Problem: Der Satz des Pythagoras gilt auf einmal nicht mehr! Denn wir haben ja:

$$\mathbf{a_{neu}}^2 + \mathbf{b_{neu}}^2 = \mathbf{8} - \mathbf{12{,}5} = -\ \mathbf{4{,}5} \neq -\ \mathbf{4{,}5} - \mathbf{20\sqrt{3}} = \mathbf{c_{neu}}^2$$

Unser $\mathbf{c_{neu}}^2$ ist zu klein. Da sind 20 mal Wurzel drei zu wenig da!"

Zusammenfassung

Albert: „Der Satz des Pythagoras gilt auf einmal nicht mehr? Doxerl, mein Doxerl, du bist genial!“

Mileva: „Weil ich sage, dass der Satz des Pythagoras falsch ist?“

Albert: „Aber das hast Du doch gar nicht gesagt! Du sagtest, der Satz des Pythagoras gilt nicht mehr! Das ist etwas ganz andres! Der Satz des Pythagoras gilt nicht deshalb nicht mehr, weil er falsch ist. Sondern er gilt nicht mehr, weil seine Voraussetzungen nicht erfüllt sind!“

Der Satz des Pythagoras gilt nicht mehr!

Mileva: „Welche Vorraussetzungen denn?“

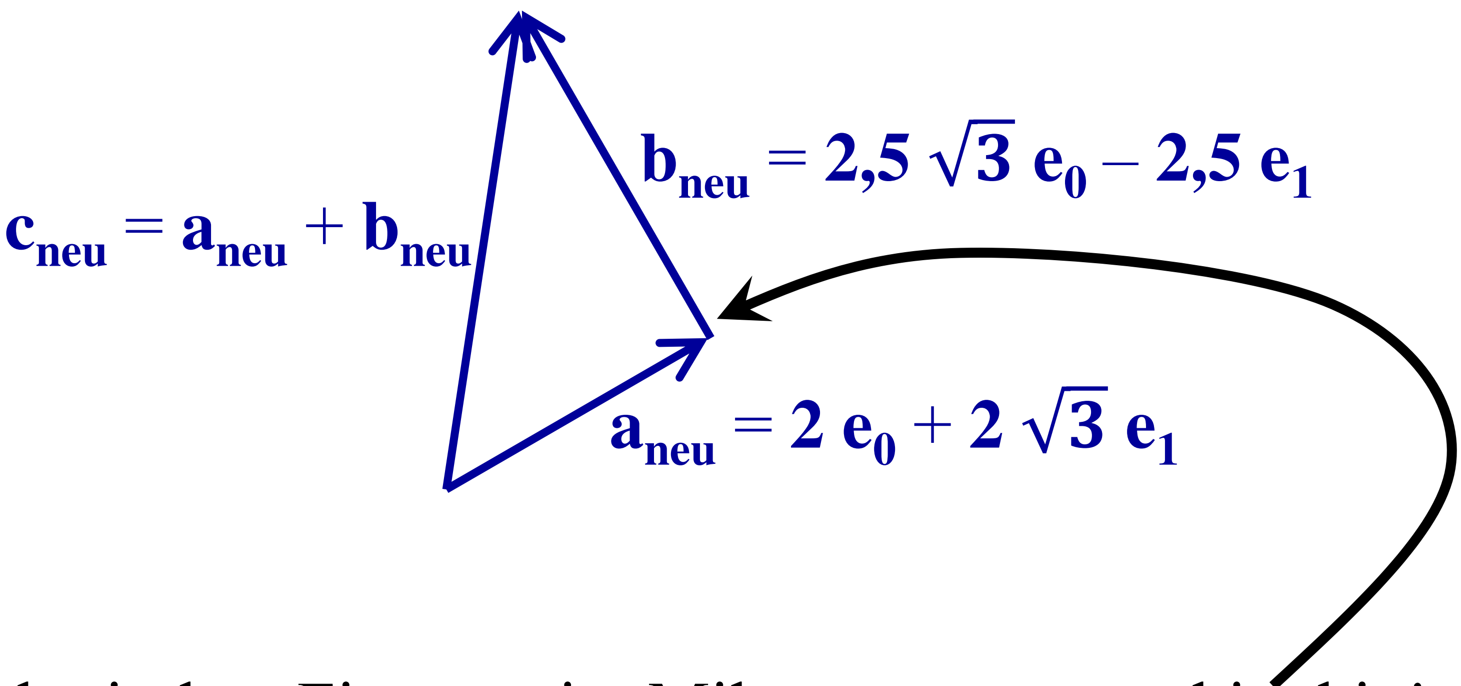
Albert: „Na der Pythagoras gilt doch nur für recht-winklige Dreiecke. Das ist die Voraussetzung für $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$. Und dann ist halt unser Dreieck eben nicht rechtwinklig.“

Mileva: „Aber wir haben es doch rechtwinklig ge-zeichnet. Es sieht doch rechtwinklig aus! Und zwar so sieht es aus …“

Und sie zeigt noch einmal auf die Skizze von vorhin.

Der Satz des Pythagoras gilt nicht mehr!

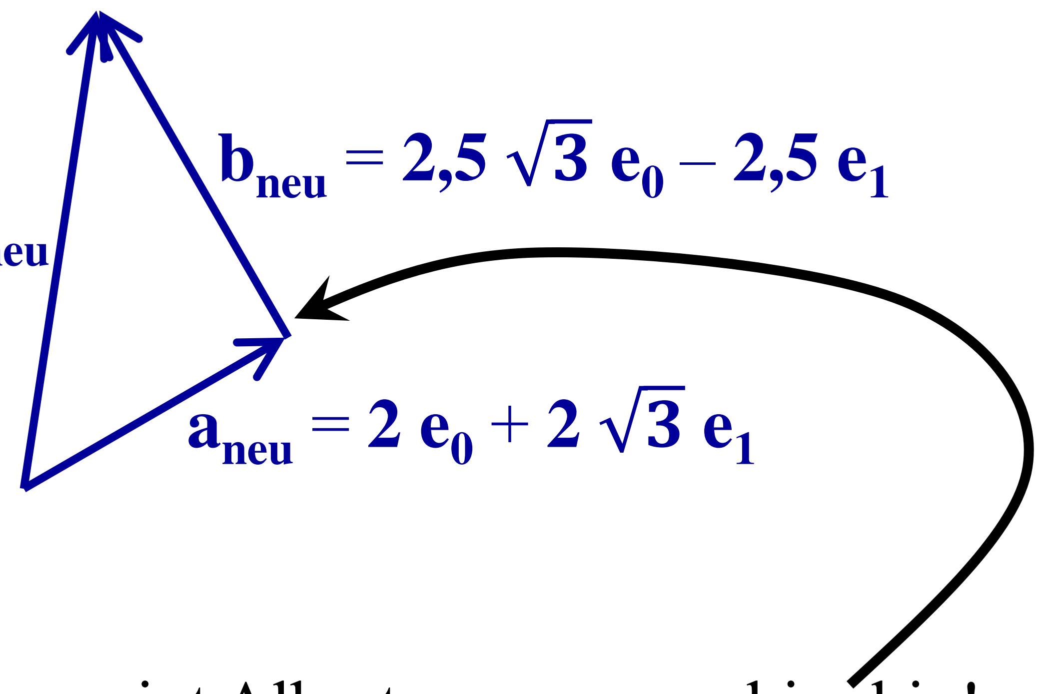
Mileva: „Hier rechts, das ist doch ganz eindeutig ein rechter Winkel!“



Und mit dem Finger zeigt Mileva ganz genau hier hin!

Der Satz des Pythagoras gilt nicht mehr!

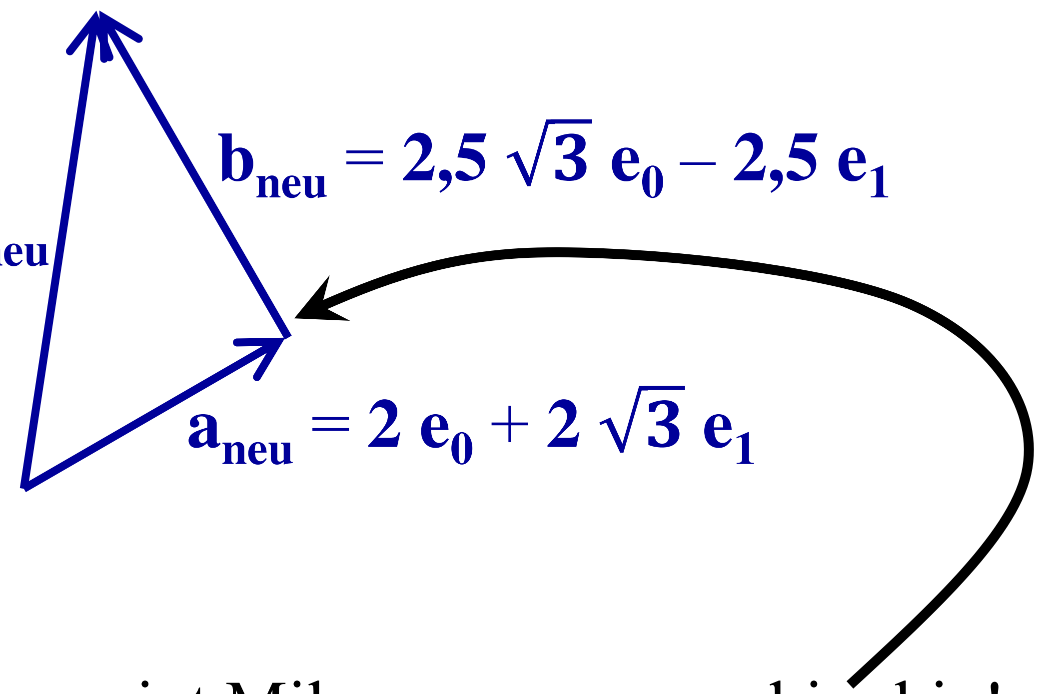
Albert: „Aber vielleicht ist das hier ja gar kein rechter Winkel!“



Und mit dem Finger zeigt Albert ganz genau hier hin!

Der Satz des Pythagoras gilt nicht mehr!

Mileva: „Aber ich sehe doch, dass das ganz genau ein rechter Winkel ist!“



$$\mathbf{b}_{neu} = 2{,}5\sqrt{3}\,\mathbf{e}_0 - 2{,}5\,\mathbf{e}_1$$

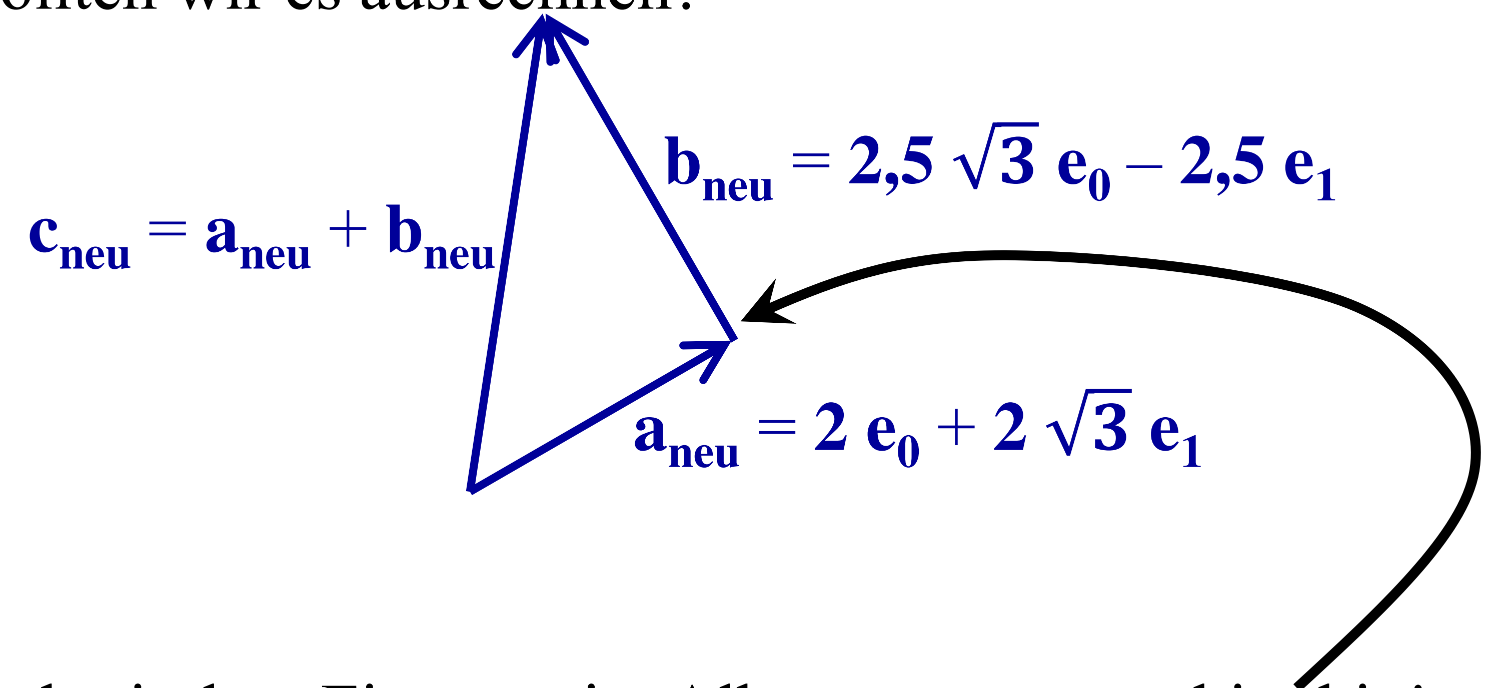
$$\mathbf{c}_{neu} = \mathbf{a}_{neu} + \mathbf{b}_{neu}$$

$$\mathbf{a}_{neu} = 2\,\mathbf{e}_0 + 2\sqrt{3}\,\mathbf{e}_1$$

Und mit dem Finger zeigt Mileva ganz genau hier hin!

Der Satz des Pythagoras gilt nicht mehr!

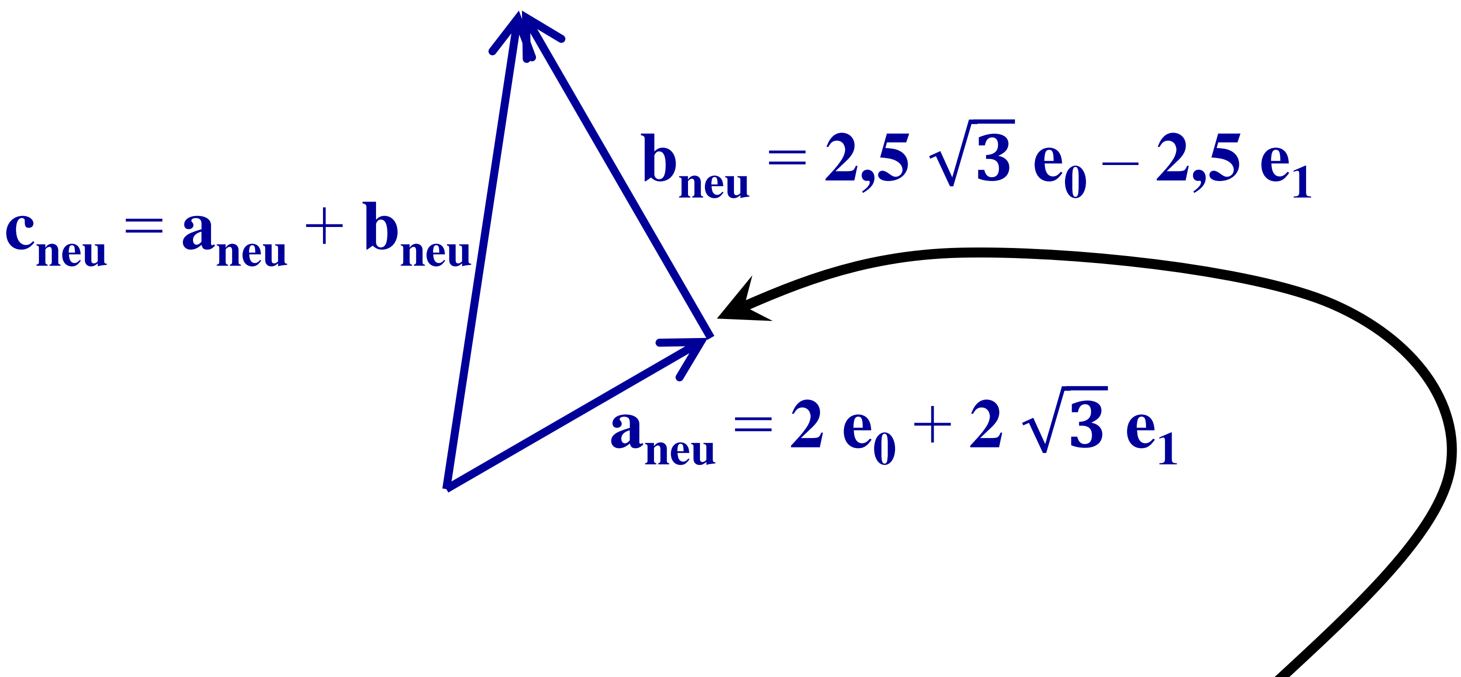
Albert: „Aber vielleicht kann man am Aussehen gar nicht erkennen, ob das hier ein rechter Winkel ist. Vielleicht sollten wir es ausrechnen?“



Und mit dem Finger zeigt Albert ganz genau hier hin!

Der Satz des Pythagoras gilt nicht mehr!

Mileva: „Und wie willst Du denn ausrechnen, ob das hier ein rechter Winkel ist?“



Und mit dem Finger zeigt Mileva ganz genau hier hin!

Der Satz des Pythagoras gilt nicht mehr!

Albert: „Na ganz einfach: Einen rechten Winkel haben wir doch immer dann, wenn das innere Produkt der beiden Vektoren, die den Winkel einschließen, genau Null ist.“

Mileva: „Hmm, und das äußere Produkt ist dann genaus so groß wie das Geometrische Produkt?“

Albert: „Ja, genau! Wie bei einem Rechteck! Da ist das Produkt $\mathbf{a}\,\mathbf{b}$ der beiden Seitenvektoren gleich der orientierten Fläche $\mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a}\,\mathbf{b}$. Und das innere Produkt der beiden Steinvektoren $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ist bei einem Rechteck immer Null!“

Der Satz des Pythagoras gilt!

Mileva: „Also bei unserem ersten Dreieck kann man das ja ganz leicht sehen. Das Produkt der beiden Vektoren $\mathbf{a} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ ist ja…“

a b			
		0	5
		– 5	0
4	0	0	20
0	– 4	20	0

b a			
		4	0
		0	– 4
0	5	0	– 20
– 5	0	– 20	0

Der Satz des Pythagoras gilt!

Mileva: „Also bei unserem ersten Dreieck kann man das ja ganz leicht sehen. Das Produkt der beiden Vektoren $\mathbf{a} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \mathbf{5}\ \mathbf{e_0} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ ist ja jetzt $\mathbf{a\ b} = \begin{pmatrix} 0 & 20 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b\ a} = \begin{pmatrix} 0 & -20 \\ -20 & 0 \end{pmatrix}$.

Und deshalb ist das innere Produkt:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{a\ b} + \mathbf{b\ a})$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{pmatrix} 0 & 20 - 20 \\ 20 - 20 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Hier stimmt also alles!
Das ist ein rechter Winkel.“

Der Satz des Pythagoras gilt? Oder etwa nicht?

Albert: „Und wie sieht es mit unseren neuen Seiten-vektoren

$$\mathbf{a}_{\mathbf{neu}} = \mathbf{2}\ \mathbf{e}_{\mathbf{0}} + \mathbf{2}\ \sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e}_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 2 \\ -2 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{neu}} = \mathbf{2{,}5}\ \sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e}_{\mathbf{0}} - \mathbf{2{,}5}\ \mathbf{e}_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} -2{,}5 & 2{,}5\sqrt{3} \\ -2{,}5\sqrt{3} & 2{,}5 \end{pmatrix}$$

aus?“

Und wieder muss Mileva rechnen!

Wieder muss Mileva rechnen

Seiten-
vektoren: $\mathbf{a_{neu}} = \mathbf{2\ e_0} + \mathbf{2\ \sqrt{3}\ e_1} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 2 \\ -2 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\mathbf{b_{neu}} = \mathbf{2{,}5\ \sqrt{3}\ e_0} - \mathbf{2{,}5\ e_1} = \begin{pmatrix} -2{,}5 & 2{,}5\sqrt{3} \\ -2{,}5\sqrt{3} & 2{,}5 \end{pmatrix}$

$\mathbf{a_{neu}\ b_{neu}}$		$-2{,}5$	$2{,}5\sqrt{3}$
		$-2{,}5\sqrt{3}$	$2{,}5$
$2\sqrt{3}$	2	$-10\sqrt{3}$	20
-2	$-2\sqrt{3}$	20	$-10\sqrt{3}$

Also:
$\mathbf{a_{neu}\ b_{neu}}$
$= -\mathbf{10\sqrt{3}} + \mathbf{20\ e_1 e_0}$
$= \begin{pmatrix} -10\sqrt{3} & 20 \\ 20 & -10\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Wieder muss Mileva rechnen

Seiten-
vektoren: $\mathbf{a}_{\mathbf{neu}} = \mathbf{2\ e_0} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 2 \\ -2 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{neu}} = \mathbf{2{,}5}\sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e_0} - \mathbf{2{,}5\ e_1} = \begin{pmatrix} -2{,}5 & 2{,}5\sqrt{3} \\ -2{,}5\sqrt{3} & 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{b}_{\mathbf{neu}}\,\mathbf{a}_{\mathbf{neu}}$		$2\sqrt{3}$	2
		-2	$-2\sqrt{3}$
$-2{,}5$	$2{,}5\sqrt{3}$	$-10\sqrt{3}$	-20
$-2{,}5\sqrt{3}$	$2{,}5$	-20	$-10\sqrt{3}$

Also:
$\mathbf{b}_{\mathbf{neu}}\,\mathbf{a}_{\mathbf{neu}}$

$$= -\mathbf{10}\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{20\ e_1 e_0}$$

$$= \begin{pmatrix} -10\sqrt{3} & -20 \\ -20 & -10\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Wieder muss Mileva rechnen

Zwischenergebnisse:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{neu}}\ \mathbf{b}_{\mathbf{neu}} = -\ \mathbf{10}\sqrt{\mathbf{3}} + \mathbf{20}\ \mathbf{e}_{\mathbf{1}}\mathbf{e}_{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} -10\sqrt{3} & 20 \\ 20 & -10\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{neu}}\ \mathbf{a}_{\mathbf{neu}} = -\ \mathbf{10}\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{20}\ \mathbf{e}_{\mathbf{1}}\mathbf{e}_{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} -10\sqrt{3} & -20 \\ -20 & -10\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Wieder muss Mileva rechnen

Zwischenergebnisse:

$$\mathbf{a_{neu}\, b_{neu}} = -\,\mathbf{10\sqrt{3} + 20\, e_1 e_0} = \begin{pmatrix} -10\sqrt{3} & 20 \\ 20 & -10\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b_{neu}\, a_{neu}} = -\,\mathbf{10\sqrt{3} - 20\, e_1 e_0} = \begin{pmatrix} -10\sqrt{3} & -20 \\ -20 & -10\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Inneres Produkt:

$$\mathbf{a_{neu} \bullet b_{neu}} = \mathbf{\frac{1}{2}}\,(\mathbf{a_{neu}\, b_{neu}} + \mathbf{b_{neu}\, a_{neu}}) = \mathbf{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -20\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -20\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -10\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -10\sqrt{3} \end{pmatrix} = -\,\mathbf{10\sqrt{3}}$$

Und jetzt staunt sie!

Mileva: „Tatsächlich, das innere Produkt ist nicht Null! Oder habe ich etwa einen Fehler gemacht?“

Albert: „Nein, da ist alles richtig, denn man hätte ja auch

$$\mathbf{a}_{\mathbf{neu}} \bullet \mathbf{b}_{\mathbf{neu}} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{\mathbf{neu}}\,\mathbf{b}_{\mathbf{neu}} + \mathbf{b}_{\mathbf{neu}}\,\mathbf{a}_{\mathbf{neu}})$$

$$= \frac{1}{2}((2\,\mathbf{e}_0 + 2\sqrt{3}\,\mathbf{e}_1)(2{,}5\sqrt{3}\,\mathbf{e}_0 - 2{,}5\,\mathbf{e}_1) + (2{,}5\sqrt{3}\,\mathbf{e}_0 - 2{,}5\,\mathbf{e}_1)(2\,\mathbf{e}_0 + 2\sqrt{3}\,\mathbf{e}_1))$$

$$= \frac{1}{2}(-10\sqrt{3} + 20\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_0 - 10\sqrt{3} - 20\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_0)$$

$$= -10\sqrt{3}$$

rechnen können. Da kommt das Gleiche raus!“

Und jetzt staunt sie!

Mileva: „Dann ist das innere Produkt ist nicht Null.“

Albert: „Und das Dreieck ist nicht rechtwinklig …“

Mileva: „Obwohl es so aussieht!“

Albert: „Aber es sieht nur so aus, mein Gödel-Knödel! Wenn wir ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, zeichnen wir kein rechtwinkliges Dreieck! Dafür will ich aber mal den Nobelpreis bekommen.“

Mileva: „Pustekuchen! Den gibst Du schön mir!“

Der verallgemeinerte relativistische Pythagoras

Albert: „Klar, kannst‘e haben! Aber wenn das recht-winklig gezeichnete Dreieck nun gar nicht rechtwinklig ist, dann müsste doch der Verallgemeinerte Satz des Pythagoras gelten, der für alle Dreiecke gilt.“

Mileva: „Kein Problem, die Formel kennen wir ja …“

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{2\ a \bullet b = c}^2$$

Albert: „Bei unserem ersten relativistischen Dreieck ist das ja trivial, weil‘s wirklich rechtwinklig ist:

$\mathbf{a}^2 \mathbf{= 16} \quad \mathbf{b}^2 \mathbf{= – 25} \quad \mathbf{a \bullet b = 0} \quad \mathbf{c}^2 \mathbf{= – 9}$

Passt alles nahtlos und wie angenäht: $\mathbf{16 – 25 + 0 = – 9}$“

Der verallgemeinerte relativistische Pythagoras

Mileva: „Und bei unserem zweiten Dreieck nehmen wir jetzt die neuen Seitenvektorenquadrate und Seitenvektorenprodukte …“

$$\mathbf{a_{neu}}^2 + \mathbf{b_{neu}}^2 + \mathbf{2\ a_{neu} \bullet b_{neu}} = \mathbf{c_{neu}}^2$$

Albert: „Und das ist jetzt ja genauso trivial, weil‘s eben nicht rechtwinklig ist:

$$\mathbf{a_{neu}}^2 = \mathbf{8}$$

$$\mathbf{b_{neu}}^2 = -\ \mathbf{12{,}5}$$

$$\mathbf{a_{neu} \bullet b_{neu}} = -\ \mathbf{10\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{c_{neu}}^2 = -\ \mathbf{4{,}5} - \mathbf{20\sqrt{3}}$$

Der verallgemeinerte relativistische Pythagoras

Mileva: „Ja, mein Schneiderlein von Ulm. Da passt jetzt auf einmal auch alles nahtlos und wie angenäht…

$$\mathbf{a}_{\mathbf{neu}}^{2} + \mathbf{b}_{\mathbf{neu}}^{2} + \mathbf{2}\ \mathbf{a}_{\mathbf{neu}} \bullet \mathbf{b}_{\mathbf{neu}}$$

$$= \mathbf{8} - \mathbf{12{,}5} + \mathbf{2}\ (-\ \mathbf{10}\sqrt{\mathbf{3}})$$

$$= -\ \mathbf{4{,}5} - \mathbf{20}\sqrt{\mathbf{3}}$$

$$= \mathbf{c}_{\mathbf{neu}}^{2}$$

Der Verallgemeinerte Satz des Pythagoras gilt wirklich!“

Der verallgemeinerte relativistische Pythagoras

Mileva: „Ja, mein Schneiderlein von Ulm. Da passt jetzt auf einmal auch alles nahtlos und wie angenäht…

$$\mathbf{a}_{\mathbf{neu}}^{2} + \mathbf{b}_{\mathbf{neu}}^{2} + \mathbf{2}\ \mathbf{a}_{\mathbf{neu}} \bullet \mathbf{b}_{\mathbf{neu}}$$

$$= \mathbf{8} - \mathbf{12{,}5} + \mathbf{2}\ (-\ \mathbf{10}\sqrt{\mathbf{3}})$$

$$= -\ \mathbf{4{,}5} - \mathbf{20}\sqrt{\mathbf{3}}$$

$$= \mathbf{c}_{\mathbf{neu}}^{2}$$

Der Verallgemeinerte Satz des Pythagoras gilt wirklich!"

Albert: „Perfekt! Das zeigen wir jetzt aber dem Minkowski!"

Zürich – ETH – vor dem Büro von Prof. Minkowski

Und schon zerrt Albert seine Mileva zur ETH. Dort angekommen laufen Sie einem erschöpftem Minkowski über den Weg, der gerade aus seiner 13. Sitzung schlürft.

Minkowski: „Herrje, noch eine Prüfungsordnung, herrje, und noch eine Studienordnung, können die denn nicht mal Home-Schooling einführen und Home-Prüfing, so dass ich hier meine Ruhe hab‘!“

Und er murrt weiter: „Und Home-Learning und Home-Eating, die Mensa sollte man auch schließen! Das macht mein Blinddarm ja nicht mehr lange mit.“

Zürich – ETH – vor dem Büro von Prof. Minkowski

Und nun sieht Prof. Minkowski auch noch Albert und Mileva auf ihn zukommen.

Minkowski: „Oh Gott, jetzt auch noch diese zwei Vollpfosten. Die haben mir gerade noch gefehlt! Gibt‘s denn nicht irgendwo einen blauen Knopf, Herrje, und irgendeinen Kasten, in den die dann starren können, anstatt mir hier hinterher zu rennen!“

Albert: „Herr Professor, Herr Professor!“

Minkowski: „Ohh mein Gott. Wär‘ ich doch mal in Königsberg geblieben. Da beim alten Kant schlägt keiner meine Zeit kaputt!“

Zürich – ETH – vor dem Büro von Prof. Minkowski

Bevor der Minkowski Professor in Zürich wurde, hatte er nämlich eine Professur in Königsberg. Aber dann dreht er sich doch erschöpft und gleichzeitig auch unendlich gnädig um und begrüßt Albert und Mileva: „Meine Dame, mein Herr, womit kann ich dienen?“

Ganz aufgeregt zeigt Albert seine Rechnungen: „Hier, wir haben das Dreieck um 30° gedreht, und jetzt ist es nicht mehr rechtwinklig!“

Und Mileva ergänzt: „Aber der Verallgemeinerte Satz des Pythagoras, der gilt noch!“

Zürich – ETH – vor dem Büro von Prof. Minkowski

Richtig stolz sind Albert und Mileva auf ihre Rechnungen. Schließlich haben sie ja gerade zum ersten Mal ein echtes, hochgradig relativistisches Dreieck ausgerechnet!

Doch Prof. Minkowski antwortet nur trocken, als er die Rechnungen sieht: „Einstein, Einstein, Sie haben mal wieder nix kapiert. Das ist doch keine Drehung um 30°."

Und dann holt er seinen dicken, ganz dicken roten Stift raus und schreibt auf die Blätter:

Warning: Do not believe in red arrows!

Zürich – ETH – vor dem Büro von Prof. Minkowski

Perplex schauen Albert und Mileva auf die roten Buchstaben:

Warning: Do not believe in red arrows!

Und Albert stottert: „Aber wir haben doch das Dreieck um 30° gedreht, Herr Professor!“

Aber Prof. Minkowski ist müde und will nach Hause. Recht unwirsch antwortet er: „Einen völligen Quatsch haben Sie gedreht. Da ist nie und nimmer eine Drehung, Einstein! Wenn Sie so weitermachen, bekommen Sie nicht mal eine Anstellung am Patentamt in Bern, und die nehmen sonst wirklich jeden!“

Zürich – ETH – vor dem Büro von Prof. Minkowski

Da ist der sonst recht hochmütige und immer fröhliche Albert dann doch etwas niedergeschlagen und er fragt kleinlaut: „Und was sollen wir nun tun?“

Und Minkowski, schon im Weggehen, antwortet mehr erschöpft als überzeugt: „Machen Sie doch einfach, was ich sage, und jetzt drehen Sie beide das Dreieck wirklich um mal um 30°. Das kann doch nicht so schwer sein!“

Zürich – ETH – vor dem Büro von Prof. Minkowski

Da ist der sonst recht hochmütige und immer fröhliche Albert dann doch etwas niedergeschlagen und er fragt kleinlaut: „Und was sollen wir nun tun?“

Und Minkowski, schon im Weggehen, antwortet mehr erschöpft als überzeugt: „Machen Sie doch einfach, was ich sage, und jetzt drehen Sie beide das Dreieck wirklich um mal um 30°. Das kann doch nicht so schwer sein!“

Und dann, fast schon um die Ecke, sagt er noch kaum hörbar: „Und ein, zwei Sandwichs sollten Sie auch mal essen. Sonst wird das nix!“

Ergänzungsfolien 08 & 08-Euklid: Einstein zeichnet einen Kreis & Minkowski mag Hyperbeln

Mathematik 1 des Bachelor-Studiengangs Ingenieurinformatik der HTW Berlin

Corona-Semester Sommer 2020

– Dr. M. Horn –

Ergänzungsfolien 08:
Einstein zeichnet einen Kreis

Mathematik 1 des Bachelor-
Studiengangs Ingenieurinformatik
der HTW Berlin

Corona-Semester Sommer 2020
– Dr. M. Horn –

Hallo !

Albert Einstein bringt immer alles durcheinander

Wir erinnern uns: In den letzten Ergänzungsfolien 07 hat Albert Einstein als Student in der Vorlesung von Prof. Minkowski nicht aufgepasst und die ganzen reellen (2 x 2)-Matrizen durcheinander gebracht.

Die übliche Interpretation …

(siehe nächste Folie)

ist Albert Einstein schnurzpiepwurschtegal und er interpretiert die reellen (2 x 2)-Matrizen zusammen mit Mileva auf seine ganz eigene Art und Weise …

(siehe übernächste Folie)

Wiederholung: Euklidischer Raum

In den Ergänzungsfolien 01 bis 06 wurden die folgenden reellen (2 x 2)-Matrizen als Basiselemente des zweidimensionalen, Euklidischen Raums gedeutet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \quad \rightarrow \text{ Basisskalar}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1} \quad \rightarrow \text{ Basisvektor in x-Richtung}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_2} \quad \rightarrow \text{ Basisvektor in y-Richtung}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1 e_2} \quad \rightarrow \text{ Basis-Bivektor der xy-Ebene}$$

Pseudo-Euklidischer Raum von Albert und Mileva

In den Ergänzungsfolien 07 haben sich Albert und Mileva über die folgende Deutung der vier Basiselemente der reellen (2 x 2)-Matrizen unterhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \qquad \rightarrow \text{ Basisskalar}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1} \qquad \rightarrow \text{ Basisvektor in x-Richtung}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_0} \qquad \rightarrow$$

Basisvektor in eine weitere Richtung, über die wir noch nicht so viel wissen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1 e_0} \qquad \rightarrow$$

Basis-Bivektor einer Ebene, die in x-Richtung und die zweite Richtung weist

Pseudo-Euklidischer Raum von Albert und Mileva

Für die beiden Basisvektoren von Albert und Mileva gelten die üblichen Vertauschungsregeln, da die beiden Basisvektoren ja senkrecht zueinander stehen:

$$\mathbf{e_1 e_0} = -\,\mathbf{e_0 e_1}$$

Allerdings ist die Normierung der Basisvektoren nun etwas anders als im Euklidischen Raum:

$$\mathbf{e_1}^2 = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{e_0}^2 = -\,\mathbf{1}$$

Wir haben hier also eine reelle Richtung $\mathbf{e_1}$ und eine imaginäre Richtung $\mathbf{e_0}$.

Pseudo-Euklidischer Raum von Albert und Mileva

Für die beiden Basisvektoren von Albert und Mileva gelten die üblichen Vertauschungsregeln, da die beiden Basisvektoren ja senkrecht zueinander stehen:

$$\mathbf{e_1 e_0} = -\,\mathbf{e_0 e_1}$$

Auch das Quadrat des Basis-Bivektors verhält sich nicht mehr so wie in den Ergänzungsfolien 01 bis 06:

$$(\mathbf{e_1 e_0})^2 = \mathbf{1}$$

Der Basis-Bivektor $\mathbf{e_1 e_0}$ ist jetzt also ebenfalls eine reelle Größe.

Pseudo-Euklidischer Raum von Albert und Mileva

Es ist Albert und Mileva allerdings noch nicht gelungen, mit den umbenannten Basiselementen vernünftig zu rechnen.

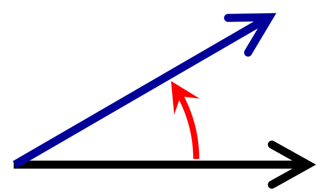
Als sie ihre ersten Rechenergebnisse Prof. Minkowski zeigten, ist dieser sehr erbost. Albert und Mileva haben alles falsch gemacht!

Nun sitzen Sie am Ufer des Zürichsees und grübeln über ihre Fehler nach.

Zürich – irgendwo am Seeufer

Nach ihrem unerfreulichen Besuch bei Prof. Minkowski an der ETH sitzen Albert und Mileva am Ufer des Zürichsees und blicken fragend über das Wasser:

„Warum ist das keine Rotation, wenn wir den Vektor **a** …“

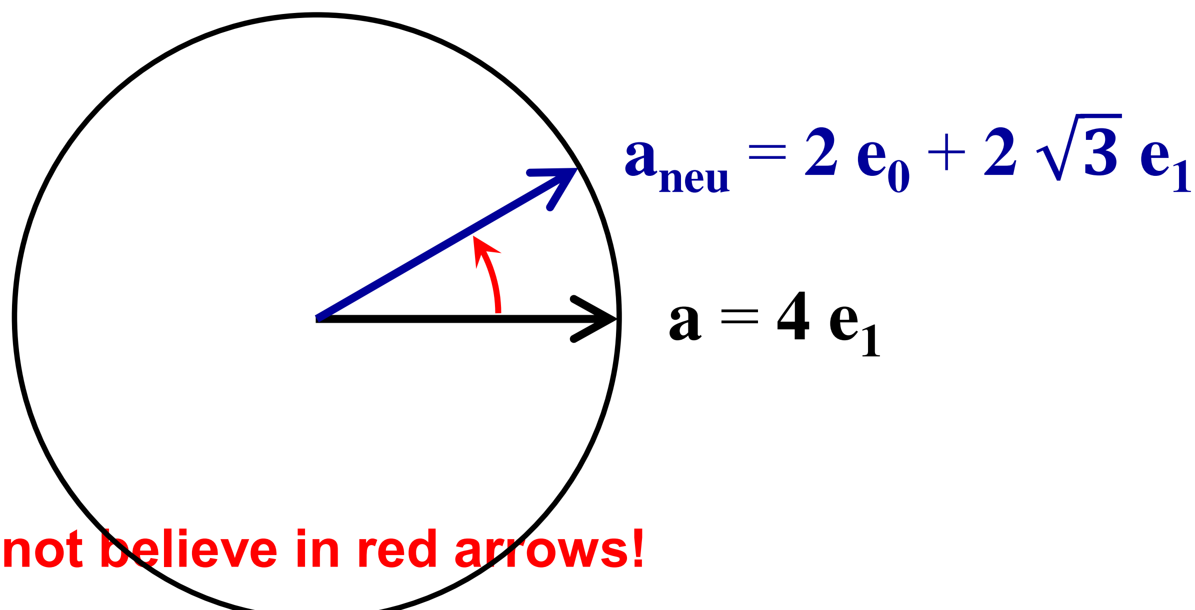


Warning: Do not believe in red arrows!

Zürich – irgendwo am Seeufer

Nach ihrem unerfreulichen Besuch bei Prof. Minkowski an der ETH sitzen Albert und Mileva am Ufer des Zürichsees und blicken fragend über das Wasser:

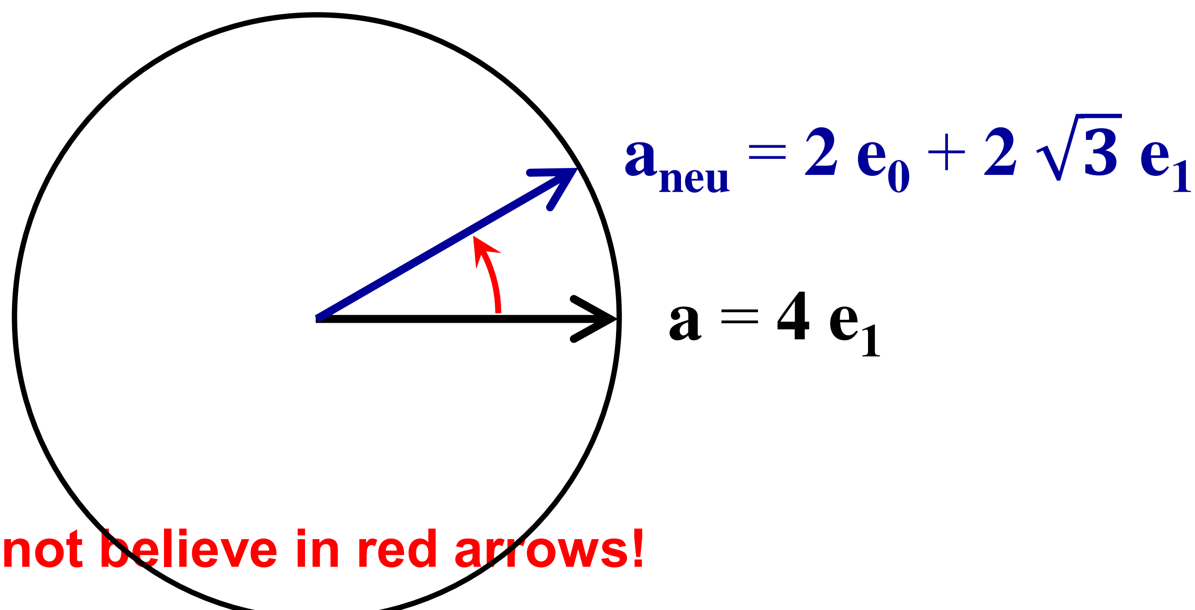
„Warum ist das keine Rotation, wenn wir den Vektor **a** kreisförmig entgegen dem Uhrzeigersinn bewegen?“



Warning: Do not believe in red arrows!

Zürich – irgendwo am Seeufer

Und immer noch leuchtet die rote Farbe des dicken Stifts von Prof. Minkowski. Da bricht Mileva das Schweigen: „Du, Albert, irgendwie ist der Minkowski so wie Du!“



Warning: Do not believe in red arrows!

Zürich – irgendwo am Seeufer

Und immer noch leuchtet die rote Farbe des dicken Stifts von Prof. Minkowski. Da bricht Mileva das Schweigen: „Du, Albert, irgendwie ist der Minkowski so wie Du!“

Albert schaut sie fragend an, ohne etwas zu sagen.

Mileva: „Ja, wir zeichnen eine Rotation und der Minkowski sagt, wir hätten gar keine Rotation gezeichnet. Das ist doch wie bei Dir. Wir zeichnen ein rechtwinkliges Dreieck und Du sagst, wir hätten gar kein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet.“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Albert zuckt mit den Schultern: „Ja, alles Lug und Trug. Alles sieht so aus, wie es nicht ist. Die Mathematik kann einen schon zur Verzweiflung bringen. Alles ist anders als es ist …“

Mileva: „Na, du musst jetzt aber nicht reden wie die Philosophen. Damit warten wir, bis wir alt und runzelig sind.“

Albert: „Hast Du denn eine bessere Idee?“

Mileva: „Klar hab‘ ich die! Wenn etwas zu schwierig ist, dann muss man es halt einfacher machen. So einfach, bis man es verstehen kann!“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Das überzeugt den Albert, ein bisschen zumindest. Und zumindest wird seine Laune jetzt ein bisschen besser:

„Na, dann machen wir doch das alles einfacher!“

Mileva: „Ist auf jeden Fall besser, als es zu machen wie bei den Philosophen: Wenn die etwas nicht verstehen, dann machen sie nämlich immer alles noch schwieriger, damit keiner merkt, dass sie es nicht verstehen!“

Und jetzt wird Alberts Laune tatsächlich schon sehr viel besser!

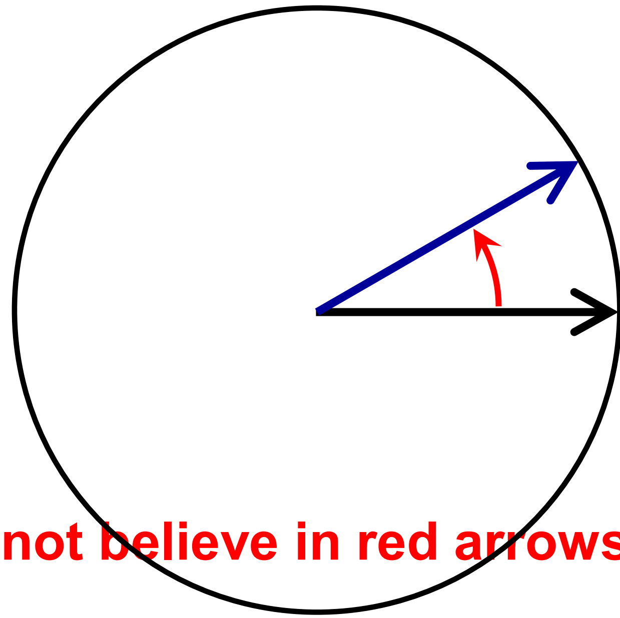
Zürich – irgendwo am Seeufer

Albert: „Also dann fangen wir ganz einfach an – am besten mit dem Kreis in unserer Zeichnung. Was ist ein Kreis?“

Mileva: „Die Definition kann man doch in jedem Mathematikbuch nachlesen: Ein Kreis besteht aus der Menge aller Punkte, die den gleichen Abstand von einem Punkt haben. Und dieser eine Punkt ist dann der Mittelpunkt des Kreises!“

Albert: „In unserer Zeichnung liegt der Mittelpunkt des Kreises am Fußpunkt des Vektors **a**, also genau dort, wo der Vektor **a** links beginnt.“

Zürich – irgendwo am Seeufer



$\mathbf{a}_{\mathbf{neu}} = 2\,\mathbf{e}_0 + 2\sqrt{3}\,\mathbf{e}_1$

$\mathbf{a} = 4\,\mathbf{e}_1$

Warning: Do not believe in red arrows!

Albert: „In unserer Zeichnung liegt der Mittelpunkt des Kreises am Fußpunkt des Vektors **a**, also genau dort, wo der Vektor **a** links beginnt.“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Mileva: „Und den gleichen Abstand aller Punkte vom Mittelpunkt nennt man den Radius. Da wir den Vektor $\mathbf{a} = \mathbf{4}\,\mathbf{e}_1$ genommen haben, ist der Radius also vier reelle Einheiten lang.“

Albert: „Ja, das ist die Länge des Vektors **a**:

$$\mathbf{r} = |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2} = \sqrt{(\mathbf{4}\,\mathbf{e}_1)^2}$$

$$= \sqrt{\mathbf{16}\,\mathbf{e}_1{}^2} = \sqrt{\mathbf{16}\,(\mathbf{1})} = \sqrt{\mathbf{16}} = \mathbf{4}$$

Also $\mathbf{r} = \mathbf{4}$ ist unser Radius.“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Mileva: „Und alle Punkte, die vom Mittelpunkt genau $\mathbf{r} = \mathbf{4}$, also vier Einheitsschritte, entfernt sind, bilden den Kreis.“

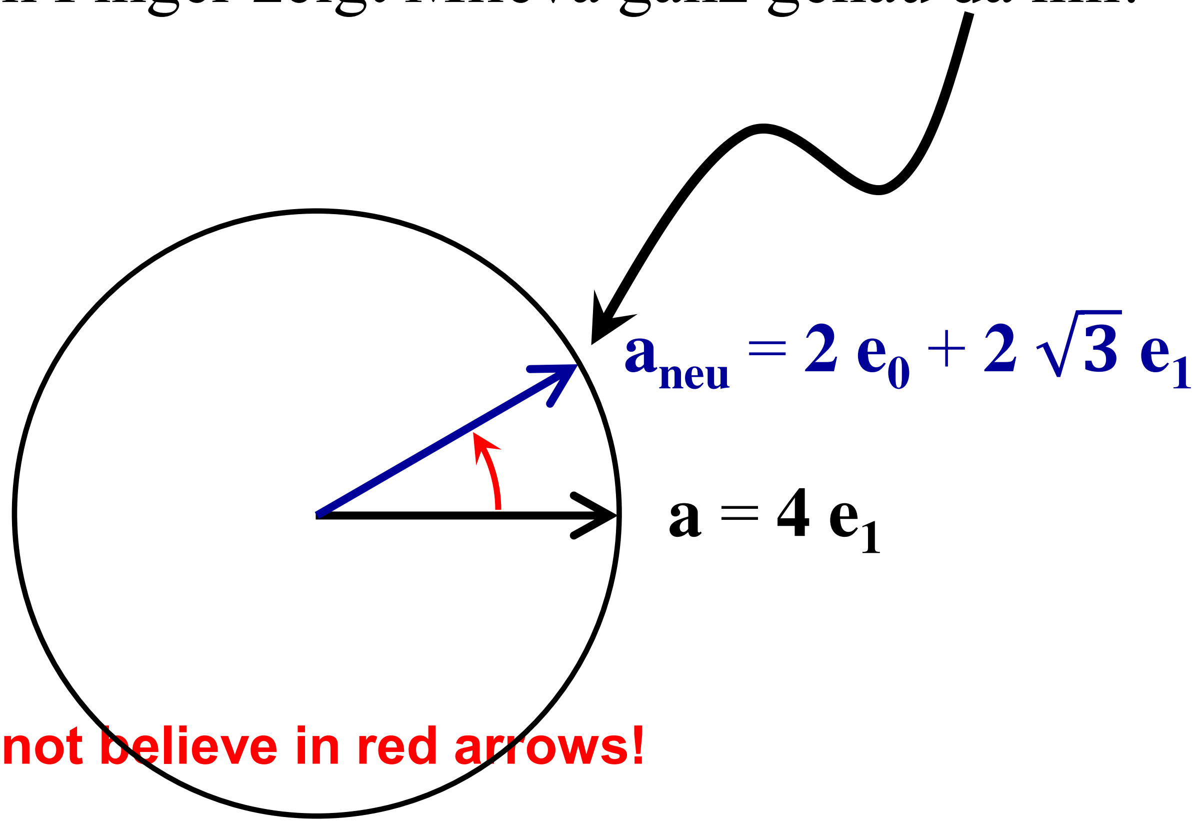
Albert: „Und Minkowski ärgert sich über uns, weil der Endpunkt unseres neuen Vektors $\mathbf{a_{neu}} = \mathbf{2\ e_0} + \mathbf{2\ \sqrt{3}\ e_1}$ nun nicht auf dem Kreis liegt.“

Mileva: „Aber díe Spitze des Vektors $\mathbf{a_{neu}}$ liegt doch auf dem Kreis! Ich sehe es doch!“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Mileva: „Aber díe Spitze des Vektors $\mathbf{a}_{\mathbf{neu}}$ liegt doch auf dem Kreis! Ich sehe es doch!“

Und mit dem Finger zeigt Mileva ganz genau da hin!



Warning: Do not believe in red arrows!

Zürich – irgendwo am Seeufer

Mileva: „Aber díe Spitze des Vektors $\mathbf{a}_{\mathbf{neu}}$ liegt doch auf dem Kreis! Ich sehe es doch!“

Und mit dem Finger zeigt Mileva ganz genau da hin!

Aber da zuckt Albert schon wieder mit den Schultern und meint: „Ja, alles Lug und Trug. Alles sieht so aus, wie es nicht ist. Dieser Punkt liegt gar nicht hier auf dem Kreis, weil der Radius doch nicht vier ist!“

Mileva: „Der Radius ist nicht vier?“

Albert: „Nein, der Radius ist nicht vier ...“

Die alte Rechnung von Albert

Albert: „Nein, der Radius ist nicht vier. Das hatten wir doch schon in den Ergänzungsfolien 07 ausgerechnet. Ich hatte da doch gerechnet, dass … äjjh … dass, warte mal, ich hatte gerechnet …“

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{\mathbf{neu}}{}^2 &= (\mathbf{2}\ \mathbf{e_0} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e_1})^2 \\
&= \mathbf{4}\ \mathbf{e_0}^2 + \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e_0 e_1} + \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e_1 e_0} + \mathbf{12}\ \mathbf{e_1}^2 \\
&= \mathbf{4}\ (-\ \mathbf{1}) + \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e_0 e_1} - \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e_0 e_1} + \mathbf{12}\ (\mathbf{1}) \\
&= -\ \mathbf{4} + \mathbf{12} \\
&= \mathbf{8}
\end{aligned}$$

Die alte Rechnung von Mileva

Albert: „Und Du hast mit den Matrizen doch das gleiche rausbekommen. Deine Rechnung war ja …“

$$
\begin{array}{cc|cc}
\mathbf{a}_{\mathbf{neu}}^{2} & & 2\sqrt{3} & 2 \\
 & & -2 & -2\sqrt{3} \\
\hline
2\sqrt{3} & 2 & 8 & 0 \\
-2 & -2\sqrt{3} & 0 & 8
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow \quad \mathbf{a}_{\mathbf{neu}}^{2} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \mathbf{8}
$$

Zürich – irgendwo am Seeufer

Mileva: „Also liegt das Vektorende nicht in einer Entfernung von **r** = **4**, also vier Einheitsschritten zum Mittelpunkt, sondern nur von …“

$$|\mathbf{a}_{\mathbf{neu}}| = \sqrt{\mathbf{a}_{\mathbf{neu}}{}^{\mathbf{2}}}$$

$$= \sqrt{\mathbf{8}} = \mathbf{2}\,\sqrt{\mathbf{2}} \approx \mathbf{2{,}8284}$$

Albert: „Ja, unser neuer Vektor für **a** ist zu kurz! Bei einer Rotation muss doch die Länge eines Vektors erhalten bleiben!“

Mileva: „Also jetzt verstehe ich, wieso der Minkowski so sauer war.“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Albert: „Ja, der Minkowski war sauer, weil sich bei einer Rotation die Längen von Vektoren nicht ändern dürfen. Und er hat natürlich gleich gesehen, dass unsere neuen, gedrehten Vektoren eine vollkommen falsche, nämlich andere Länge hatten!“

Mileva: „Da haben wir uns aber blamiert.“

Albert: „Da haben wir uns wirklich blamiert. Ich werde wohl doch Kerne schälen müssen und es nie nach Bern ans Patentamt schaffen!“

Mileva: „Und ich fall‘ sicher durch die Prüfung …“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Albert: „Aber wir können doch alles noch reparieren. Lass‘ uns doch einfach den richtigen Kreis zeichnen, bei dem wirklich alle Punkte einen Abstand von vier Schritte zum Mittelpunkt haben!“

Mileva: „Ja dann reparieren wir doch am besten zuerst einmal unseren Vektor $\mathbf{a_{neu}} = \mathbf{2\ e_0} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}\ \mathbf{e_1}$ mit dem falschen Quadrat $\mathbf{a_{neu}}^2 = \mathbf{8}$.“

Albert: „Kein Problem, das richtige Quadrat ist ja …“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Albert: „Kein Problem, das richtige Quadrat ist ja wegen

$$\mathbf{a} = \mathbf{4}\,\mathbf{e_1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}^2 = \mathbf{16}$$

einfach doppelt so groß. Also müssen wir $\mathbf{a_{neu}}$ doch nur mit der $\sqrt{\mathbf{2}}$ multiplizieren. Ich nenne diesen Vektor dann einfach mal $\mathbf{a_1}$:

$$\mathbf{a_1} = \sqrt{\mathbf{2}}\,\mathbf{a_{neu}} = \sqrt{\mathbf{2}}\,(\mathbf{2}\,\mathbf{e_0} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}\,\mathbf{e_1})$$

$$= \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}\,\mathbf{e_0} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{6}}\,\mathbf{e_1}$$

Mileva: „Da mache ich doch lieber mal eine Probe. Nicht, dass wir uns nochmal blamieren!“

Die neue Rechnung von Mileva

Albert: „Ja, schauen wir, ob das doofe Quadrat jetzt endlich **16** wird.“

Und Mileva rechnet:

$\mathbf{a_1}^2$		$2\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$
		$-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{6}$
$2\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$	16	0
$-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{6}$	0	16

$$\Rightarrow \mathbf{a_1}^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{16}$$

Die neue Rechnung von Albert

Und auch Albert rechnet sicherheitshalber noch mal nach:

$$\mathbf{a_1}^2 = (\mathbf{2\sqrt{2}\ e_0} + \mathbf{2\sqrt{6}\ e_1})^2$$

$$= \mathbf{8\ e_0}^2 + \mathbf{8\sqrt{3}\ e_0e_1} + \mathbf{8\sqrt{3}\ e_1e_0} + \mathbf{24\ e_1}^2$$

$$= \mathbf{8\ (-1)} + \mathbf{8\sqrt{3}\ e_0e_1} - \mathbf{8\sqrt{3}\ e_0e_1} + \mathbf{24\ (1)}$$

$$= -\ \mathbf{8} + \mathbf{24}$$

$$= \mathbf{16}$$

Albert: „Also haben wir endlich einen Punkt, der auf dem Kreis liegt!"

Zwischenergebnis

$\Rightarrow \qquad \mathbf{a} = \mathbf{4}\ \mathbf{e_1}$

$\mathbf{a_1} = \mathbf{2\sqrt{2}}\ \mathbf{e_0} + \mathbf{2\sqrt{6}}\ \mathbf{e_1} \approx \mathbf{2{,}8284}\ \mathbf{e_0} + \mathbf{4{,}8990}\ \mathbf{e_1}$

Mileva: „Und um einen ganzen Kreis zeichnen zu können, brauchen wir noch ein paar mehr Punkte!“

Albert: „Ja, erfinden wir noch ein paar Vektoren mit einem Quadrat von **16**. Dann haben wir mehr Punkte für den Kreis.“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Mileva: „Wenn wir also irgendein Quadrat nehmen, das zu groß ist, …“

Albert: „Also machen wir die $\mathbf{e_1}$-Komponente in x-Richtung zu groß.“

Mileva: „„.. dann können wir doch durch die $\mathbf{e_0}$-Komponete den Teil, der zu groß ist, wieder abziehen.“

Albert: „Weil das Quadrat $\mathbf{e_0}^2$ dieser Komponente negativ ist.“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Mileva: „Also beispielsweise ist $\mathbf{5\ e_1}$ viel zu groß, weil $(\mathbf{5\ e_1})^2 = \mathbf{25}$ eben viel größer als das Quadrat des Radius $\mathbf{r}^2 = \mathbf{16}$ ist.“

Albert: „Ja, und deshalb müssen wir genau neun abziehen, weil $\mathbf{25} - \mathbf{9} = \mathbf{16}$ dann genau den richtigen Wert für das Quadrat ergibt.“

Mileva: „Also kommen für die Komponente in $\mathbf{e_0}$-Richtung noch genau $\mathbf{3\ e_0}$ dazu, weil die dann aufgrund der negativen Normierung $\mathbf{e_0}^2 = -\mathbf{1}$ abgezogen werden.“

Albert: „Unser nächster Vektor ist also $\mathbf{a_2} = \mathbf{3\ e_0} + \mathbf{5\ e_1}$.“

Zwischenergebnis

$\Rightarrow \qquad \mathbf{a} = \mathbf{4\ e_1}$

$\mathbf{a_1} = \mathbf{2\sqrt{2}\ e_0} + \mathbf{2\sqrt{6}\ e_1} \approx \mathbf{2{,}8284\ e_0} + \mathbf{4{,}8990\ e_1}$

$\mathbf{a_2} = \mathbf{3\ e_0} + \mathbf{5\ e_1}$

Mileva: „Na, das ist ja einfach. Bei $\mathbf{6\ e_1}$ haben wir also ein Quadrat von **36** und müssen **20** abziehen, um **16** zu erhalten.“

Albert: „Also ist die fehlende Komponente $\mathbf{\sqrt{20}\ e_0}$ bzw. $\mathbf{2\sqrt{5}\ e_0} \approx \mathbf{4{,}4721\ e_0}$.“

Mileva: „Und dann lautet dieser Vektor $\mathbf{a_3} = \mathbf{2\sqrt{5}\,e_0} + \mathbf{6\,e_1}$.“

Zwischenergebnis

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{a} = \mathbf{4\ e_1}$$

$$\mathbf{a_1} = \mathbf{2\sqrt{2}\ e_0} + \mathbf{2\sqrt{6}\ e_1} \approx \mathbf{2{,}8284\ e_0} + \mathbf{4{,}8990\ e_1}$$

$$\mathbf{a_2} = \mathbf{3\ e_0} + \mathbf{5\ e_1}$$

$$\mathbf{a_3} = \mathbf{2\sqrt{5}\,e_0} + \mathbf{6\,e_1} \approx \mathbf{4{,}4721\ e_0} + \mathbf{6\ e_1}$$

Und so rechnen Mileva und Albert weiter und immer weiter.

Weitere Zwischenergebnisse

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{a} = 4\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_1 = 2\sqrt{2}\,\mathbf{e}_0 + 2\sqrt{6}\,\mathbf{e}_1 \approx 2{,}8284\,\mathbf{e}_0 + 4{,}8990\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_2 = 3\,\mathbf{e}_0 + 5\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_3 = 2\sqrt{5}\,\mathbf{e}_0 + 6\,\mathbf{e}_1 \approx 4{,}4721\,\mathbf{e}_0 + 6\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_4 = \sqrt{33}\,\mathbf{e}_0 + 7\,\mathbf{e}_1 \approx 5{,}7446\,\mathbf{e}_0 + 7\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_5 = 4\sqrt{3}\,\mathbf{e}_0 + 8\,\mathbf{e}_1 \approx 6{,}9282\,\mathbf{e}_0 + 8\,\mathbf{e}_1$$

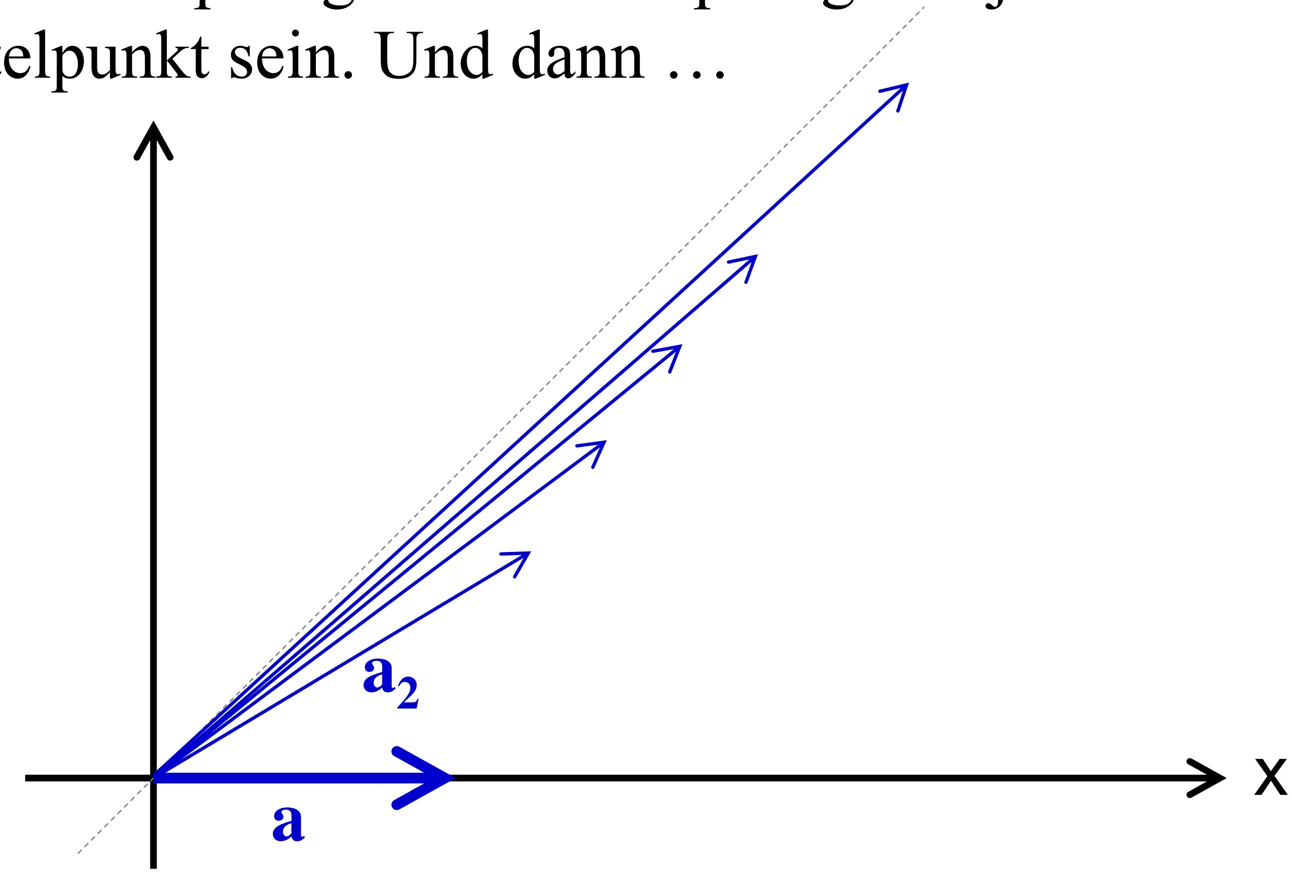
$$\mathbf{a}_6 = \sqrt{65}\,\mathbf{e}_0 + 9\,\mathbf{e}_1 \approx 8{,}0623\,\mathbf{e}_0 + 9\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_7 = 2\sqrt{21}\,\mathbf{e}_0 + 10\,\mathbf{e}_1 \approx 9{,}1652\,\mathbf{e}_0 + 10\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_8 = \sqrt{105}\,\mathbf{e}_0 + 11\,\mathbf{e}_1 \approx 10{,}2470\,\mathbf{e}_0 + 11\,\mathbf{e}_1$$

Und jetzt zeichnet Albert einen Kreis

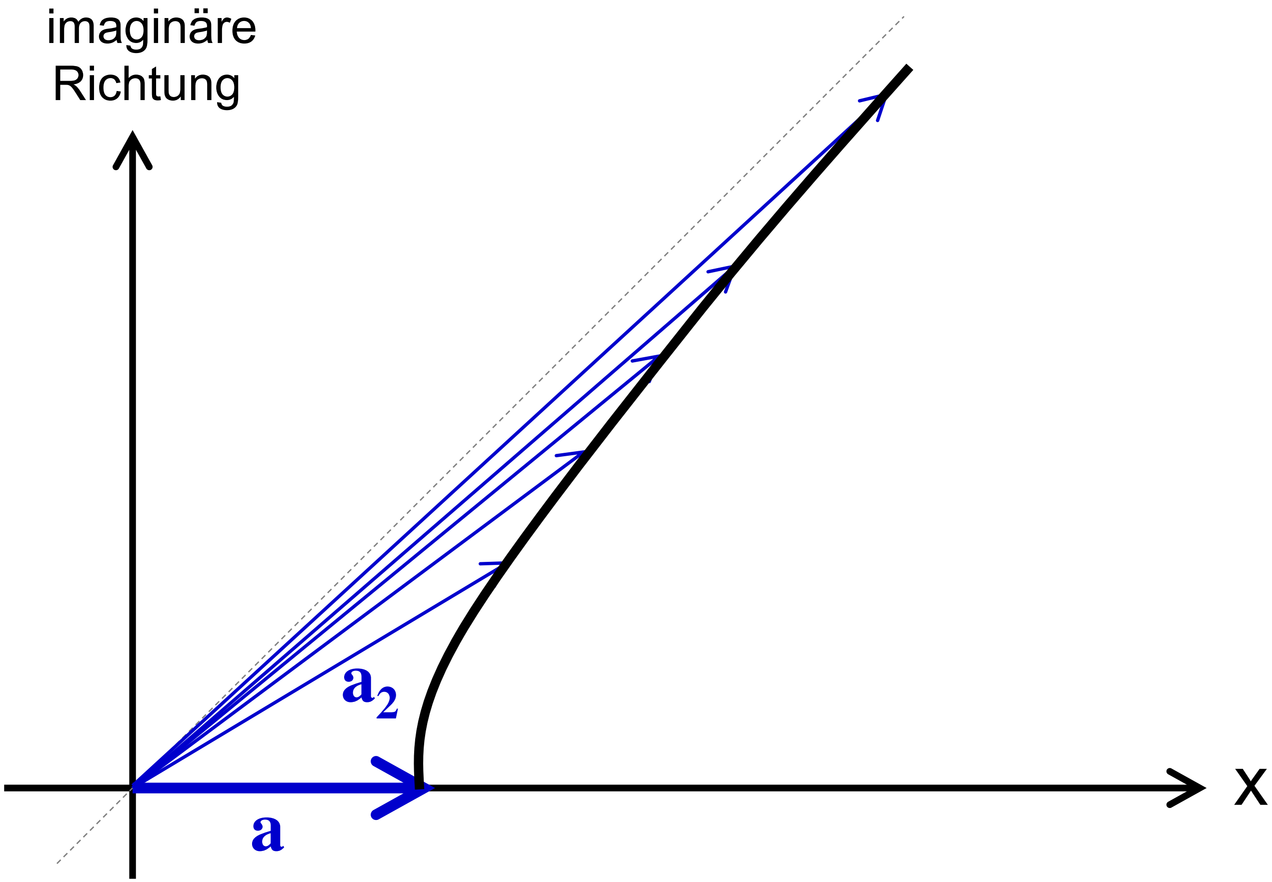
Albert: „Also nehme ich alle diese Vektoren und setze die am Ursprung an. Der Ursprung soll ja der Kreis-mittelpunkt sein. Und dann …



… verbinde ich die Endpunkte aller Vektoren.“

Und jetzt zeichnet Albert einen Kreis

Nein, er zeichnet zuerst einmal nur einen Achtelkreis:



Und jetzt zeichnet Albert einen Kreis

Mileva: „Komische Achtelkreise zeichnest Du!“

Albert (ganz stolz): „Gell? Die sehen zwar nicht wie Achtelkreise aus. Dafür ist der Abstand aller Punkte vom Ursprung genau gleich groß!“

Mileva: „Nämlich genau vier mal die Einheit **1**.“

Und jetzt zeichnet Albert einen Kreis

Mileva: „Komische Achtelkreise zeichnest Du!“

Albert (ganz stolz): „Gell? Die sehen zwar nicht wie Achtelkreise aus. Dafür ist der Abstand aller Punkte vom Ursprung genau gleich groß!“

Mileva: „Nämlich genau vier mal die Einheit **1**.“

Albert: „Und wie zeichnen wir nun einen Viertelkreis?“

Mileva: „Beim Quadrieren verschwinden doch die Minus-zeichen. Mogeln wir doch einfach welche rein. Das ändert doch dann nichts am Abstand.“

Alte Zwischenergebnisse

$$\Rightarrow \mathbf{a} = 4\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_1 = 2\sqrt{2}\,\mathbf{e}_0 + 2\sqrt{6}\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_2 = 3\,\mathbf{e}_0 + 5\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_3 = 2\sqrt{5}\,\mathbf{e}_0 + 6\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_4 = \sqrt{33}\,\mathbf{e}_0 + 7\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_5 = 4\sqrt{3}\,\mathbf{e}_0 + 8\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_6 = \sqrt{65}\,\mathbf{e}_0 + 9\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_7 = 2\sqrt{21}\,\mathbf{e}_0 + 10\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_8 = \sqrt{105}\,\mathbf{e}_0 + 11\,\mathbf{e}_1$$

Neue hergemogelte Zwischenergebnisse

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a} = 4\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_1 = 2\sqrt{2}\,\mathbf{e}_0 + 2\sqrt{6}\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a}_{1'} = -\,2\sqrt{2}\,\mathbf{e}_0 + 2\sqrt{6}\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_2 = 3\,\mathbf{e}_0 + 5\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a}_{2'} = -\,3\,\mathbf{e}_0 + 5\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_3 = 2\sqrt{5}\,\mathbf{e}_0 + 6\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a}_{3'} = -\,2\sqrt{5}\,\mathbf{e}_0 + 6\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_4 = \sqrt{33}\,\mathbf{e}_0 + 7\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a}_{4'} = -\,\sqrt{33}\,\mathbf{e}_0 + 7\,\mathbf{e}_1$$

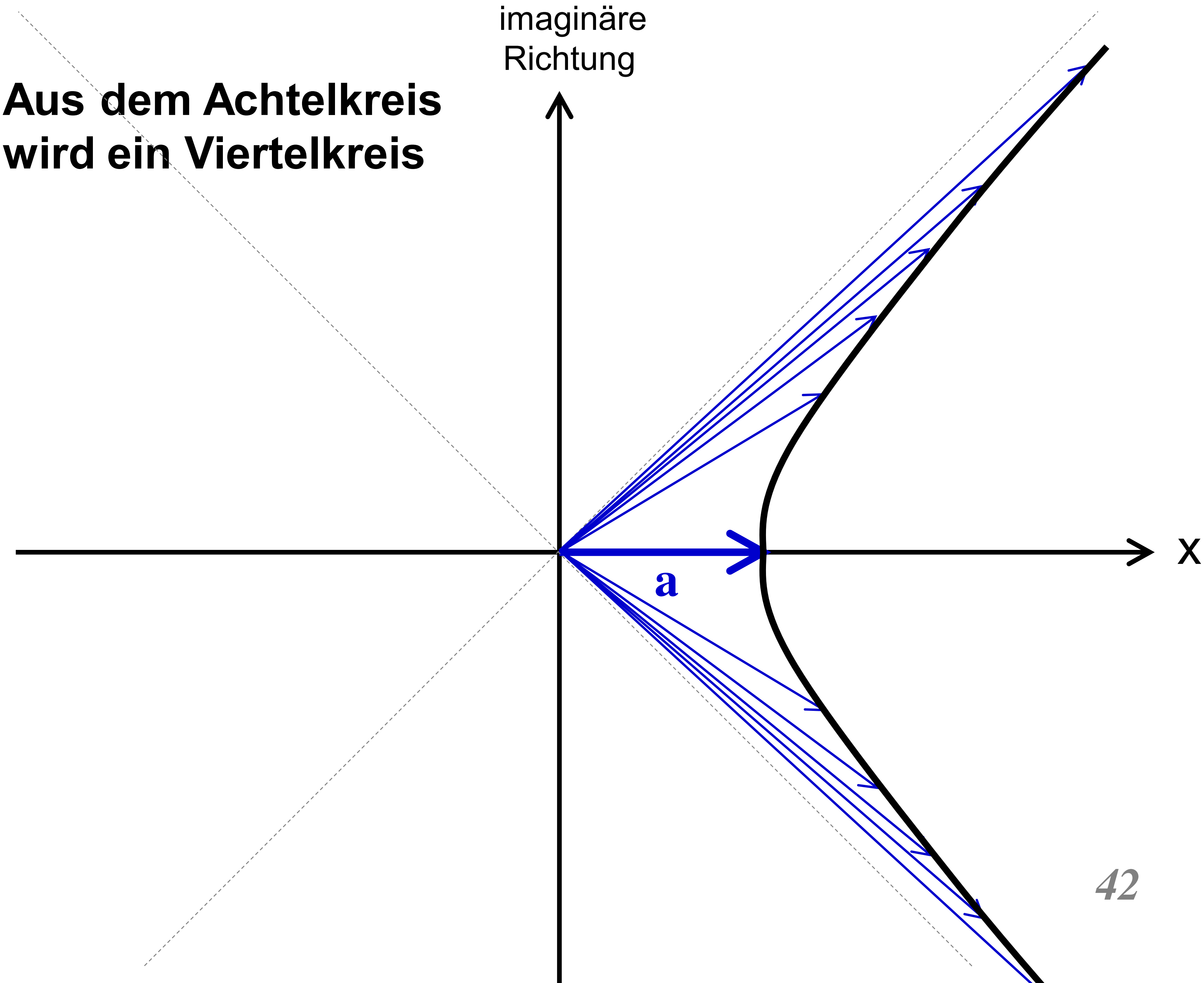
$$\mathbf{a}_5 = 4\sqrt{3}\,\mathbf{e}_0 + 8\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a}_{5'} = -\,4\sqrt{3}\,\mathbf{e}_0 + 8\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_6 = \sqrt{65}\,\mathbf{e}_0 + 9\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a}_{6'} = -\,\sqrt{65}\,\mathbf{e}_0 + 9\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_7 = 2\sqrt{21}\,\mathbf{e}_0 + 10\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a}_{7'} = -\,2\sqrt{21}\,\mathbf{e}_0 + 10\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_8 = \sqrt{105}\,\mathbf{e}_0 + 11\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a}_{8'} = -\,\sqrt{105}\,\mathbf{e}_0 + 11\,\mathbf{e}_1$$

Aus dem Achtelkreis wird ein Viertelkreis



Und jetzt zeichnet Albert einen Kreis

Mileva: „Und die Minuszeichen kann man natürlich auch bei der $\mathbf{e_1}$-Komponente reinmogeln, ohne dass sich die Länge der Vektoren ändert.“

Albert: „Also haben auch alle Vektoren auf der folgenden Folie die gleiche reelle Länge von $\mathbf{r} = \mathbf{4}$.“

Und jetzt zeichnet Albert einen Kreis

Mileva: „Und die Minuszeichen kann man natürlich auch bei der $\mathbf{e_1}$-Komponente reinmogeln, ohne dass sich die Länge der Vektoren ändert.“

Albert: „Also haben auch alle Vektoren auf der folgenden Folie die gleiche reelle Länge von $\mathbf{r} = \mathbf{4}$.“

Mileva: „Und bitte immer nachrechnen, z.B. hat $\mathbf{a_{6\#}} = -\sqrt{\mathbf{65}}\,\mathbf{e_0} - \mathbf{9}\,\mathbf{e_1}$ welches Quadrat?“

Albert: „Also der drittunterste Vektor rechts in der folgenden Tabelle …“

Noch mehr hergemogelte Zwischenergebnisse

$\Rightarrow\ \mathbf{a}_* = -4\,\mathbf{e}_1$

$\mathbf{a}_{1*} = 2\sqrt{2}\,\mathbf{e}_0 - 2\sqrt{6}\,\mathbf{e}_1$ $\qquad$ $\mathbf{a}_{1\#} = -2\sqrt{2}\,\mathbf{e}_0 - 2\sqrt{6}\,\mathbf{e}_1$

$\mathbf{a}_{2*} = 3\,\mathbf{e}_0 - 5\,\mathbf{e}_1$ $\qquad$ $\mathbf{a}_{2\#} = -3\,\mathbf{e}_0 - 5\,\mathbf{e}_1$

$\mathbf{a}_{3*} = 2\sqrt{5}\,\mathbf{e}_0 - 6\,\mathbf{e}_1$ $\qquad$ $\mathbf{a}_{3\#} = -2\sqrt{5}\,\mathbf{e}_0 - 6\,\mathbf{e}_1$

$\mathbf{a}_{4*} = \sqrt{33}\,\mathbf{e}_0 - 7\,\mathbf{e}_1$ $\qquad$ $\mathbf{a}_{4\#} = -\sqrt{33}\,\mathbf{e}_0 - 7\,\mathbf{e}_1$

$\mathbf{a}_{5*} = 4\sqrt{3}\,\mathbf{e}_0 - 8\,\mathbf{e}_1$ $\qquad$ $\mathbf{a}_{5\#} = -4\sqrt{3}\,\mathbf{e}_0 - 8\,\mathbf{e}_1$

$\mathbf{a}_{6*} = \sqrt{65}\,\mathbf{e}_0 - 9\,\mathbf{e}_1$ $\qquad$ $\mathbf{a}_{6\#} = -\sqrt{65}\,\mathbf{e}_0 - 9\,\mathbf{e}_1$

$\mathbf{a}_{7*} = 2\sqrt{21}\,\mathbf{e}_0 - 10\,\mathbf{e}_1$ $\qquad$ $\mathbf{a}_{7\#} = -2\sqrt{21}\,\mathbf{e}_0 - 10\,\mathbf{e}_1$

$\mathbf{a}_{8*} = \sqrt{105}\,\mathbf{e}_0 - 11\,\mathbf{e}_1$ $\qquad$ $\mathbf{a}_{8\#} = -\sqrt{105}\,\mathbf{e}_0 - 11\,\mathbf{e}_1$

Und jetzt zeichnet Albert einen Kreis

Albert: „Also der drittunterste Vektor rechts in der Tabelle hat ja ein Quadrat von …

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_{\mathbf{6\#}}{}^2 &= (-\sqrt{\mathbf{65}}\,\mathbf{e_0} - \mathbf{9}\,\mathbf{e_1})^2 \\
&= \mathbf{65}\ \mathbf{e_0}{}^2 + \mathbf{9}\sqrt{\mathbf{65}}\ \mathbf{e_0 e_1} + \mathbf{9}\sqrt{\mathbf{65}}\ \mathbf{e_1 e_0} + \mathbf{81}\ \mathbf{e_1}{}^2 \\
&= \mathbf{65}\ (-\mathbf{1}) + \mathbf{9}\sqrt{\mathbf{65}}\ \mathbf{e_0 e_1} - \mathbf{9}\sqrt{\mathbf{65}}\ \mathbf{e_0 e_1} + \mathbf{81}\ (\mathbf{1}) \\
&= -\ \mathbf{65} + \mathbf{81} \\
&= \mathbf{16}
\end{aligned}
$$

… von wie erwartet **16** Einheiten, weil der Vektor ja vier Einheiten lang ist.“

Und jetzt zeichnet Albert einen Kreis

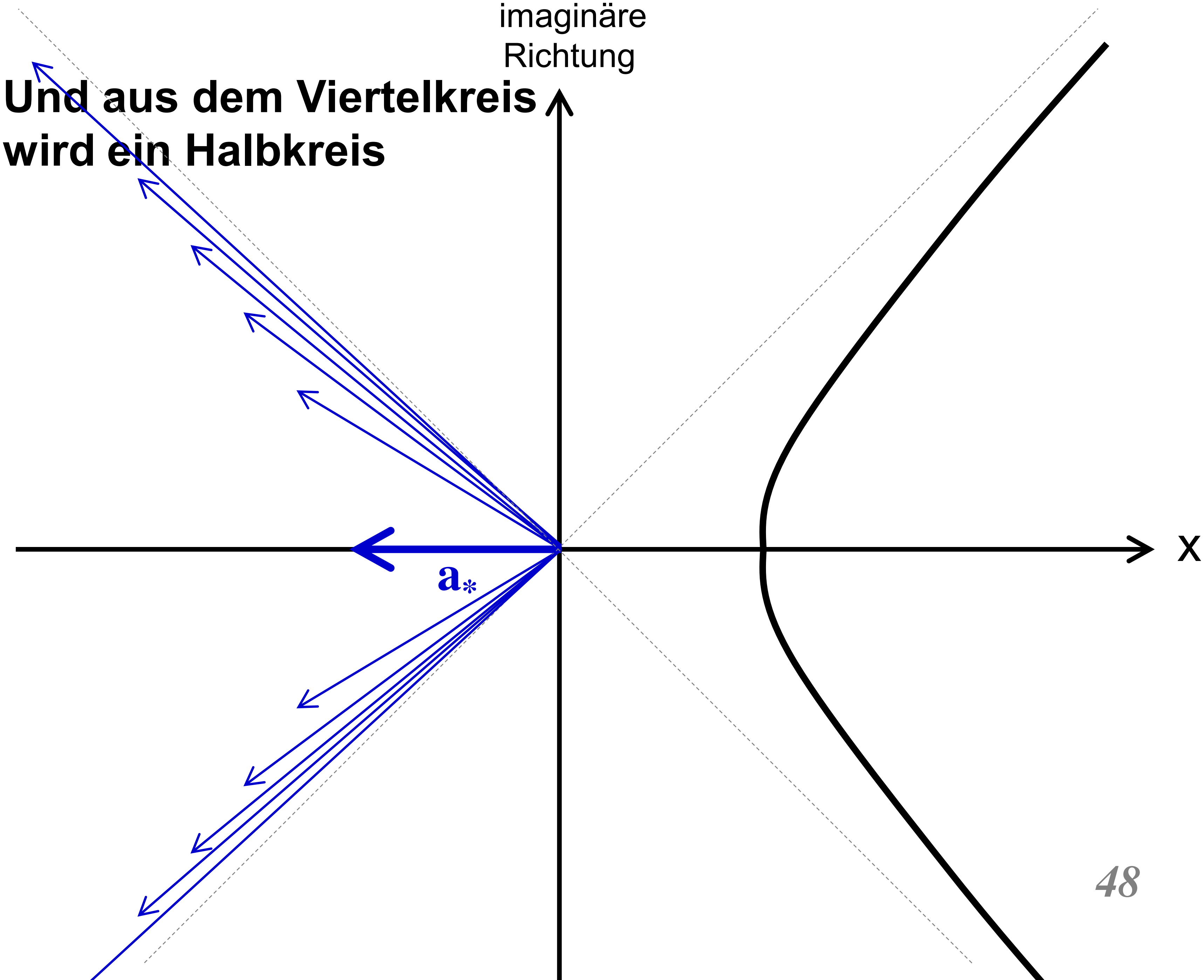
Mileva: „Klar ist das Quadrat **16**, denn mit meinen Matrizen kommt ja auch das gleiche raus.“

$\mathbf{a}_{\mathbf{6\#}}{}^{2}$		-9	$-\sqrt{65}$
		$\sqrt{65}$	9
-9	$-\sqrt{65}$	16	0
$\sqrt{65}$	9	0	16

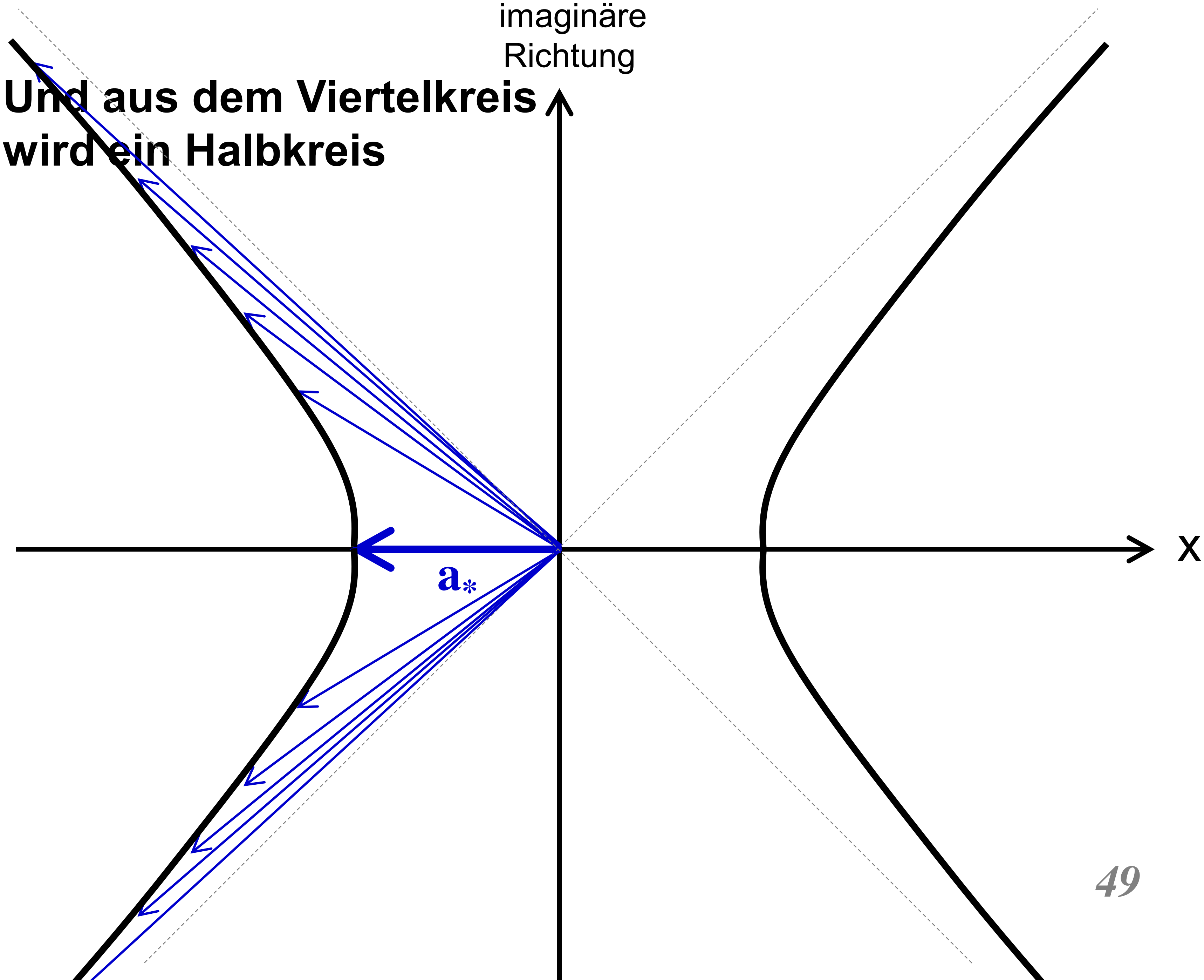
$$\Rightarrow \quad \mathbf{a}_{\mathbf{6\#}}{}^{2} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = \mathbf{16}$$

Albert: „Dann lass‘ mich doch endlich mal zeichnen!“

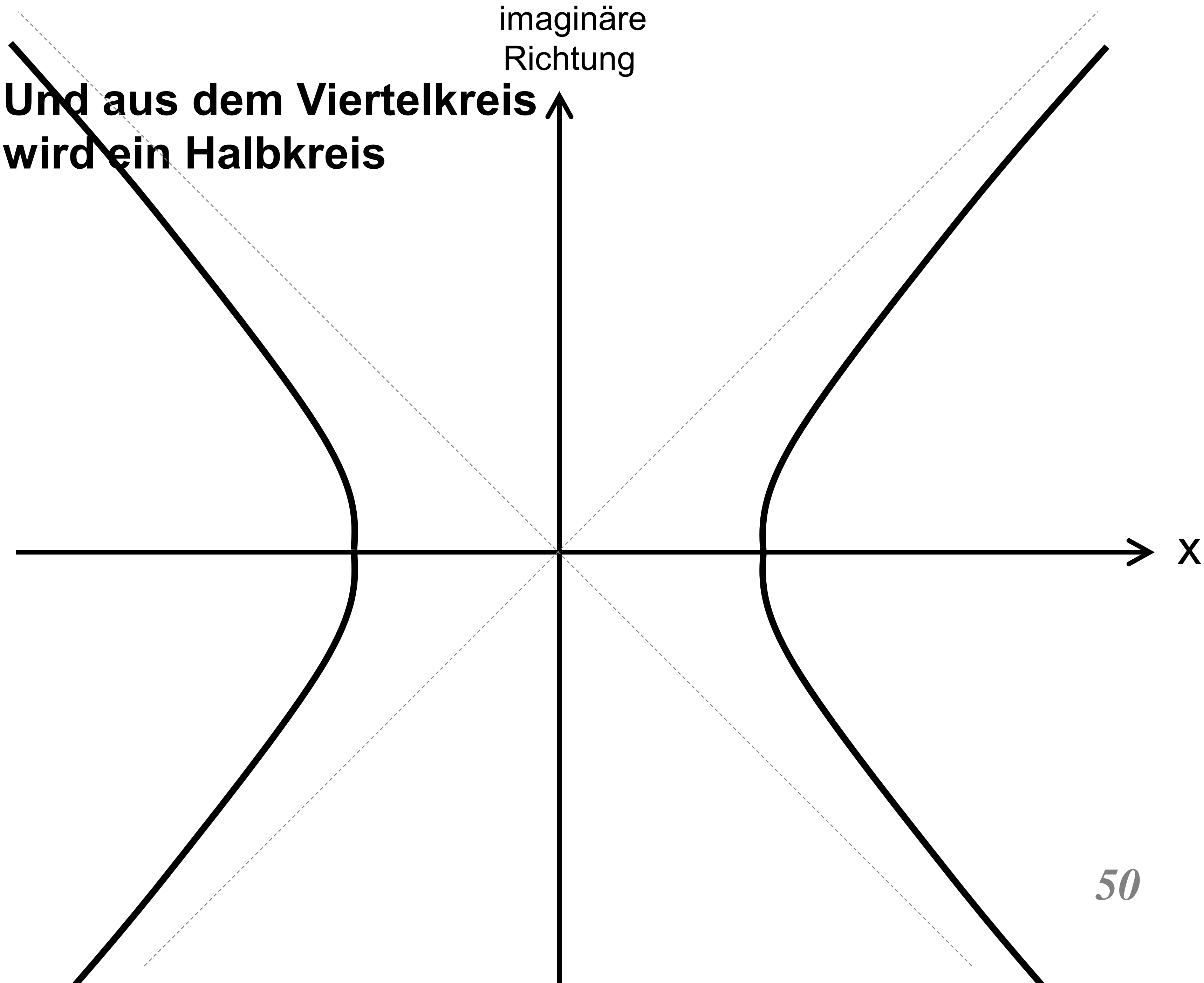
Und aus dem Viertelkreis wird ein Halbkreis



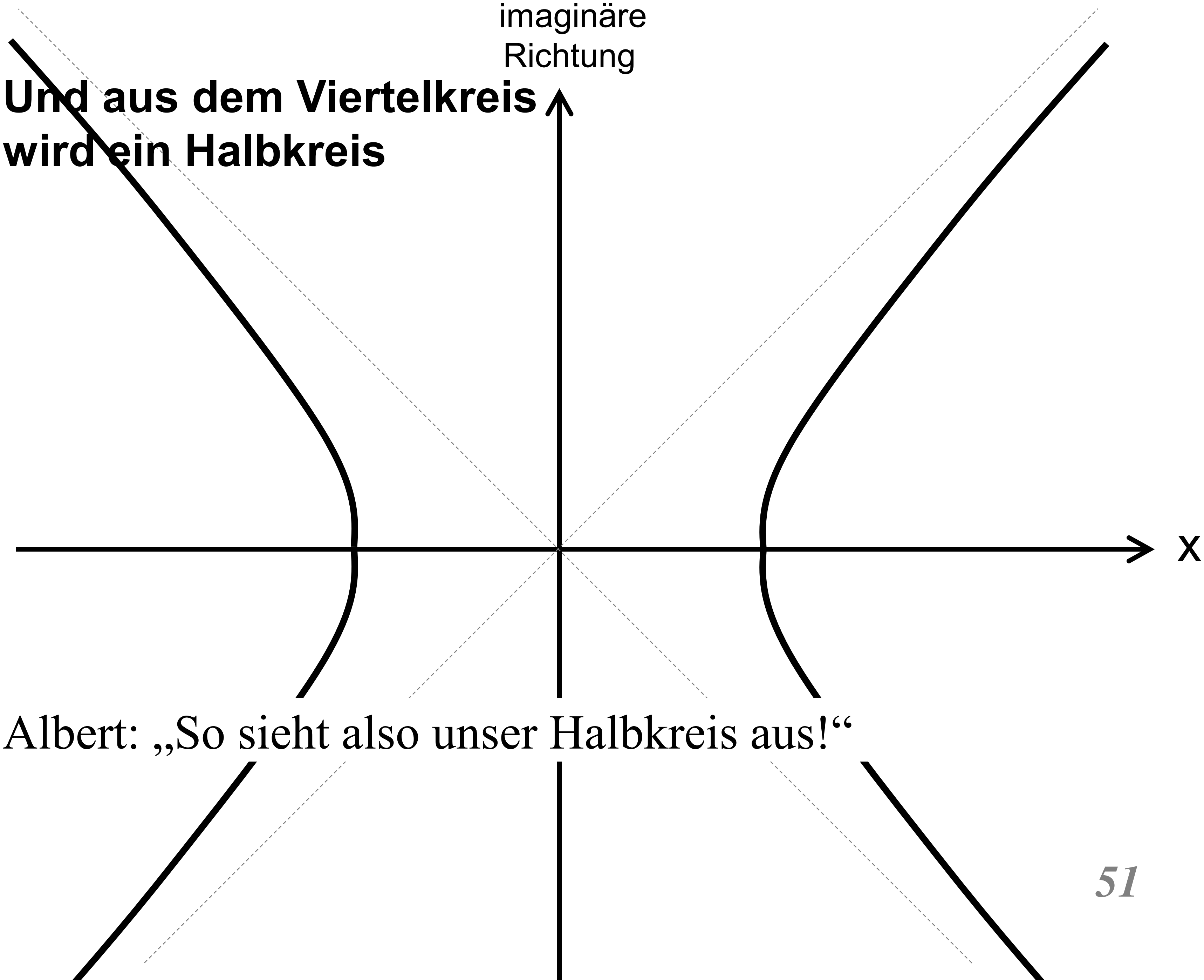
Und aus dem Viertelkreis wird ein Halbkreis



Und aus dem Viertelkreis wird ein Halbkreis



Und aus dem Viertelkreis wird ein Halbkreis



Albert: „So sieht also unser Halbkreis aus!“

Und aus dem Viertelkreis wird ein Halbkreis

Albert: „So sieht also unser Halbkreis aus!“

Mileva: „Da haben wir jetzt wirklich etwas zum Staunen. So einen unkreisigen Halbkreis habe ich ja schon lange nicht mehr gesehen.“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Mileva: „Und wie wird dann erst der ganze Kreis aussehen?“

Albert: „Also da wird es jetzt wirklich philosophisch. Es gibt nämlich keine weiteren Vektoren, für die gilt:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{16}$$

Und deshalb gibt es auch keine weiteren Vektoren, die die Radiusgleichung

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2} = \sqrt{\mathbf{16}} = \mathbf{4}$$

erfüllen.“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Mileva: „Aber da oben und da unten zwischen den beiden Kreisästen ist doch noch jede Menge Platz. Das sitzen doch noch unendlich viele Vektoren. Was ist beispielsweise mit dem Vektor

$$\mathbf{a}_{\mathbf{zwei}} = \mathbf{5}\ \mathbf{e}_{\mathbf{0}} + \mathbf{3}\ \mathbf{e}_{\mathbf{1}} \qquad ?$$

Der sieht doch fast so aus wie unser alter Vektor

$$\mathbf{a}_{\mathbf{2}} = \mathbf{3}\ \mathbf{e}_{\mathbf{0}} + \mathbf{5}\ \mathbf{e}_{\mathbf{1}}$$

und hat doch sicher die gleiche Länge.“

Albert: „Das ist ja das Philosophische daran …“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Albert: „Das ist ja das Philosophische daran. Es kommt jetzt halt darauf an, was genau man unter einer Länge versteht.“

Mileva: „Na, den Betrag des Vektors!“

Albert: „Typisch Philosophie! Einfach das Wort ändern. Dann reden alle mit zwei verschiedenen Wörtern und wissen nicht, ob sie das gleiche meinen oder was Unterschiedliches. Und dann merkt keiner, dass das Problem immer noch da ist – Es kommt halt jetzt darauf an, was genau man unter dem Betrag eines Vektors versteht.“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Mileva: „Albert, Du alberst! Unter dem Betrag eines Vektors verstehe ich das, was Du gerade selbst sagtest, nämlich die Wurzel seines Quadrats:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}$$

So stand's auf der vorvorletzen Folie!“

Albert: „Aber es gibt doch keinen weiteren Vektor, der das erfüllt!“

Mileva: „Und was ist mit $\mathbf{a}_{\mathbf{zwei}} = \mathbf{5}\ \mathbf{e}_{\mathbf{0}} + \mathbf{3}\ \mathbf{e}_{\mathbf{1}}$? Der sieht doch ganz gut aus!“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Albert: „Gut? $\mathbf{a}_{\mathbf{zwei}} = \mathbf{5\ e_0} + \mathbf{3\ e_1}$ soll gut sein? Rechne es doch einfach aus.“

Und Mileva rechnet:

$\mathbf{a}_{\mathbf{zwei}}^2$		3	5
		– 5	– 3
3	5	– 16	0
– 5	– 3	0	– 16

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a}_{\mathbf{zwei}}^2 = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$$

$$= -\,\mathbf{16}$$

Zürich – irgendwo am Seeufer

Mileva: „Oh ja, das wird schwierig. Das Quadrat von $\mathbf{a}_{\mathbf{zwei}}$ ist ja negativ.“

Albert: „Ja, das ist negativ. Bei $\mathbf{a}_{\mathbf{zwei}}{}^2$ haben wir ja eine $\mathbf{e}_0$-Komponente, die größer ist als die $\mathbf{e}_1$ –Komponente:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\mathbf{zwei}}{}^2 &= (\mathbf{5\ e_0 + 3\ e_1})^2 \\ &= \mathbf{25\ e_0}^2 + \mathbf{15\ e_0e_1} + \mathbf{15\ e_1e_0} + \mathbf{9\ e_1}^2 \\ &= \mathbf{25}\ (-\ \mathbf{1}) + \mathbf{15\ e_0e_1} - \mathbf{15\ e_0e_1} + \mathbf{9\ (1)} \\ &= -\ \mathbf{25} + \mathbf{16} = -\ \mathbf{16}\end{aligned}$$

Und deshalb klappt das mit unserer Formel nicht!“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Albert: „Und mit allen anderen Vektoren, die vom Ursprung aus nach oben zwischen den beiden Diagonalen in die imaginäre Richtung zeigen, klappt das auch nicht. Deren Quadrate sind ebenfalls alle negativ.“

Mileva: „Und alle Vektoren, die vom Ursprung aus zwischen den beiden Diagonalen nach unten zeigen, haben auch nur negative Quadrate?“

Albert: „Ja, auch deren Quadrate sind immer und ausschließlich negativ!“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Mileva: „Und was machen wir nun?“

Albert: „Tja, also, in der Zukunft, da sind die Leute ja etwas schizophren. In der Zukunft, da werden die Leute die Vektoren quadrieren, um ein positives Längenquadrat zu erhalten.

Und wenn sie merken, dass es nicht geklappt hat, da werden sie dann zusätzlich noch Betragsstriche hinschreiben, in etwa so:

$$\mathrm{A} := \left|\mathbf{A}^2\right|^{1/2} \geq 0 \qquad (5.13)“$$

Zürich – irgendwo am Seeufer

Mileva: „(5.13)? Was bedeuten die eingeklammerten (5.13)?“

Albert: „Äh, ja, die Formel habe ich aus dem Buch

Wolfgang Rindler: Relativity. Special, General, and Cosmological. 2nd edition, Oxford University Press, Oxford, New York 2006

auf Seite 98 abge… (Er stockt.) Äh, die Formel werde ich dann irgendwann mal von Seite 98 abschreiben.“

Mileva, der nicht auffällt, dass Albert etwas irritiert ist, protestiert: „Aber …“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Mileva, der nicht auffällt, dass Albert etwas irritiert ist, protestiert: „Aber der Rindler verwendet ja auch so komische Vierer-Vektoren. Das ist doch etwas ganz anderes!“

Albert: „Ja, das ist mathematisch etwas ganz anderes. Wir sollten es auf jeden Fall etwas überzeugender anstellen, etwas fassbarer, etwas …“ (Er sucht nach dem richtigen Wort.)

Mileva: „… etwas schlitzohriger …“

Albert: „Meinetwegen auch etwas schlitzohriger!“

Zürich – irgendwo am Seeufer

Mileva: „Also, damit wir es nicht so machen müssen wie in der Zukunft, da schlage ich einfach vor, dass wir nicht nur quadrieren, sondern gleich alles hoch vier nehmen, da verschwinden die überflüssigen Minuszeichen doch ganz automatisch:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt[4]{\mathbf{a}^4}$$

Können die denn in der Zukunft nicht mehr in vierter Ordnung potenzieren, wenn die so komische Vierervektoren erfinden müssen?"

Albert: „Ja, wahrscheinlich können die das nicht mehr."

Zürich – irgendwo am Seeufer

Mileva: „Mit dieser Definition hat dann der nach oben zeigende Vektor $\mathbf{a}_{\mathbf{zwei}} = \mathbf{5}\ \mathbf{e}_{\mathbf{0}} + \mathbf{3}\ \mathbf{e}_{\mathbf{1}}$ tatsächlich eine positive vierte Potenz und damit eine positive Länge.“

Und sie rechnet:

$\mathbf{a}_{\mathbf{zwei}}{}^4$		3	5	– 16	0
		– 5	– 3	0	– 16
3	5	– 16	0	256	0
– 5	– 3	0	– 16	0	256

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a}_{\mathbf{zwei}}{}^4 = \begin{pmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 256 \end{pmatrix} = \mathbf{256}$$

Zürich – irgendwo am Seeufer

Albert: „Perfekt! Mit

$$|\mathbf{a}_{\mathbf{zwei}}| = \sqrt[4]{\mathbf{a}_{\mathbf{zwei}}{}^{4}} = \sqrt[4]{\mathbf{256}} = \mathbf{4}$$

haben wir also einen weiteren Punkt, der auf dem noch fehlenden oberen Ast des Kreises sitzt. Wenn wir jetzt einfach bei allen bisherigen Vektoren die $\mathbf{e_0}$- und die $\mathbf{e_1}$-Komponenten vertauschen, …

(siehe folgende Übersicht)

… dann haben wir genügend Vektoren, um den restlichen Halbkreis zu zeichnen.“

Mileva: „Und alle haben die Länge vier.“

Noch mehr neue Vektoren mit negativen Quadraten

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a}_{\text{null}} = 4\,\mathbf{e}_0$$

$$\mathbf{a}_{\text{eins}} = 2\sqrt{6}\,\mathbf{e}_0 + 2\sqrt{2}\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a}_{\text{eins'}} = 2\sqrt{6}\,\mathbf{e}_0 - 2\sqrt{2}\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_{\text{zwei}} = 5\,\mathbf{e}_0 + 3\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a}_{\text{zwei'}} = 5\,\mathbf{e}_0 - 3\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_{\text{drei}} = 6\,\mathbf{e}_0 + 2\sqrt{5}\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a}_{\text{drei'}} = 6\,\mathbf{e}_0 - 2\sqrt{5}\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_{\text{vier}} = 7\,\mathbf{e}_0 + \sqrt{33}\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a}_{\text{vier'}} = 7\,\mathbf{e}_0 - \sqrt{33}\,\mathbf{e}_1$$

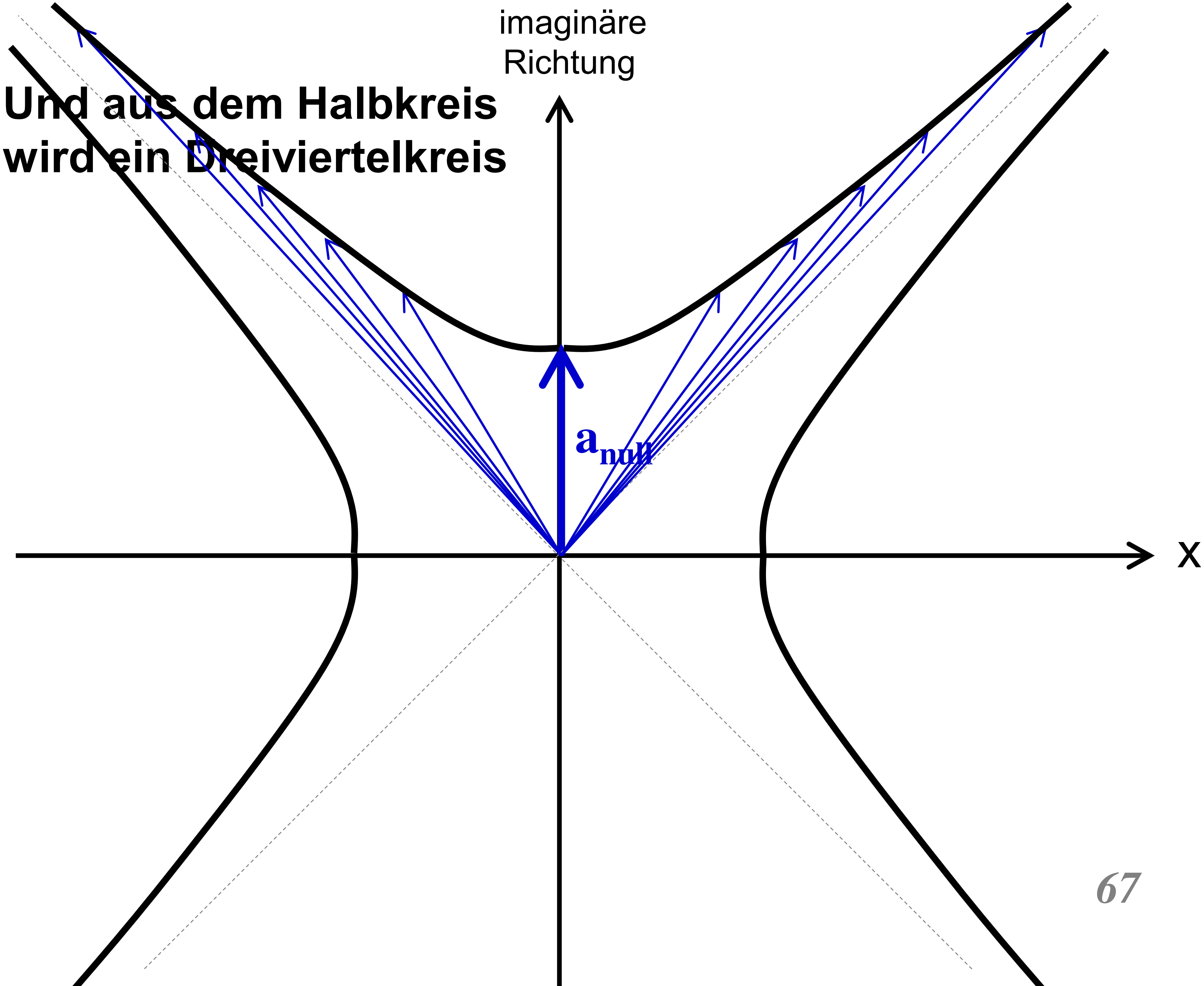
$$\mathbf{a}_{\text{fünf}} = 8\,\mathbf{e}_0 + 4\sqrt{3}\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a}_{\text{fünf'}} = 8\,\mathbf{e}_0 - 4\sqrt{3}\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_{\text{sechs}} = 9\,\mathbf{e}_0 + \sqrt{65}\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a}_{\text{sechs'}} = 9\,\mathbf{e}_0 - \sqrt{65}\,\mathbf{e}_1$$

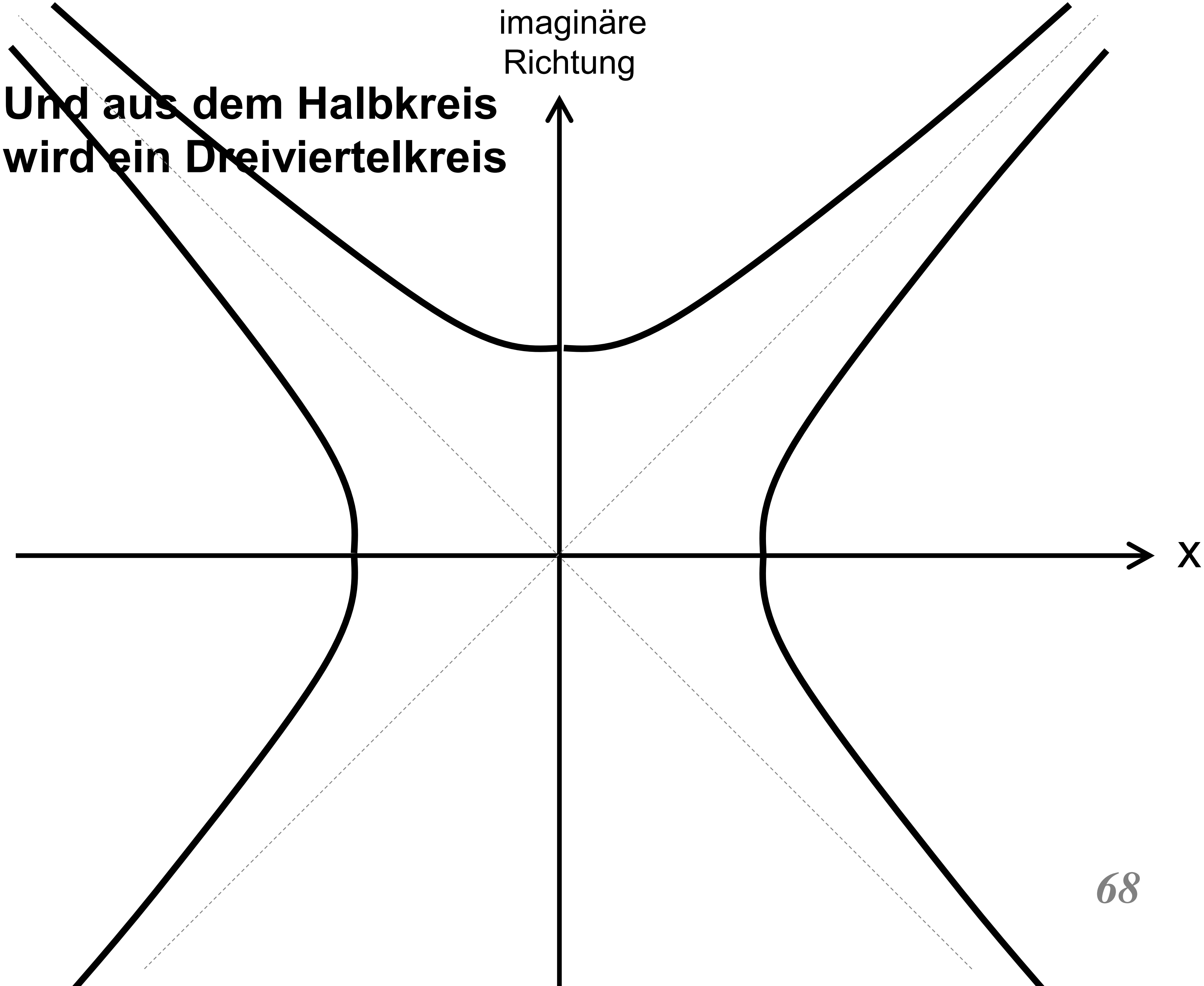
$$\mathbf{a}_{\text{sieben}} = 10\,\mathbf{e}_0 + 2\sqrt{21}\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a}_{\text{sieben'}} = 10\,\mathbf{e}_0 - 2\sqrt{21}\,\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_{\text{acht}} = 11\,\mathbf{e}_0 + \sqrt{105}\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a}_{\text{acht'}} = 11\,\mathbf{e}_0 - \sqrt{105}\,\mathbf{e}_1$$

Und aus dem Halbkreis wird ein Dreiviertelkreis



Und aus dem Halbkreis wird ein Dreiviertelkreis



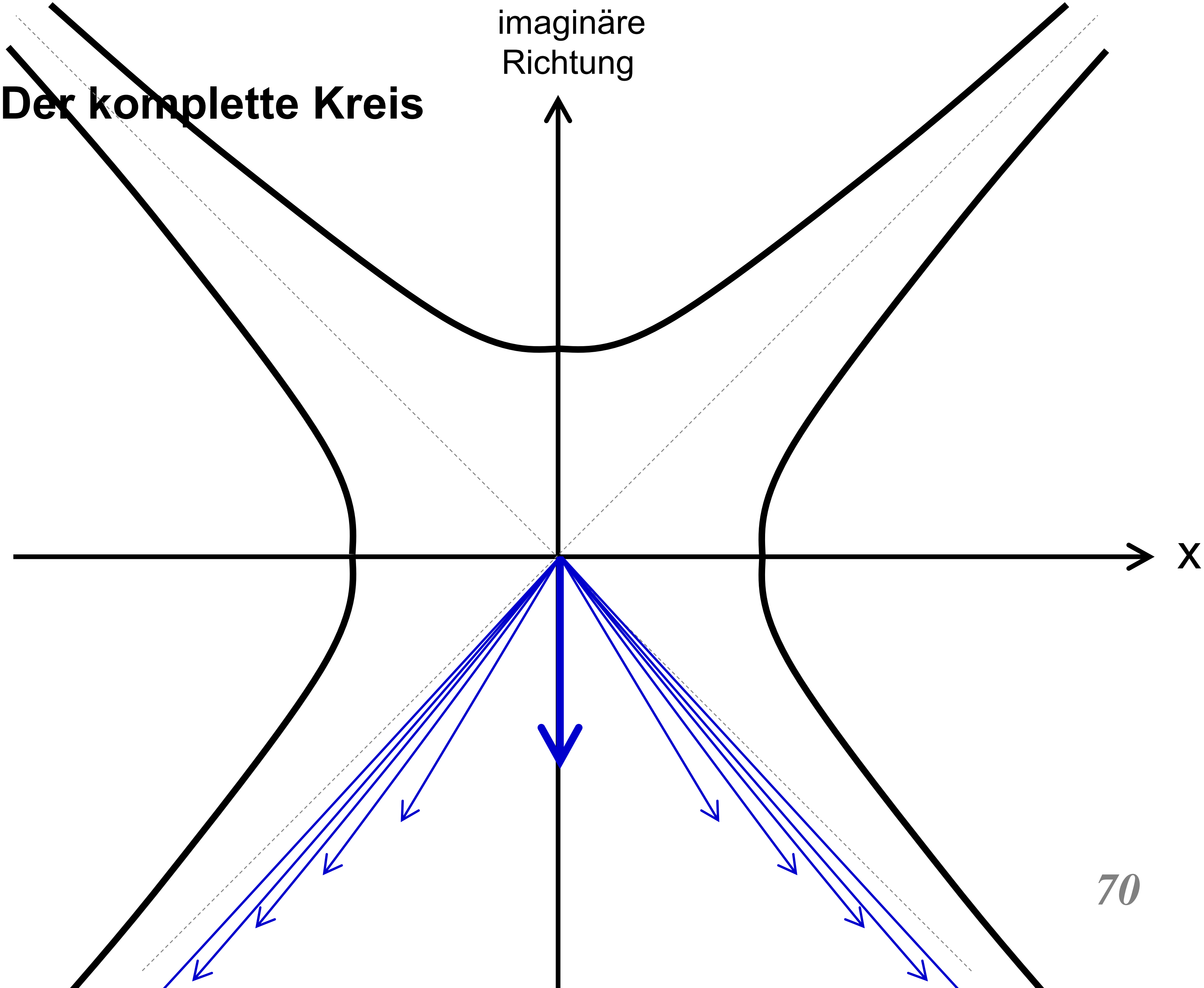
Und aus dem Halbkreis wird ein Dreiviertelkreis

Albert: „Phantastomanisch hyperbelomanisch, unser Dreiviertelkreis!“

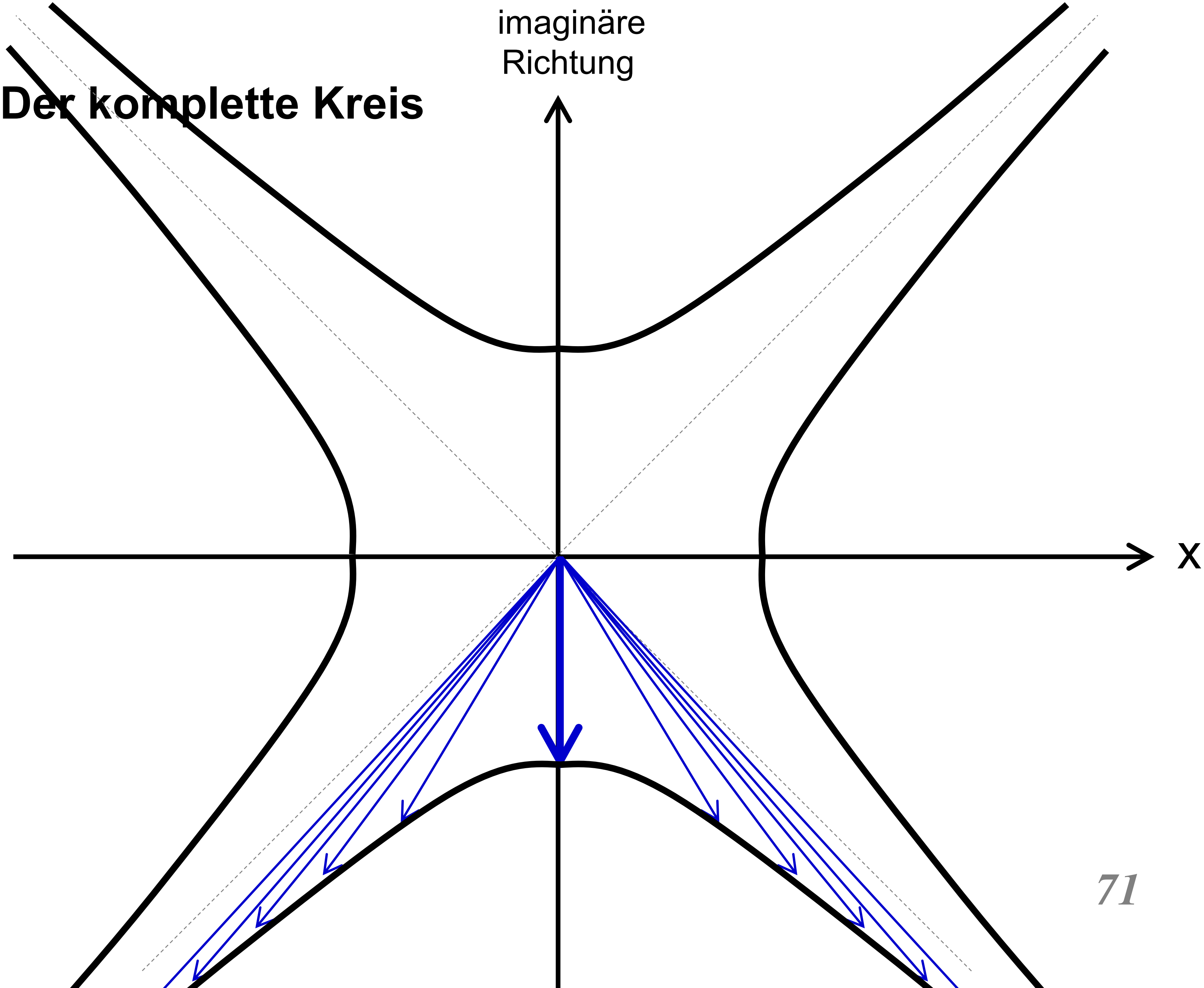
Mileva: „Und den vierten Ast unseres Kreises bekommen wir, indem wir bei allen Komponenten auf der vorvorvorletzen Folie einfach alle Vorzeichen umdrehen.“

Albert: „Ja, dann zeigen die Vektoren alle nach unten in den noch freien Sektor. Das schreibe ich jetzt aber nicht extra auf eine weitere Folie, sondern zeichne das gleich hin.“

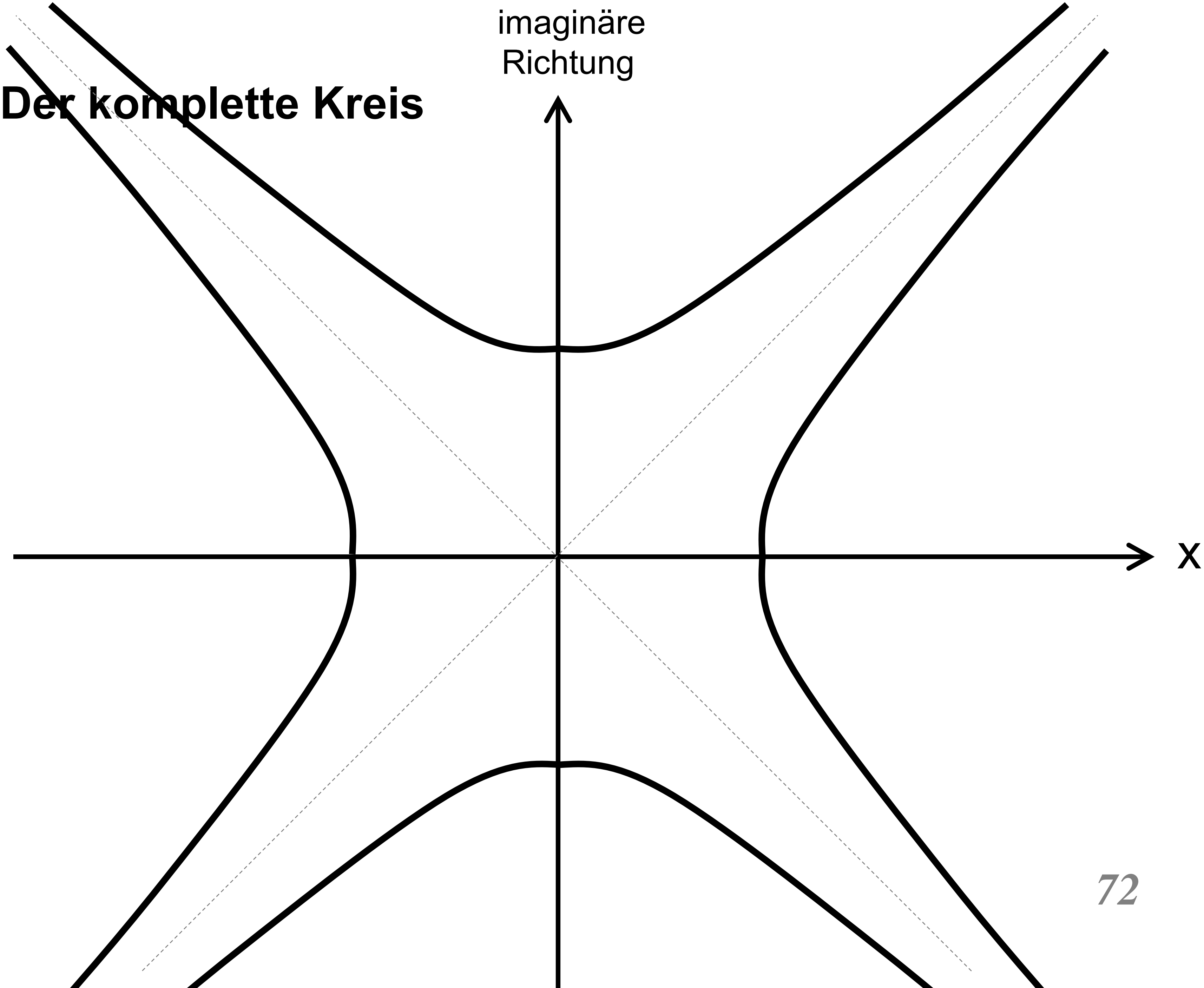
Der komplette Kreis



Der komplette Kreis



Der komplette Kreis



Der komplette Kreis

Jetzt freut sich Albert wirklich: „Absolut phantastomanisch hyperbelomanisch, unser Kreis hier!“

Und auch Mileva ist begeistert: „Das sieht aus wie mehrere Hyperbeln. Und ist doch ein echter, total mathematischer Kreis!“

Albert: „Ja, in der Mathematik ist alles anders als es ist. Überall Lug und Trug. Wir zeichnen einen einfachen Kreis uns schon behaupten alle, wir hätten eine Hyperbel gezeichnet. Die Welt ist schon komisch!“

Der komplette Kreis

Mileva: „Aber Du magst es doch komisch!“

Albert: „Ja, ich mag es lustig. Alle reden von Hyperbeln. Und in Wahrheit reden sie über Kreise. Selbst der Rindler in seinem Buch redet dauernd, äh, … wird dauernd über Hyperbeln reden!“

Mileva: „Und das Lustigste ist: Er ist nicht der einzige! Selbst der Minkowski wird in seinen Vorträgen dauernd was von Hyperbeln erzählen!“

Albert: „Dieser Schlawiner! Wo der doch genau weiß, dass es Kreise sind.“

Der komplette Kreis

Mileva: „Und zeigen wir ihm unsere Zeichnung?“

Albert: „Klar zeigen wir ihm unseren Kreis. Aber zuerst: Hier ist der See! Wer ist zuerst drin?“

Und schon rennen Albert und Mileva los und springen ins nasskalte Wasser. Es ist auch ein heißer Sommertag. Klar, dass sie dann lieber nasskaltes Wasser mögen. Wer würde denn sonst auch mitten im Juli in trockenwarmes Wasser springen?

Ergänzungsfolien 08-Euklid: Minkowski mag Hyperbeln

Mathematik 1 des Bachelor-Studiengangs Ingenieurinformatik der HTW Berlin

Corona-Semester Sommer 2020

– Dr. M. Horn –

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Prof. Minkowski sitzt in seinem Büro und betrachtet die Skizze der Kreiszeichnung, die ihm Albert und Mileva zuvor vorbeigebracht haben. Er schüttelt den Kopf und murmelt: „Einstein, Einstein, müssen Sie immer so einen Quatsch machen? Verdrehen Sie dem kleinen Fräulein Marić doch nicht so den Kopf.“

Aber Albert und Mileva sind schon wieder weg. Prof. Minkowski murmelt nur zu sich selbst. Und wieder schaut er auf die Skizze und murmelt weiter: „Na ja, das scheint schon ein Kreis zu sein, Kinder, Kinder, ich mag aber keine Kreise!“

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Prof. Minkowski: „Kinder, Kinder, Kreise mag ich wirklich nicht! Ich sollte mal schauen, ob ich das mathematisch nicht einfach als Hyperbel aufschreiben kann. So eine schöne Hyperbel mit

$$y = \frac{1}{x}$$

wäre doch ganz nett."

Und er grübelt und murmelt und grübelt: „Oder meinetwegen auch …

$$y = \frac{4}{x}$$

… oder so ähnlich."

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Prof. Minkowski: „Oder meinetwegen auch …

$$y = \frac{4}{x}$$

… oder so ähnlich. Mir soll‘s recht sein. In Cöln glauben die mir ja eh‘ alles. Da kann ich dann den ganz großen Karneval machen und alle werden begeistert sein.“

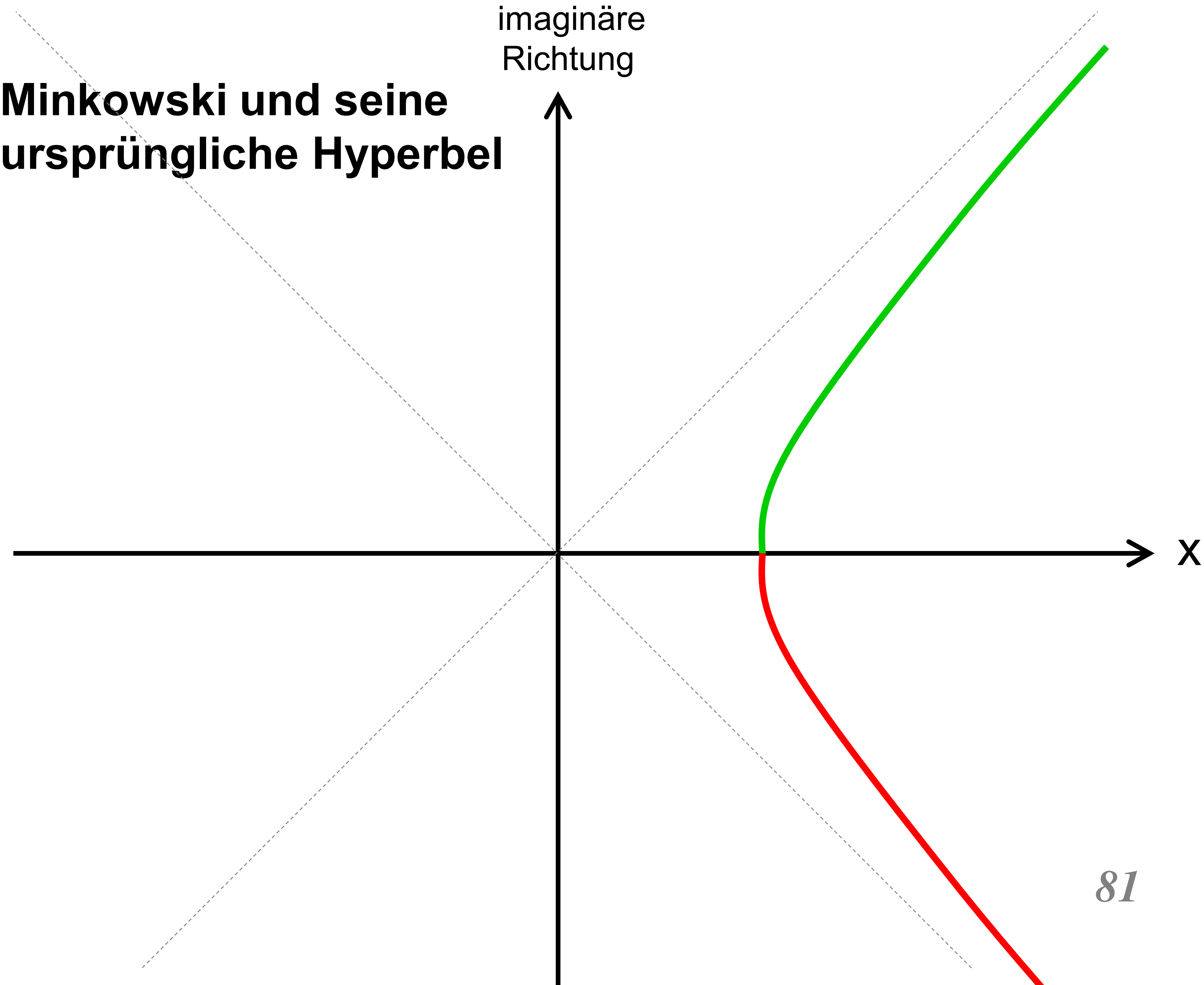
Und dann kurze Zeit später: „Ich mach‘ jetzt einfach aus dem Kreis eine Hyperbel, eine schöne, Euklidische, absolut ehrenwerte Hyperbel! Das mach‘ ich jetzt einfach!“

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Und dann dreht und ruckelt er die Zeichnung von Albert und Mileva hin und her: „Also man müsste den Graphen irgendwie spiegeln können, damit aus diesem einen rechten Ast, ja, diesem Hyperbelast ganz rechts …“

Und er holt weitere dicke Farbstifte aus seinem Schreib-tisch und markiert den rechten Hyperbelast zweifarbig.

Minkowski und seine ursprüngliche Hyperbel

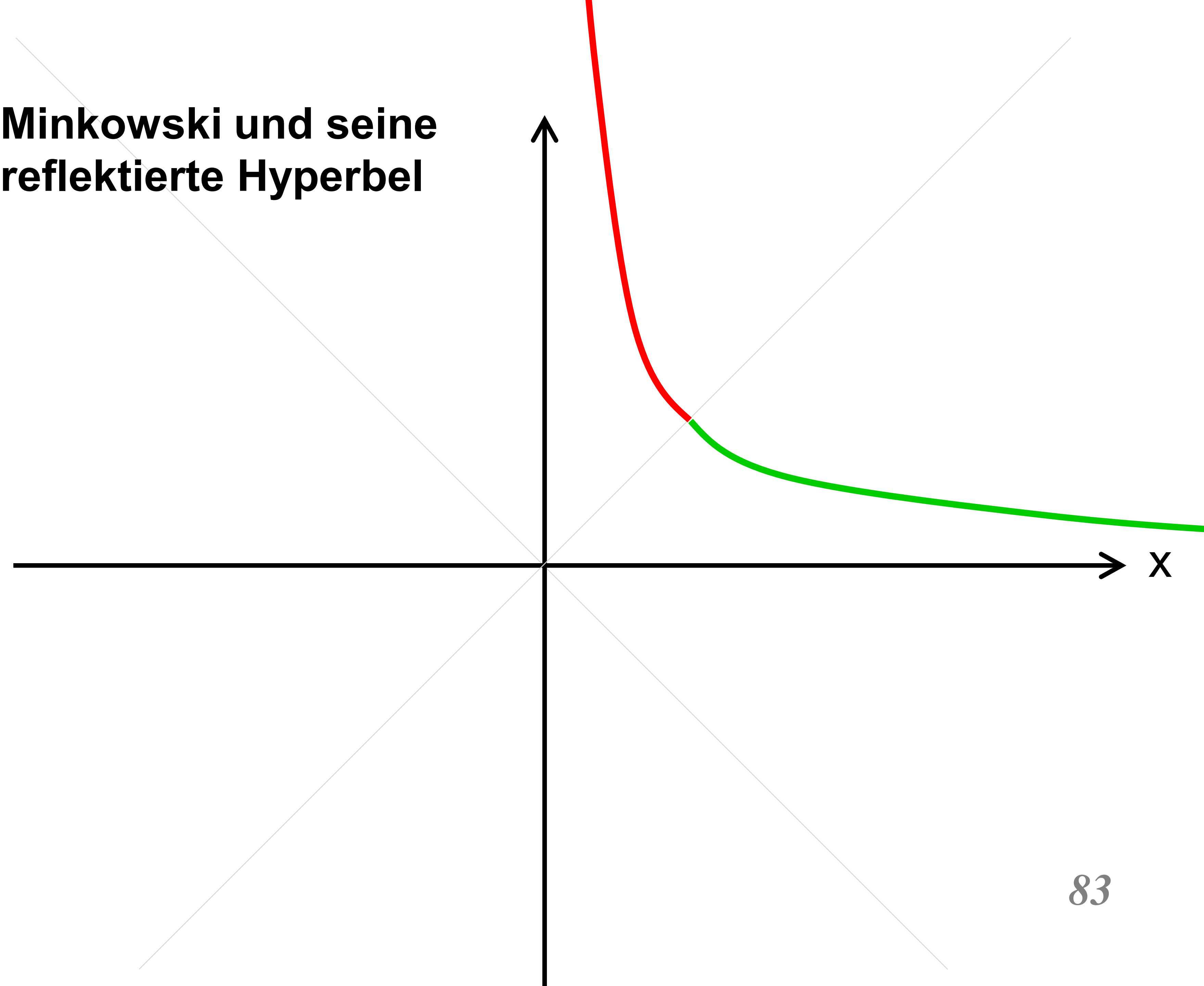


Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Und murmelnd geht es weiter: „Und nach dem Reflektieren müsste dann der rote Astteil nach oben weisen, so als Asymptote zur y-Achse. Und der grüne Astteil, der zeigt dann nach rechts und wird zu einer Asymptote der x-Achse, perfekt, so mach ich's!"

Und er zeichnet jetzt die neue Hyperbellage auf einem anderen Blatt Papier.

Minkowski und seine reflektierte Hyperbel

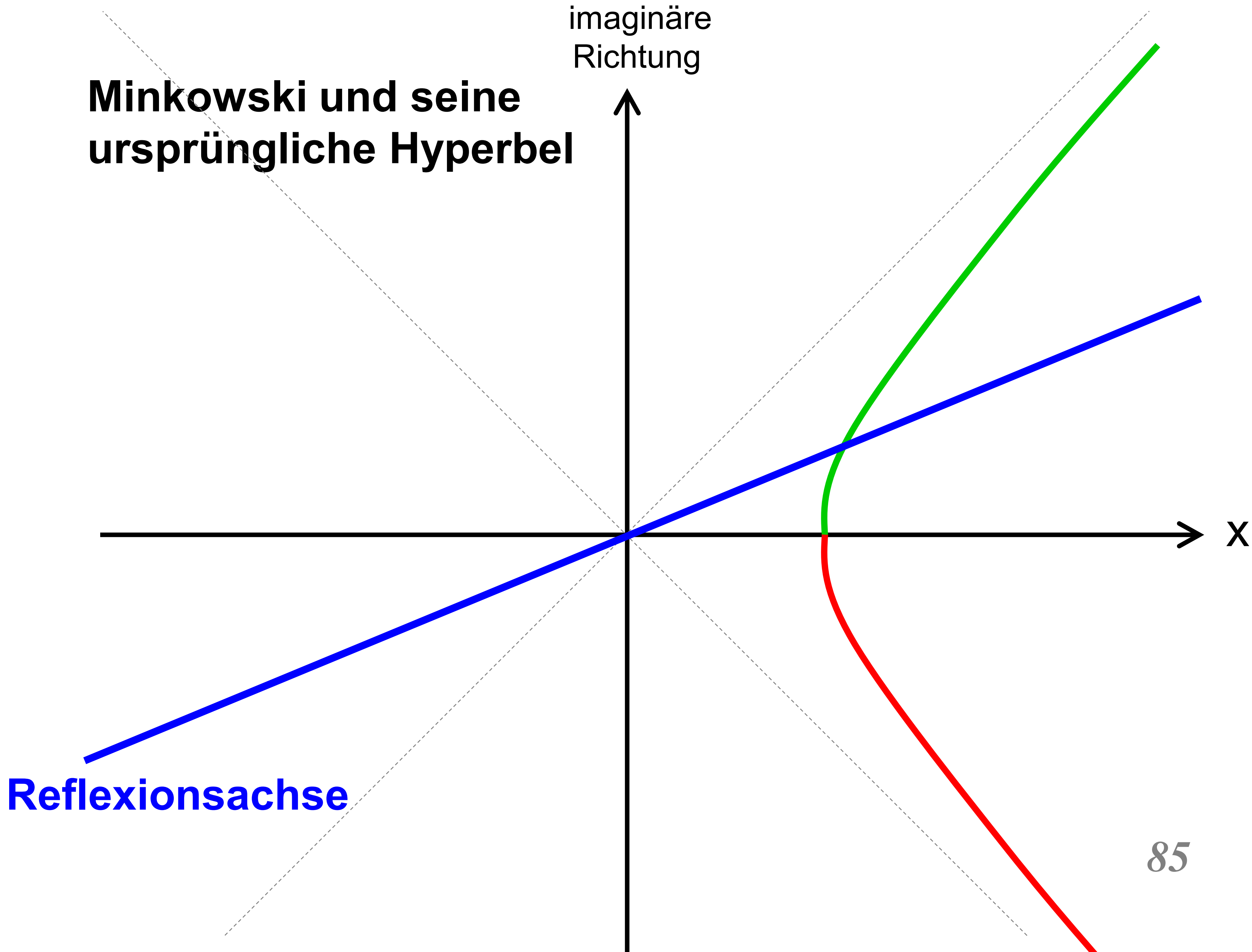


Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Und dann stockt er: „Ja mei‘, wo wär‘ denn dann die Reflexionsachse? Ich schätze mal, ich schätze mal. Ah, ich hab‘s. Die Hauptdiagonale wird zur neuen x-Achse. Und dann ist doch klar: Die Nebendiagonale, die von links oben nach rechts unten geht, die wird muss zur neuen y-Achse werden. Hmm, ja, hmm doch, die Reflexionsachse, die ist dann die Winkelhalbierende zwischen der Hauptdiagonalen und der ursprünglichen x-Achse.“

Und ganz stolz zeichnet er das auch noch in die Skizze von Albert und Mileva ein, mit einem dicken, blauen Stift!

Minkowski und seine ursprüngliche Hyperbel



Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Und weiter überlegt er sich: „Also, bevor ich irgendeinen Vektor reflektieren kann, muss ich erst einmal wissen, wie dieser Vektor aussieht. Also, wie ist ein Vektor, den mir diesen Einstein-Marić-Kreis liefert, aufgebaut?

Klar, dieser Einstein und dieses Fräulein Marić haben in meiner Vorlesung nicht aufgepasst und so verrückte relativistische Koordinaten genommen. Der Vektor **r** hat also einen $\mathbf{e_0}$-Teil und einen $\mathbf{e_1}$-Teil …“

$$\mathbf{r} = \mathbf{?}\, \mathbf{e_0} + \mathbf{?}\, \mathbf{e_1}$$

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„… einen $\mathbf{e_0}$-Teil und einen $\mathbf{e_1}$-Teil …“

$$\mathbf{r} = \mathbf{?}\, \mathbf{e_0} + \mathbf{?}\, \mathbf{e_1}$$

Und weiter überlegt er sich: „Die $\mathbf{e_1}$-Achse ist ja die x-Achse. Also nenne ich die Komponente in $\mathbf{e_1}$-Richtung doch ganz einfach x …“

$$\mathbf{r} = \mathbf{?}\, \mathbf{e_0} + x\, \mathbf{e_1}$$

„Und dieser verunglückte Möchtgern-Kreis hatte doch einen einen Radius von **r** = **4** …“

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„… einen Radius von **r** = **4**, und für alle diese Kreisvektoren gilt …“

$$\mathbf{r} = y\,\mathbf{e_0} + x\,\mathbf{e_1}$$

Er stutzt: „y hatte der Einstein doch gar nicht geschrieben. Verdammter Bengel! Aber ich will Hyperbeln. Ich schreibe das halt jetzt so. Und dann kann ich weiterrechnen. Quadrieren sollte ich ja noch können auf meine alten Tage …“

$$\mathbf{4}^2 = (y\,\mathbf{e_0} + x\,\mathbf{e_1})^2$$

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„Quadrieren sollte ich ja noch können auf meine alten Tage …“

$$\mathbf{4}^2 = (y\,\mathbf{e_0} + x\,\mathbf{e_1})^2$$

$$\mathbf{16} = y^2\,\mathbf{e_0}^2 + xy\,\mathbf{e_0 e_1} + xy\,\mathbf{e_1 e_0} + x^2\,\mathbf{e_1}^2$$

$$= y^2\,(-\,\mathbf{1}) + xy\,\mathbf{e_0 e_1} + xy\,\mathbf{e_1 e_0} + x^2\,\mathbf{1}$$

„Ach nee, das wird mir jetzt zu bunt! Ich bin doch kein kleiner, doofer Computer, der nur mit (2 x 2)-Matrizen rechnet! Ich, Minkowski von der ETH, ich rechne doch mit anständigen, mit reellen Zahlen. Diesen dick gedruckten Unsinn, den lassen wir bei den Skalaren lieber jetzt …“

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„… gedruckten Unsinn, den lassen wir bei den Skalaren lieber jetzt…“

$$\mathbf{4}^2 = (y\,\mathbf{e_0} + x\,\mathbf{e_1})^2$$

$$\mathbf{16} = y^2\,\mathbf{e_0}^2 + xy\,\mathbf{e_0 e_1} + xy\,\mathbf{e_1 e_0} + x^2\,\mathbf{e_1}^2$$

$$16 = y^2\,(-1) + xy\,\mathbf{e_0 e_1} + xy\,\mathbf{e_1 e_0} + x^2\,1$$

$$16 = -y^2 + xy\,\mathbf{e_0 e_1} - xy\,\mathbf{e_0 e_1} + x^2$$

$$16 = -y^2 + x^2$$

„Dann ist die y-Komponente doch einfach …“

$$y^2 = x^2 - 16$$

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„Also wenn ich hier reelle Zahlen nehme, dann ist die y-Komponente doch einfach …

$$y^2 = x^2 - 16$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 16}$$

Das Pluszeichen für den oberen, grünen Hyperbelteil. Und das Minuszeichen für den unteren, roten Hyperbelteil. Und das setzte ich jetzt als meine Fragezeichen-Komponente in die Gleichung für die Hyperbelvektoren, äh … Kreisvektoren ein …“

$$\mathbf{r} = \mathbf{?}\,\mathbf{e_0} + x\,\mathbf{e_1}$$

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„ äh … Kreisvektoren ein …“

$$\mathbf{r} = \mathbf{?}\,\mathbf{e_0} + x\,\mathbf{e_1}$$

$$\mathbf{r} = \pm\sqrt{x^2 - 16}\,\mathbf{e_0} + x\,\mathbf{e_1}$$

Und auf einmal ärgert sich der Minkowski und poltert los: „Nein, nein, nein! Ich möchte keinen Kreis! Nein, nein, nein! Ich möchte eine Hyperbel! Diesem Einstein, dem könnt‘ ich ja den Hals umdrehen. Ich mache mir jetzt meine Hyperbel, indem ich diesen vermaledeiten $\mathbf{e_0}$-Basisvektor durch meinen schönen $\mathbf{e_2}$-Basisvektor ersetze. So wird ein Schuh draus!“

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Und dann zieht Prof. Minkowski einen großen, großen Radiergummi aus seiner Schreibtischschublade und radiert in seiner Gleichung

$$\mathbf{r} = \pm \sqrt{x^2 - 16}\, \mathbf{e_0} + x\, \mathbf{e_1}$$

einfach den $\mathbf{e_0}$-Basisvektor weg und ersetzt ihn durch:

$$\mathbf{r} = \pm \sqrt{x^2 - 16}\, \mathbf{e_2} + x\, \mathbf{e_1}$$

Und dann denkt er sich: „Äh, nein, besser ist es in ordentlicher Reihenfolge …“

$$\mathbf{r} = x\, \mathbf{e_1} \pm \sqrt{x^2 - 16}\, \mathbf{e_2}$$

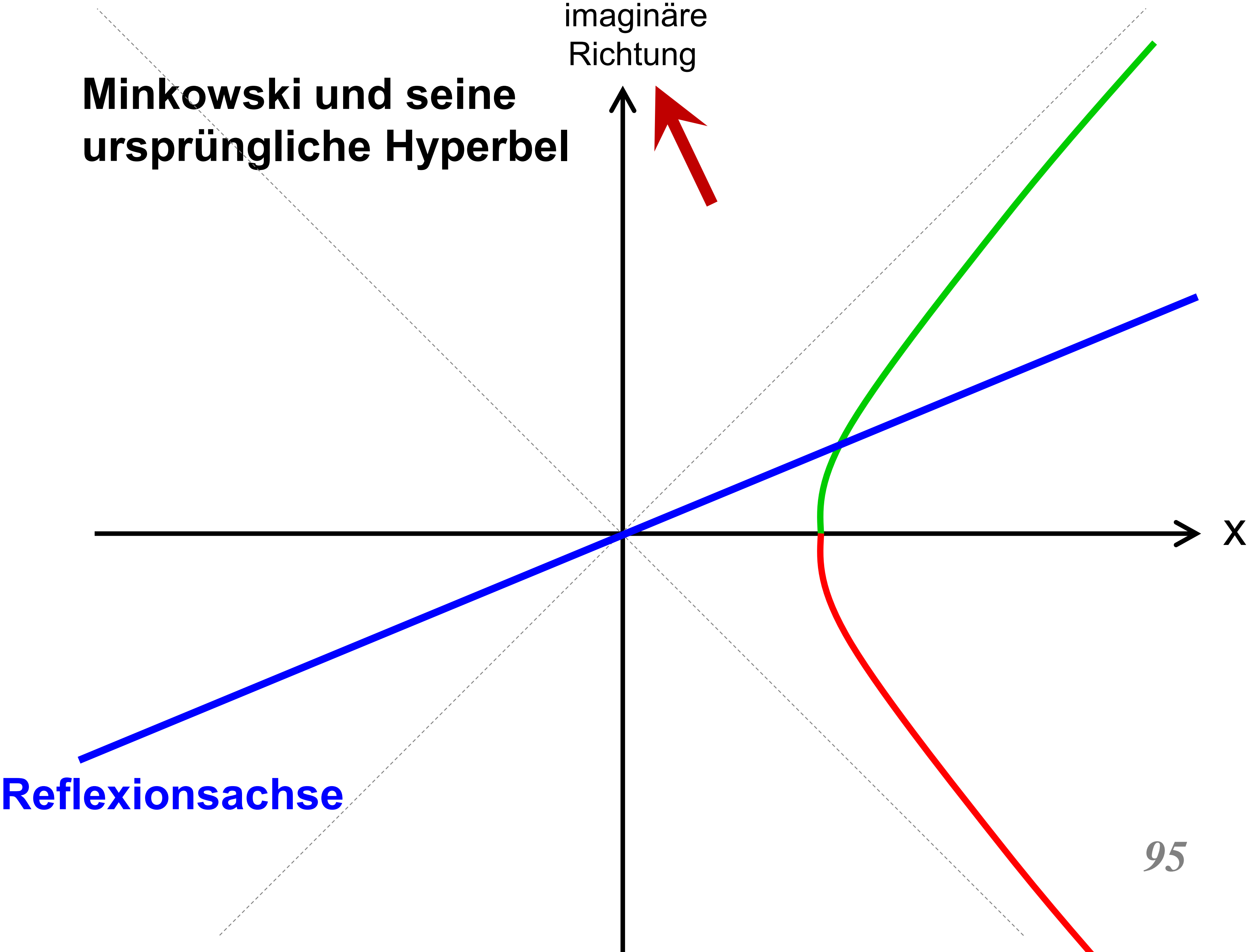
Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

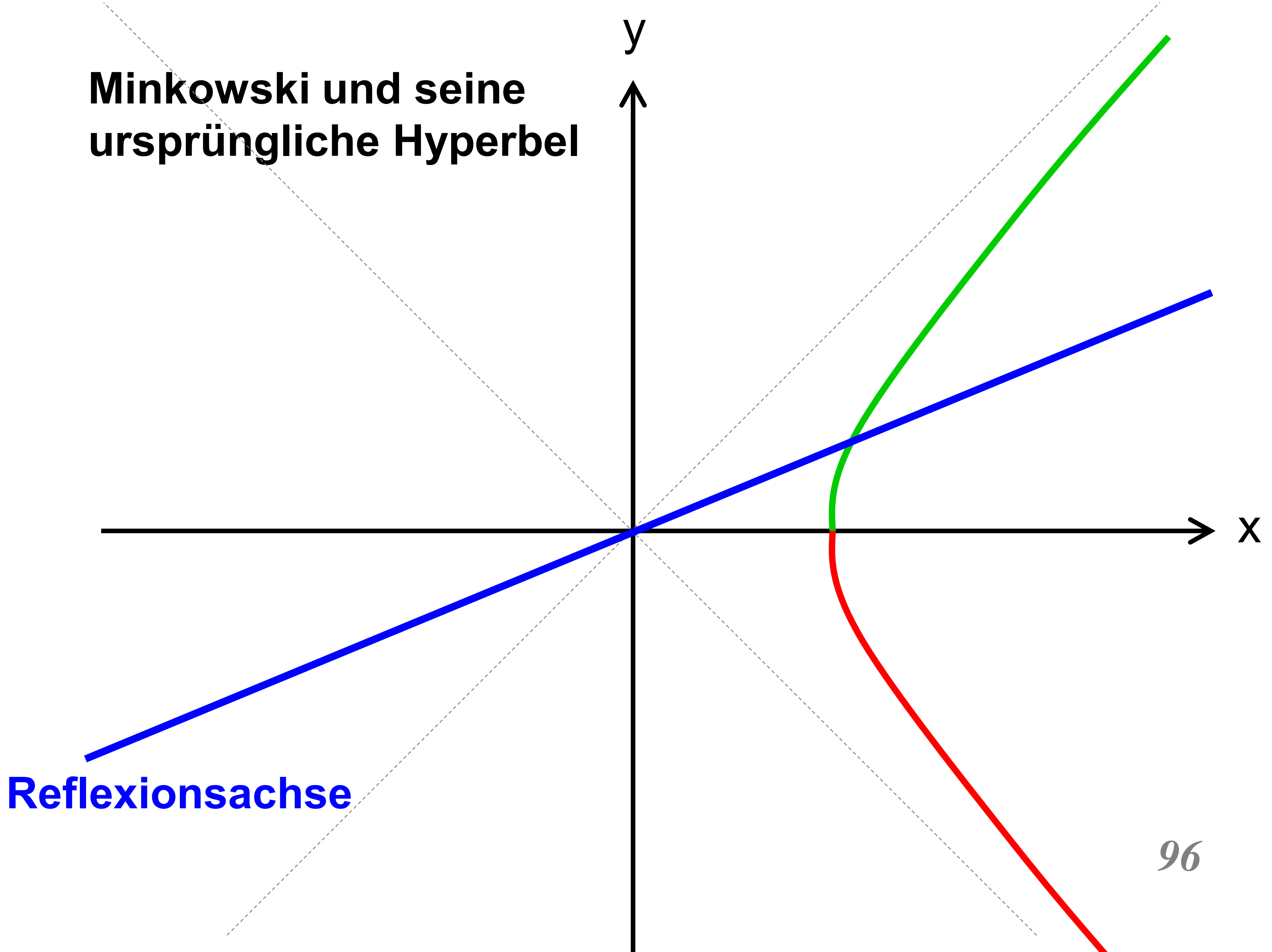
„… in ordentlicher Reihenfolge …“

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{e_1} \pm \sqrt{x^2 - 16}\,\mathbf{e_2}$$

Und in der Zeichnung von Albert und Mileva, da radiert Prof. Minkowski auch!

Minkowski und seine ursprüngliche Hyperbel





y
Minkowski und seine
ursprüngliche Hyperbel
x
Reflexionsachse

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„So,“ denkt er sich, „jetzt habe ich endlich richtige, schöne, wunderbare, Euklidische Hyperbeln! Jetzt muss ich die nur noch an der Reflexionsachse reflektieren, um eine schöne Gleichung

$$y = \frac{4}{x}$$

oder so ähnlich für die y-Komponente zu bekommen.“

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„So," denkt er sich, „jetzt habe ich endlich richtige, schöne, wunderbare, Euklidische Hyperbeln! Jetzt muss ich die nur noch an der Reflexionsachse reflektieren, um eine schöne Gleichung

$$y = \frac{4}{x}$$

oder so ähnlich für die y-Komponente zu bekommen.

Doch eins habe ich noch vergessen: Wie lautet denn der Reflexionsvektor **n**?"

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Jetzt muss Prof. Minkowski etwas nachdenken: „Also, ich nehme wieder die ganz normalen, Euklidischen Basiselemente, die wir aus den Ergänzungsfolien 01 bis 06 kennen …“

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \mathbf{1} \quad \rightarrow \text{ Basisskalar}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \mathbf{e_1} \quad \rightarrow \text{ Basisvektor in x-Richtung}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \mathbf{e_2} \quad \rightarrow \text{ Basisvektor in y-Richtung}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \mathbf{e_1 e_2} \quad \rightarrow \text{ Basis-Bivektor der xy-Ebene}$$

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Jetzt muss Prof. Minkowski etwas nachdenken: „Also, ich nehme wieder die ganz normalen, Euklidischen Basiselemente, die wir aus den Ergänzungsfolien 01 bis 06 kennen.

Der Reflexionsvektor **n** ist dann genau die Winkelhalbierende zwischen der Hauptdiagonalen, die durch den Einheitsvektor

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2})$$

repräsentiert wird, und der x-Achse, die durch den Einheitsvektor $\mathbf{e_1}$ repräsentiert wird. Also zeigt die Summe dieser beiden Vektoren …“

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„Der Reflexionsvektor **n** ist dann genau die Winkelhalbierende zwischen der Hauptdiagonalen, die durch den Einheitsvektor

$$\mathbf{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

repräsentiert wird, und der x-Achse, die durch den Einheitsvektor $\mathbf{e}_1$ repräsentiert wird. Also zeigt die Summe dieser beiden Vektoren

$$\mathbf{d} + \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_1$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2$$

in Richtung der Reflexionsachse."

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„Also $\mathbf{d} + \mathbf{e_1} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} + \mathbf{1}\right) \mathbf{e_1} + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \mathbf{e_2}$ zeigt nun in Richtung der Reflexionsachse, ist aber noch kein Einheitsvektor **n**. Das muss ich noch reparieren.“

Und er rechnet:

$$(\mathbf{d} + \mathbf{e_1})^2 = \left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} + \mathbf{1}\right)^{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}^2}$$

$$= \mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{2}}$$

„Das ist also das Quadrat der Länge des Vektors $\mathbf{d} + \mathbf{e_1}$, der in Richtung der Reflexionsachse zeigt.“

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„Um also einen Einheitsvektor $\mathbf{n}$ als Reflexionsvektor zu erhalten, muss der Vektors $\mathbf{d} + \mathbf{e_1}$ nur durch seine Länge, der Wurzel aus $(\mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{2}})$, geteilt werden …“

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{d} + \mathbf{e_1}}{\sqrt{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{2}}}}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{2}}}\ \mathbf{e_1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{2} - \sqrt{\mathbf{2}}}\ \mathbf{e_2}$$

„Und das sollte man noch nachrechnen,“ denkt er sich.

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Und dann denkt er sich: „Ach Quatsch, sollen das doch die Studenten nachrechnen. Ich mach‘s mir einfach und schreibe jetzt einfach…“

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{d} + \mathbf{e_1}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\ \mathbf{e_1} + \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\ \mathbf{e_2}$$

$$= \cos 22{,}5°\ \mathbf{e_1} + \sin 22{,}5°\ \mathbf{e_2}$$

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„Und jetzt brauche ich nur noch das Sandwich-Produkt **n r n** auszurechnen. Für den oberen, grünen Hyperbel-ast sind dies …

$$\pm\sqrt{x^2 - 16}$$

$$\mathbf{n\,r\,n} = (\cos 22{,}5°\ \mathbf{e_1} + \sin 22{,}5°\ \mathbf{e_2})\ (x\ \mathbf{e_1} + y\ \mathbf{e_2})\ \mathbf{n}$$

$$= ((x \cos 22{,}5° + y \sin 22{,}5°)\ \mathbf{1} + (-x \sin 22{,}5° + y \cos 22{,}5°)\ \mathbf{e_1 e_2})\ \mathbf{n}$$

… und wenn ich y schreibe muss ich mich noch nicht für ein Plus oder Minus dieser beiden Hyperbelteil-äste entscheiden."

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„Und kleiner schreiben sollte ich auch, wo ist denn all‘ der Platz hin auf diesem Stück Papier?“

n r n

$$= (\cos 22{,}5° \, \mathbf{e_1} + \sin 22{,}5° \, \mathbf{e_2}) \, (x \, \mathbf{e_1} + y \, \mathbf{e_2}) \, \mathbf{n}$$

$$= \big((x \cos 22{,}5° + y \sin 22{,}5°) \, \mathbf{1} + (- x \sin 22{,}5° + y \cos 22{,}5°) \, \mathbf{e_1 e_2}\big) \, (\cos 22{,}5° \, \mathbf{e_1} + \sin 22{,}5° \, \mathbf{e_2})$$

$$= (x \cos^2 22{,}5° + y \sin 22{,}5° \cos 22{,}5° - x \sin^2 22{,}5° + y \sin 22{,}5° \cos 22{,}5°) \, \mathbf{e_1} + (x \sin 22{,}5° \cos 22{,}5° + y \sin^2 22{,}5° + x \sin 22{,}5° \cos 22{,}5° - y \cos^2 22{,}5°) \, \mathbf{e_2}$$

$$= (x (\cos^2 22{,}5° - \sin^2 22{,}5°) + y \, 2 \sin 22{,}5° \cos 22{,}5°) \, \mathbf{e_1} + (x \, 2 \sin 22{,}5° \cos 22{,}5° + y (\sin^2 22{,}5° - \cos^2 22{,}5°)) \, \mathbf{e_2}$$

$$= (x \cos 45° + y \sin 45°) \, \mathbf{e_1} + (x \sin 45° - y \cos 45°) \, \mathbf{e_2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (x + y) \, \mathbf{e_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} (x - y) \, \mathbf{e_2}$$

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„Aha, bei $\mathbf{n\,r\,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)\,\mathbf{e_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)\,\mathbf{e_2}$

haben wir also eine neue x- und y-Komponente von

$$x_{neu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$$

und

$$y_{neu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$$

weil unser neuer Vektor doch als

$$\mathbf{r_{neu}} = \mathbf{n\,r\,n} = x_{neu}\,\mathbf{e_1} + y_{neu}\,\mathbf{e_2}$$

geschrieben werden kann. Und das passt doch prima, weil, weil, also …“

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„Also $x_{neu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$

und $y_{neu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$

passen doch prima, weil ich das doch multiplizieren kann. Und die dritte Binomische Formel haben wir ja auch noch …“

$$x_{neu}\, y_{neu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)\,\frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„Und vorhin, da beim Quadrieren, da war ja

$$y^2 = x^2 - 16$$

Das hätte ich mal lieber als $\quad x^2 - y^2 = 16$

schreiben sollen, so dass ich damit jetzt

$$\begin{aligned} x_{neu}\, y_{neu} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)\,\frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 16 \\ &= 8 \end{aligned}$$

alles ordentlich zusammenfassen kann.“

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Und da strahlt Prof. Minkowski über‘s ganze Gesicht und freut sich und klatscht sich auf die Schenkel und freut sich: „Ist das nicht eine wunderschöne, ganz exquisite Hyperbel! Eine ganz, ganz echte, wunderbare Hyperbel …“

$$x_{neu}\, y_{neu} = 8$$

$$\Rightarrow \qquad y_{neu} = \frac{8}{x_{neu}}$$

„… eine hübsch platzierte Hyperbel, bei der die neuen x- und y-Achsen ganz dolle Asymptoten sind!“ Und er klatscht sich nochmal auf die Schenkel und freut sich noch viel mehr!

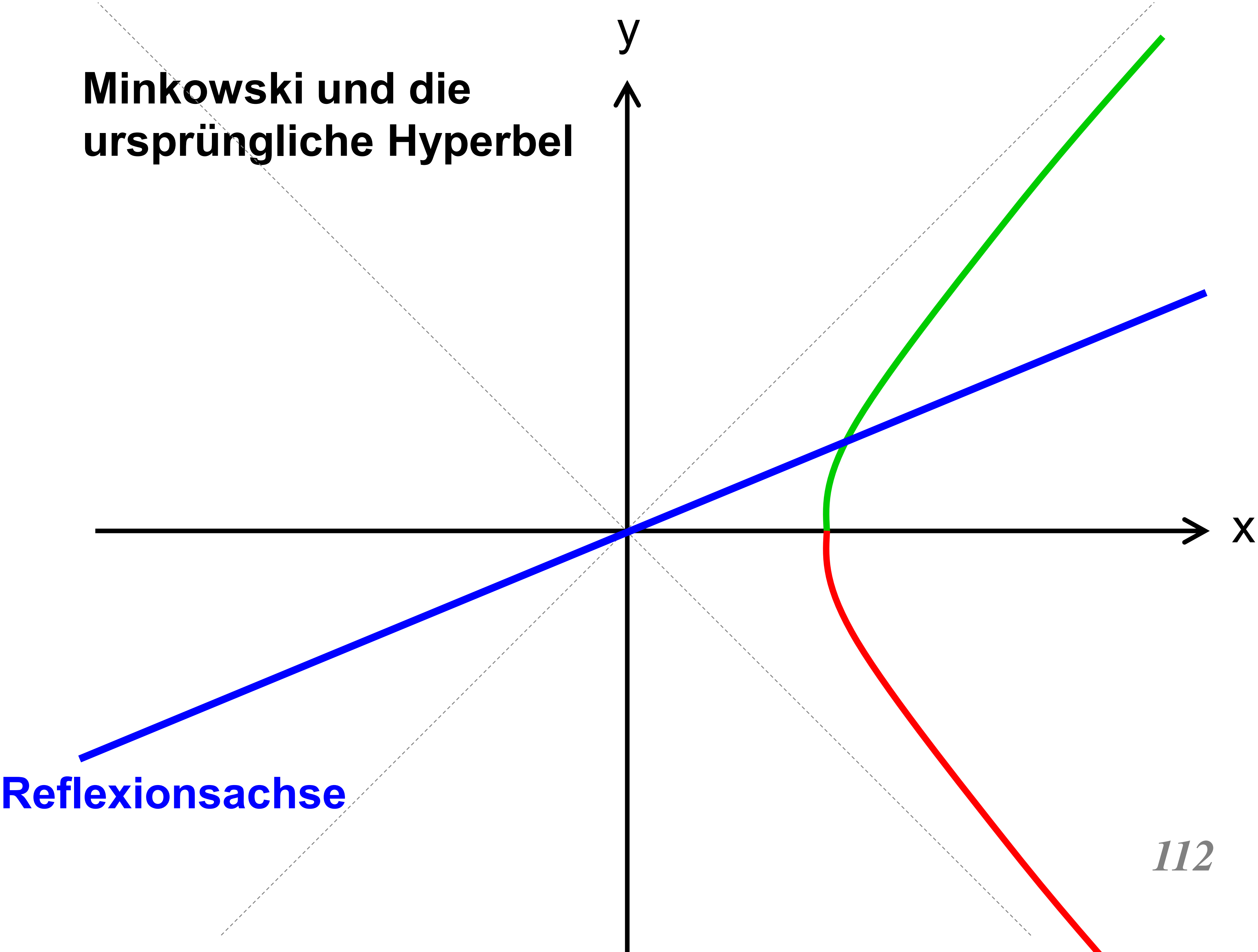
Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Doch dann runzelt er die Stirn: „Nein, in einer Klausur kann ich das nicht bringen. Das ist doch nur eine Reflexion. Für eine Klausur ist das zu, zu … (er sucht nach dem richtigen Wort.) Für eine Klausur ist das, ich weiß auch nicht, ich sollte besser eine Rotation in der Klausur abfragen. Das sieht einfach besser aus!

Wenn der Einstein und die Mileva mal eine Rotation ausrechnen sollen, dann werden die aber staunen! Vielleicht sollte ich die komische Hyperbel lieber drehen statt spiegeln, das geht doch auch!“

Und dann schaut er wieder auf die Zeichnung von Albert und Mileva …

Minkowski und die ursprüngliche Hyperbel

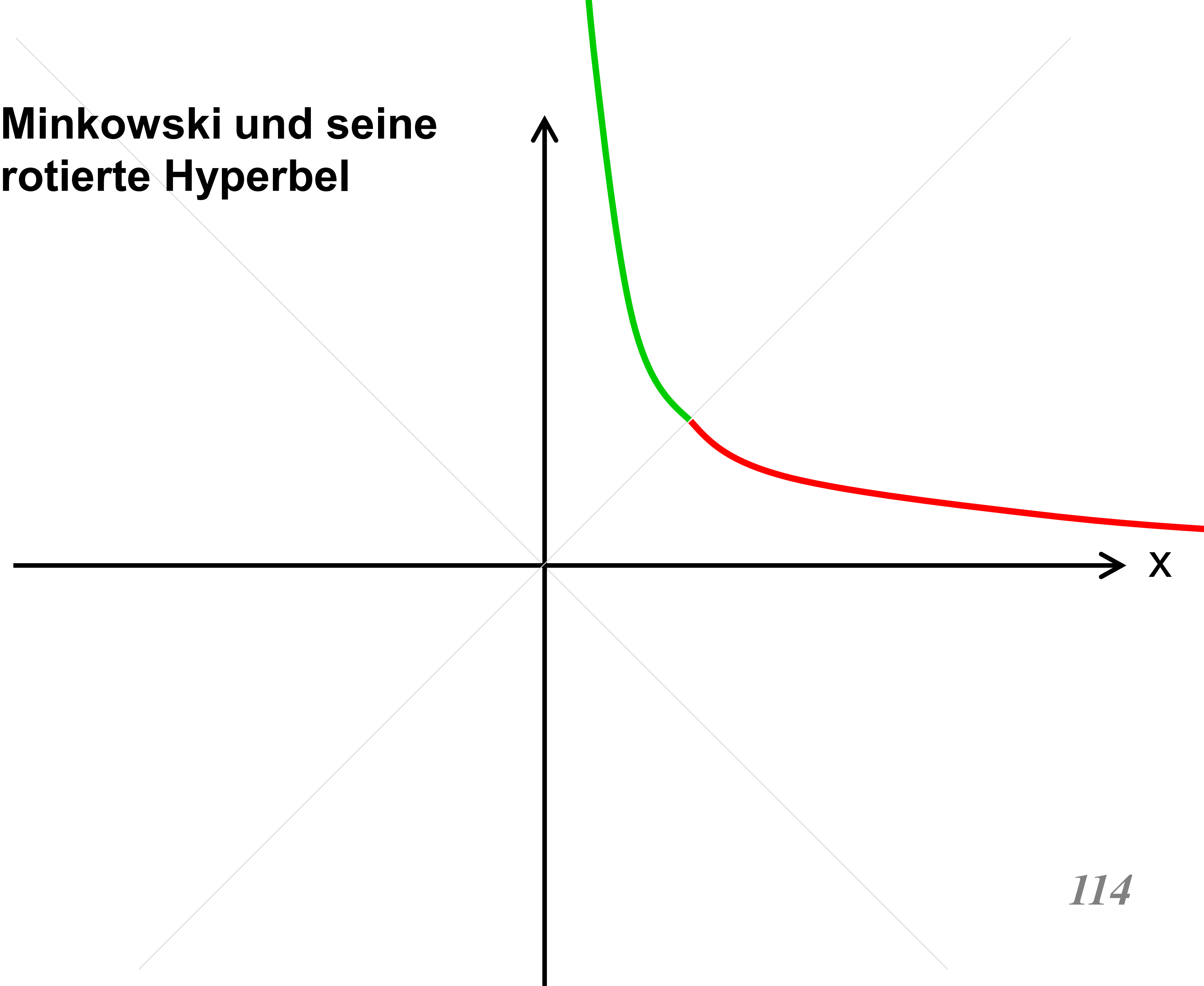


Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Und dann schaut er wieder auf die Zeichnung von Albert und Mileva und dann schaut er wieder auf seine eigene Skizze und dann ändert er in seiner eigenen Skizze die Farben: „So, der grüne Hyperbelteil soll nach der

Drehung weiter nach oben zeigen. Also grün bleibt oben. Und der rote Hyperbelteil soll gefälligst nach unten zeigen. Rot bleibt unten. Das will ich jetzt so!“

Minkowski und seine rotierte Hyperbel



Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Und er grübelt: „Ich drehe also die ursprüngliche Hyperbel jetzt um $\pi/4 = 45°$ entgegen dem Uhrzeigersinn. Da brauche ich dann ja auch zwei Reflexionen dafür.“

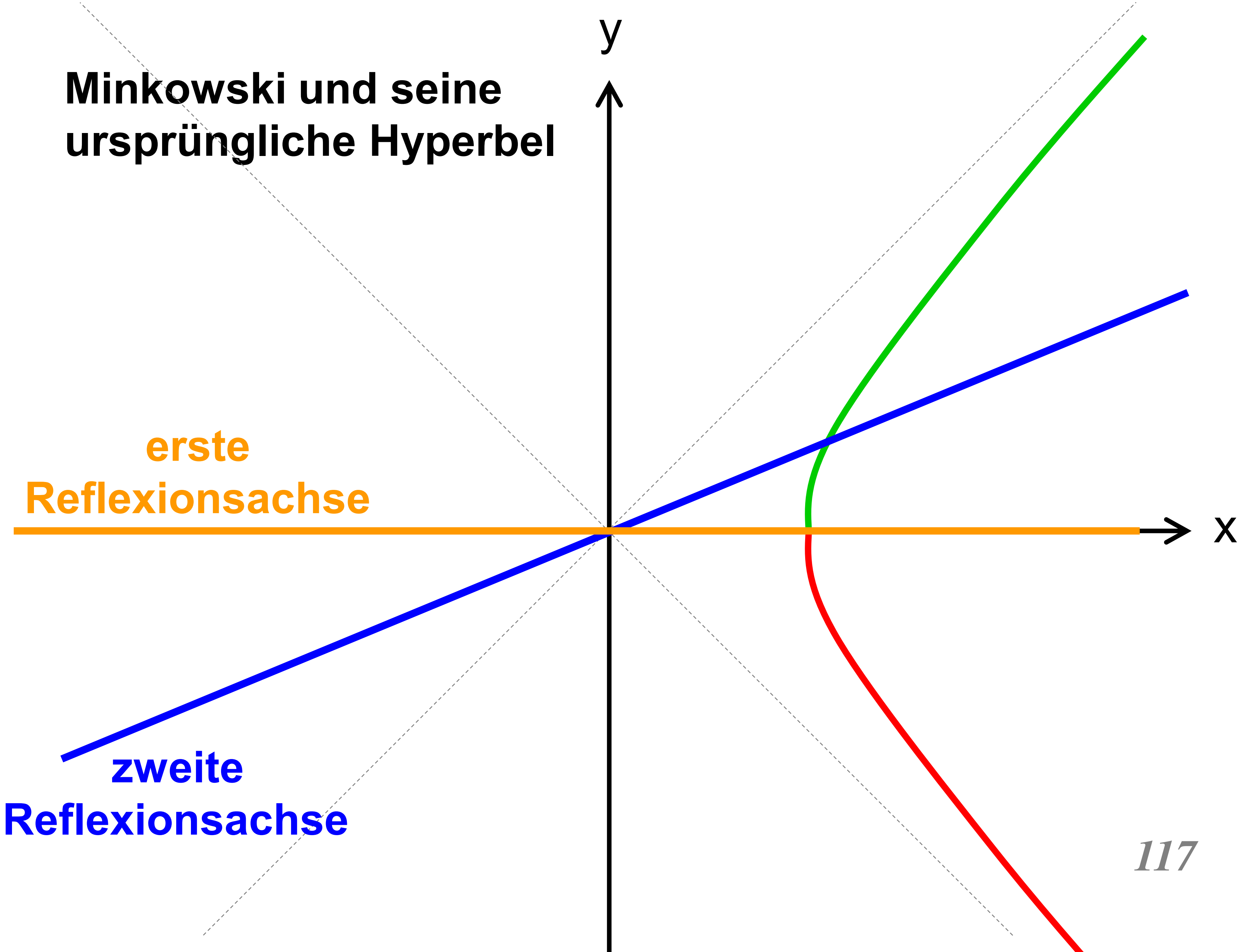
Und weiter denkt er sich: „Die beiden Reflexionsachsen müssen ja dann einen Winkel von genau der Hälfte von 45° einschließen, also habe ich $\pi/8 = 22{,}5°$. Wenn ich jetzt dann die x-Achse als erste Reflexionsachse nehme, kann ich ja die schon eingezeichnete blaue Reflexionsachse ganz einfach recyceln und als zweite Reflexionsachse nehmen.“

Und wieder nimmt er seine Farbstifte und ergänzt.

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Und wieder nimmt er seine Farbstifte und ergänzt mit dem blauen Stift „zweite Reflexionsachse“.

Und mit einem weiteren Farbstift und einen großen, sehr großen und unhandlichen, ganz, ganz schweren Holzlineal zeichnet er auch die neue erste Reflexionsachse ein.


Minkowski und seine
ursprüngliche Hyperbel
y
x
erste
Reflexionsachse
zweite
Reflexionsachse
117

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Und dann macht Prof. Minkowski eine Pause und trinkt eine Tasse schwarzen Kaffee, ganz ohne Zucken und ganz ohne Milch.

Und er sinniert: „Ich könnte mit kühner Kreide vier Weltachsen auf die Tafel werfen! Rein als Geschenk von oben, als Begleitumstand des Umstandes der Bewegung! … Oho, das klingt gut, das muss ich mir merken, das muss ich mir gleich aufschreiben, für einen meiner Vorträge!“

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Tatsächlich hat Prof. Minkowski seine kühne Kreide nicht vergessen und in Cöln genau das gesagt:

Wolfgang Trageser (Hrsg.): Das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung von Originalarbeiten zur Relativitätstheorie Einsteins. 2. Auflage, Springer Spektrum / Springer Nature 2018, abgedruckt auf den Seiten 65 – 83.

Dafür hätte er wahrlich den Literatur-Nobelpreis verdient, und den Physik-Nobelpreise natürlich auch, aber den hat ihm schon Einstein vor der Nase weggeschnappt.

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Nach seiner Kaffeepause überlegt Prof. Minkowski weiter: „Die erste Reflexion ist ja einfach. Der Reflexionsvektor in Richtung der x-Achse ist doch nur

$$\mathbf{n_1} = \mathbf{e_1}$$

Dann wird die erste Reflexion recht simpel einfach nur

$$\begin{aligned} \mathbf{n_1}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n_1} &= \mathbf{e_1}\,(x\,\mathbf{e_1} + y\,\mathbf{e_2})\,\mathbf{e_1} \\ &= x\,\mathbf{e_1 e_1 e_1} + y\,\mathbf{e_1 e_2 e_1} \\ &= x\,\mathbf{e_1} - y\,\mathbf{e_2} \end{aligned}$$

sein.“

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„Und für die zweite Reflexion schreib‘ ich mir einfach nur das von vorhin ab. Den zweiten Reflexionsvektor

$$\mathbf{n_2} = \frac{\mathbf{d} + \mathbf{e_1}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\ \mathbf{e_1} + \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\ \mathbf{e_2}$$

$$= \cos 22{,}5^\circ\ \mathbf{e_1} + \sin 22{,}5^\circ\ \mathbf{e_2}$$

kenn‘ ich ja auch schon.“

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Und so schreibt Prof. Minkowski einfach ab. Dabei passt er natürlich auf, dass das Minuszeichen vor dem y nicht verloren geht:

$$\mathbf{n_2}\,\mathbf{n_1}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n_1}\,\mathbf{n_2} = (\cos 22{,}5°\ \mathbf{e_1} + \sin 22{,}5°\ \mathbf{e_2})\ (x\ \mathbf{e_1} - y\ \mathbf{e_2})\ \mathbf{n_2}$$

$$= ((x \cos 22{,}5° - y \sin 22{,}5°)\ \mathbf{1} + (-x \sin 22{,}5° - y \cos 22{,}5°)\ \mathbf{e_1 e_2})$$
$$(\cos 22{,}5°\ \mathbf{e_1} + \sin 22{,}5°\ \mathbf{e_2})$$

$$= (x \cos^2 22{,}5° - y \sin 22{,}5° \cos 22{,}5° - x \sin^2 22{,}5° - y \sin 22{,}5° \cos 22{,}5°)\ \mathbf{e_1}$$
$$+ (x \sin 22{,}5° \cos 22{,}5° - y \sin^2 22{,}5° + x \sin 22{,}5° \cos 22{,}5° + y \cos^2 22{,}5°)\ \mathbf{e_2}$$

$$= (x (\cos^2 22{,}5° - \sin^2 22{,}5°) - y\ 2 \sin 22{,}5° \cos 22{,}5°)\ \mathbf{e_1}$$
$$+ (x\ 2 \sin 22{,}5° \cos 22{,}5° + y (\cos^2 22{,}5° - \sin^2 22{,}5°))\ \mathbf{e_2}$$

$$= (x \cos 45° - y \sin 45°)\ \mathbf{e_1} + (x \sin 45° + y \cos 45°)\ \mathbf{e_2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)\ \mathbf{e_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)\ \mathbf{e_2}$$

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Das ist jetzt fast ein Déjà-vu (das ist ein deutsches Wort, steht so in meinem Duden von 1996 drin, mit Akzenten, ich schwöre, ist die 21. und völlig neu bearbeitete Auflage, dort auf S. 204!) … Das ist also jetzt fast ein Déjà-vu-Erlebnis für Prof. Minkowski:

„Aha, bei $\mathbf{n_2}\,\mathbf{n_1}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n_1}\,\mathbf{n_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x - y)\,\mathbf{e_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x + y)\,\mathbf{e_2}$

haben wir also eine neue x- und y-Komponente von

$$x_{\text{neu}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x - y)$$

und $$y_{\text{neu}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x + y)$$“

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„Und das passt ja jetzt auch wieder prima, weil ich die beiden neuen Koordinatenwerte

$$x_{neu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x - y)$$

und $$y_{neu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x + y)$$

einfach wieder multiplizieren kann. Und die dritte Binomische Formel haben wir ja auch noch …“

$$x_{neu}\,y_{neu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x - y)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(x + y)$$

$$= \frac{1}{2}\,(x^2 - y^2)$$

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

„Das ist doch jetzt absolut der gleiche Zusammenhang wie bei der einfachen Reflexion. Wenn jetzt noch

$$x^2 - y^2 = 16$$

gesetzt wird, dann ist wieder

$$\begin{aligned} x_{neu}\, y_{neu} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)\,\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 16 \\ &= 8 \end{aligned}$$

alles ordentlich zusammengefasst.“

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Und da strahlt Prof. Minkowski wieder über sein ganzes Gesicht und freut sich wieder und klatscht sich wieder auf die Schenkel und sagt zu sich selbt: „Ist das nicht wieder eine wunderschöne, ganz exquisite, höchst elegante Hyperbel! Eine ganz, ganz echte, wunderbare Hyperbel …“

$$x_{neu}\, y_{neu} = 8$$

$$\Rightarrow \qquad y_{neu} = \frac{8}{x_{neu}}$$

Und er ist zufrieden: „Die x- und y-Achsen sind jetzt wieder ganz dolle Asymptoten!“

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Und nur zur Probe, ob das wirklich alles klappt, nimmt Prof. Minkowski den pseudo-Euklidischen Vektor

$$\mathbf{a}_2 = 3\,\mathbf{e}_0 + 5\,\mathbf{e}_1$$

von Albert und Mileva, macht den Euklidischen Vektor

$$\boldsymbol{a}_2 = 3\,\mathbf{e}_2 + 5\,\mathbf{e}_1 = 5\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2$$

daraus und rechnet erst mit seiner Reflexionsformel vom ersten Versuch und dann mit seiner Rotationsformel die neuen Positionen dieses Vektors nach und radiert und zeichnet alles in seine Skizze und radiert und zeichnet und radiert.

Reflexion von $\boldsymbol{a_2}$

Er hat also: $\boldsymbol{a_2} = \mathbf{5}\, \mathbf{e_1} + \mathbf{3}\, \mathbf{e_2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 3 \end{array}$

Aus $\mathbf{n}\,\mathbf{r}\,\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)\,\mathbf{e_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)\,\mathbf{e_2}$

folgt dann

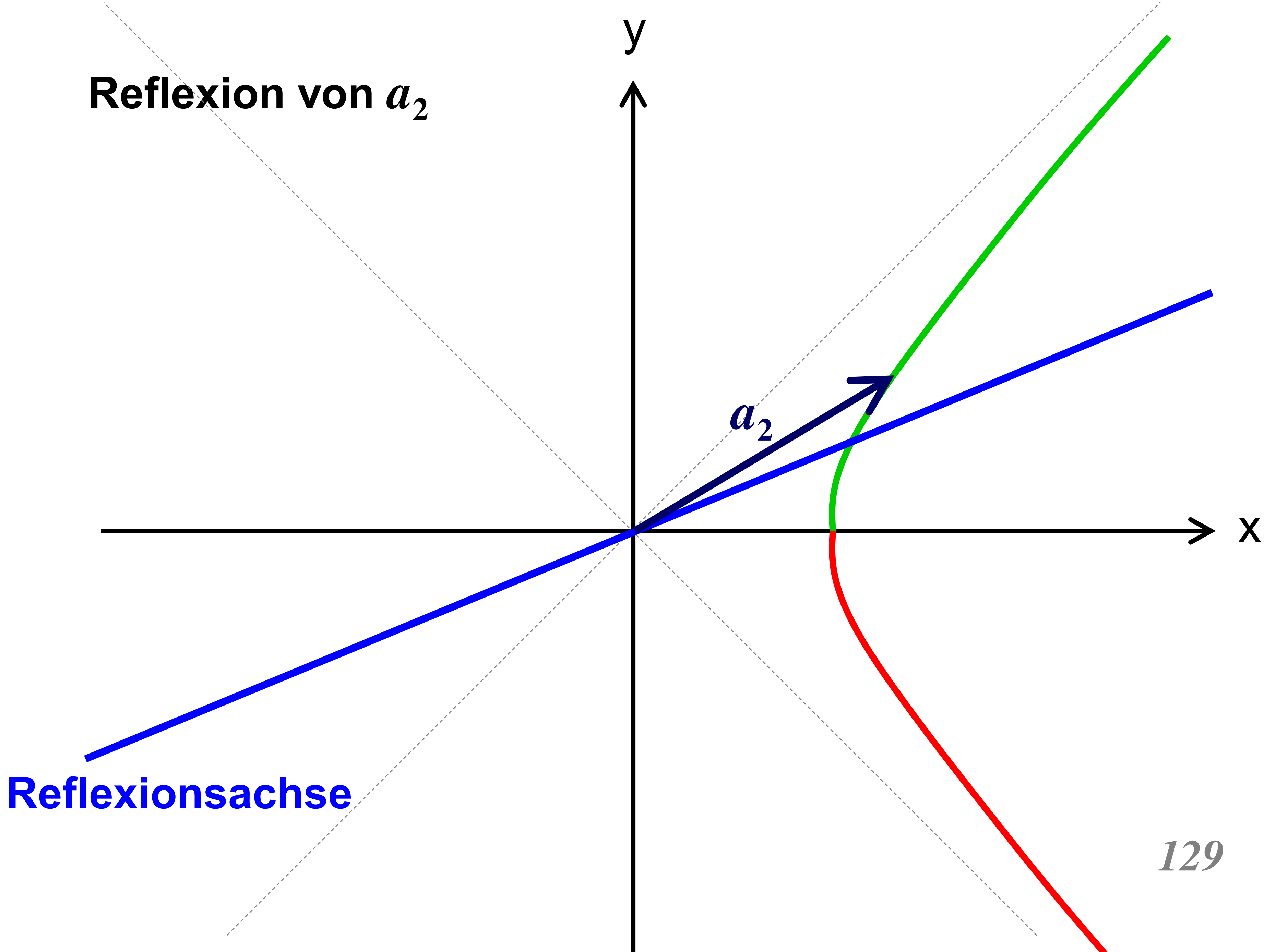
$$\mathbf{n}\,\boldsymbol{a_2}\,\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(5 + 3)\,\mathbf{e_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}(5 - 3)\,\mathbf{e_2}$$

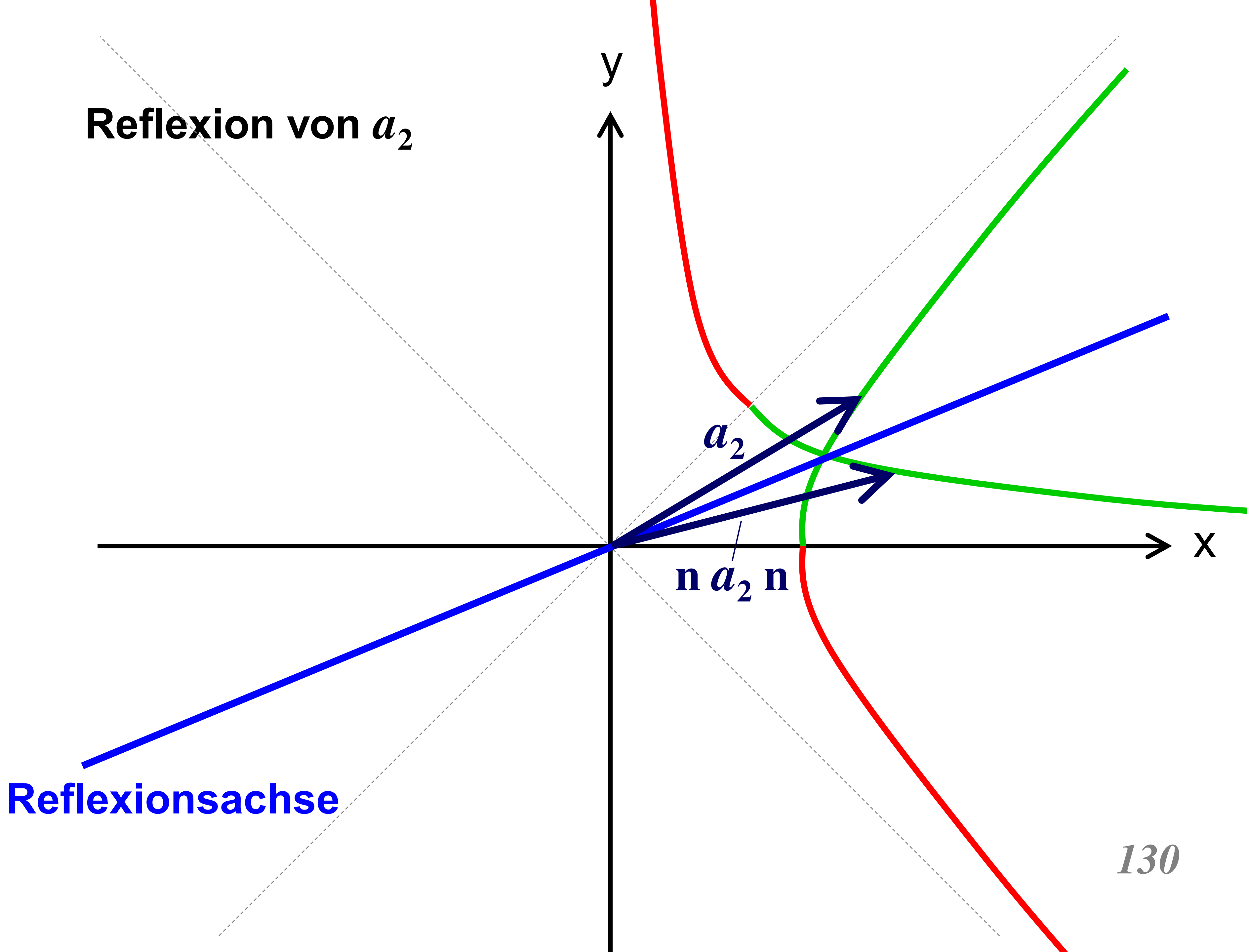
$$= 4\sqrt{2}\,\mathbf{e_1} + \sqrt{2}\,\mathbf{e_2}$$

mit $x_{neu} = 4\sqrt{2}$

$y_{neu} = \sqrt{2}$

Reflexion von a_2





Reflexion von a_2
y
x
a_2
n a_2 n
Reflexionsachse

Rotation von a_2

Er hat also: $\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{5}\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{3}\,\mathbf{e}_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 3 \end{array}$

Aus $\quad \mathbf{n}_2\,\mathbf{n}_1\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}_1\,\mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)\,\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)\,\mathbf{e}_2$

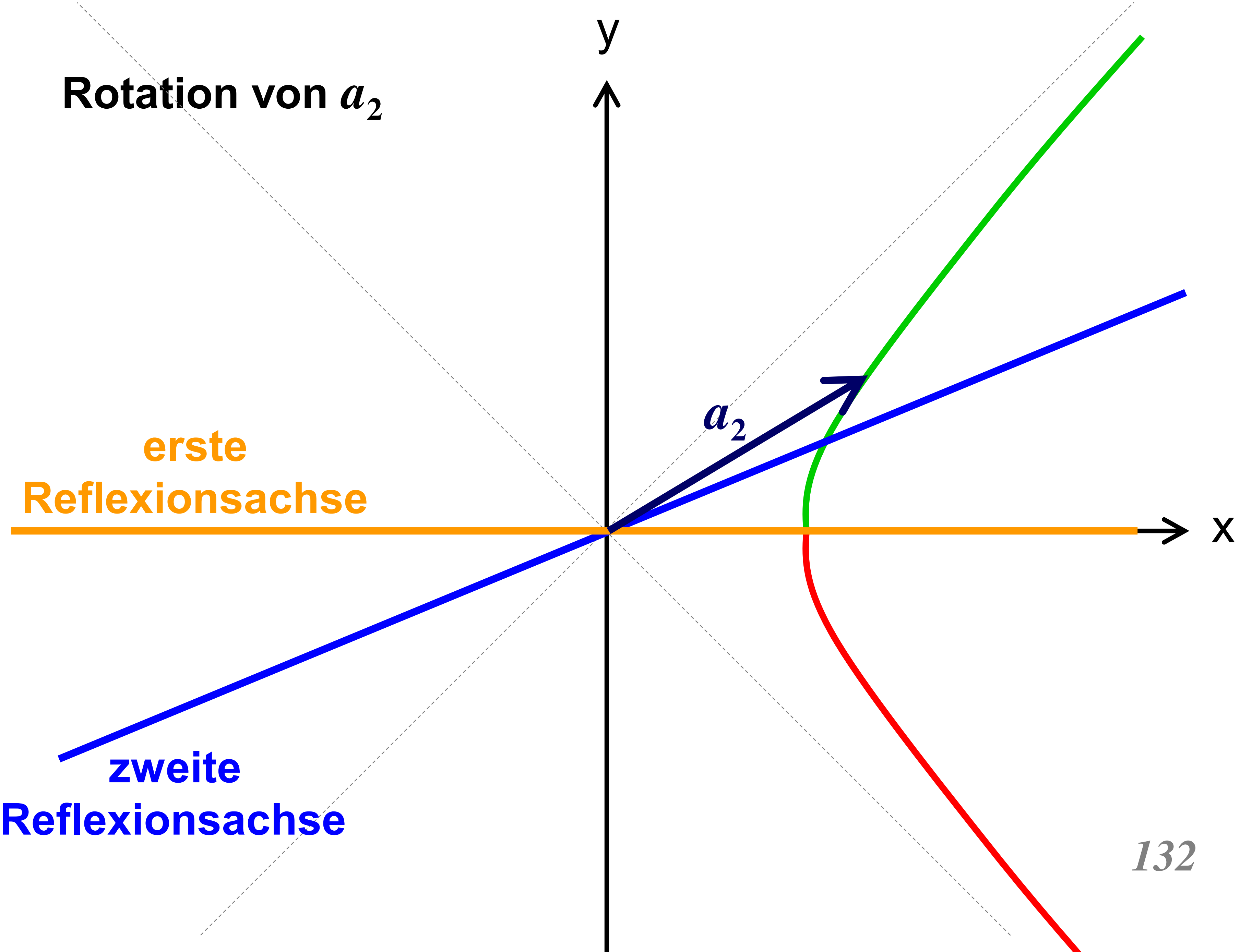
folgt dann

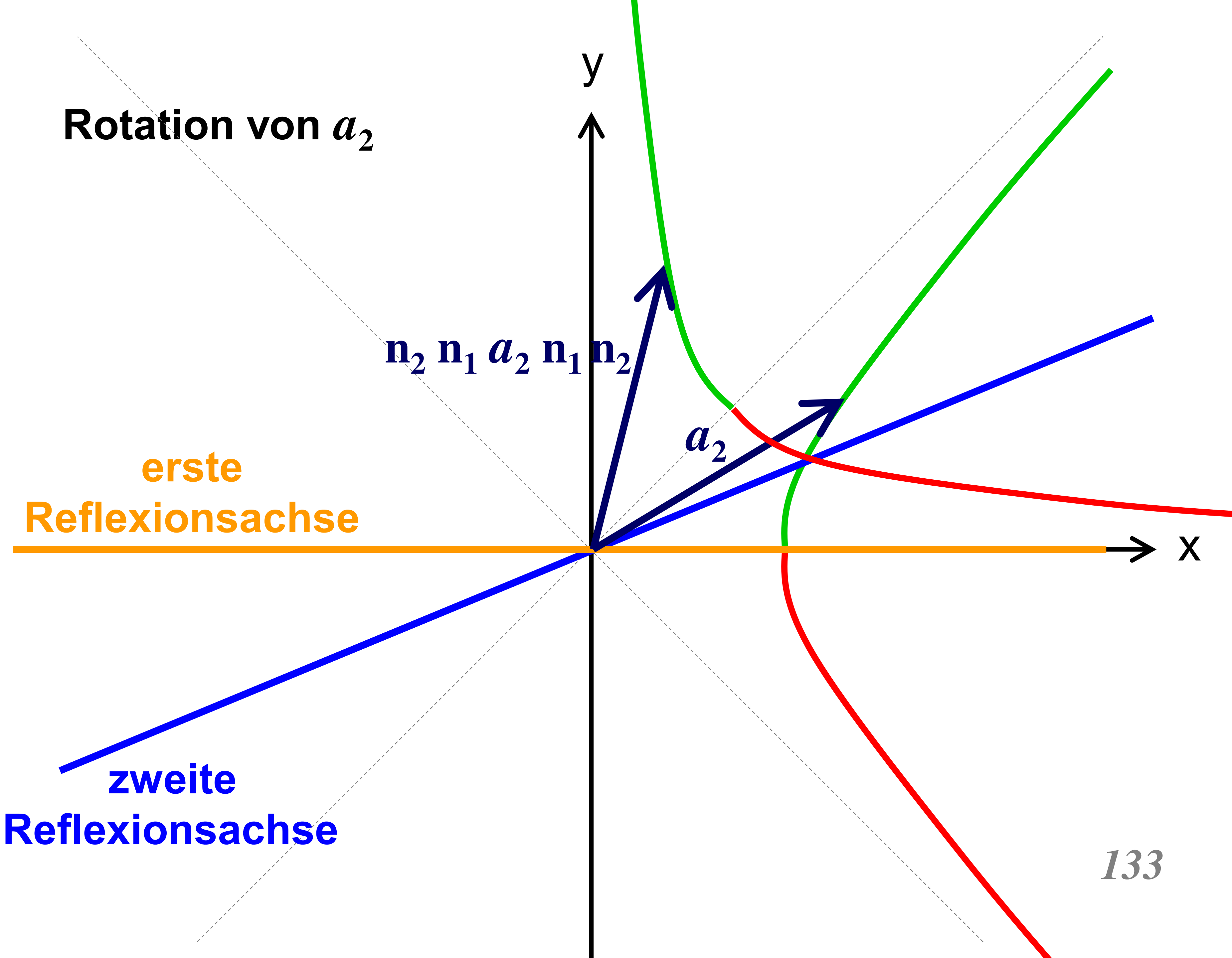
$$\mathbf{n}_2\,\mathbf{n}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\mathbf{n}_1\,\mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(5 - 3)\,\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(5 + 3)\,\mathbf{e}_2$$

$$= \sqrt{2}\,\mathbf{e}_1 + 4\sqrt{2}\,\mathbf{e}_2$$

mit $\quad x_{neu} = \sqrt{2}$

$y_{neu} = 4\sqrt{2}$


Rotation von a_2
y
x
a_2
erste
Reflexionsachse
zweite
Reflexionsachse



Rotation von a_2
y
x
$n_2\, n_1\, a_2\, n_1\, n_2$
a_2
erste Reflexionsachse
zweite Reflexionsachse

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Da ist Prof. Minkowski nun wirklich glücklich und schreibt auf seinen Zettel für den Vortrag in Cöln noch ein paar weitere Sätze auf:

„Die zweite Gruppe straft man am liebsten mit Verachtung, um leichten Sinnes darüber hinwegzu kommen, sie zu komponieren, gibt uns zu denken auf. … Es hat niemand einen Ort anders bemerkt als zu einer Zeit, eine Zeit anders als an einem Ort. … Ich respektiere aber noch das Dogma, sie macht zudem die Reise der Erde im All, eine größere Abstraktion tut dem Mathematiker nicht wehe.“

Oh wehe, wehe, Cöln wird ein Karneval!

Zürich – ETH – im Büro von Prof. Minkowski

Und mitten in seinem Büro steht er nun und daklariert, sein großes Holzlineal wie einen Dirigentenstab schwingend:

„Nun, da die Mathematik hier nur mehr Treppenwitz bekundet, bleibt ihr doch die Genugtuung, dass sie dank ihren glücklichen Antezedenzien mit ihren in freier Fernsicht geschärften Sinnen die tiefgreifenden Konsequenzen einer solchen Ummodelung unserer Naturauffassung auf der Stelle zu erfassen vermag."

Oh wehe, wehe, Cöln wird ein Karneval!

Nachtrag

Und da musste ich schon wieder in den Duden schauen, aber da stand‘s nicht drin, der Duden von 1996 war zu modern, aber in einem Fremdwörterlexikon von 1977, herausgegeben von Gerhard Wahrig, irgendeine Lizenzausgabe mit Genehmigung des Bertelsmann-Verlags, da war dieses Wort auf S. 50 zu finden:

An·te'ze·dens ⟨n; -, -'den·zi·en⟩ **1** *Grund, Ursache, Vorausgegangenes* **2** *Prämisse* **3** ⟨nur Pl.; †⟩ *Vorleben* [<lat. *antecedens*, Part. Präs. zu *antecedere* „vorausgehen“]