Posterbeitrag zur virtuellen DPG-Frühjahrstagung 2021 des Fachverbands Didaktik der Physik, DD 14.4, Mo, 22. März 2021, 14:00 h – 15:00 h, R1 (Postersitzung 1)

Dirac-Algebra: Kurz und schmerzlos

Martin Erik Horn

IUBH – Internationale Hochschule, Campus Berlin, Master-Studiengang Computer Science

iubh INTERNATIONALE HOCHSCHULE

Email: m.horn@iubh.de

Siehe z.B.: John Vince: Geometric Algebra for Computer Graphics. Chap. 11: Conformal Geometry, Spinger, London 2008.

Fachliche Einordnung

Im Bereich von Informatik und Software-Entwicklung wird die Dirac-Algebra zur Modellierung hyperbolischer und konformer Räume eingesetzt. Es ist deshalb sinnvoll, Lernenden eine Einführung in die Dirac-Algebra zu eröffnen, die auf die Thematisierung des quantenmechanischen Hintergrunds vollständig verzichtet. Aus diesem Grund werden Aufgaben zur Lösung Linearer Gleichungssysteme, die zuvor auf Basis der Pauli-Algebra gelöst wurden, umgestaltet und mit Hilfe der Dirac-Algebra bearbeitet.

Siehe z.B.: Martin Erik Horn: Lineare Algebra in physikdidaktischer Ausprägung. Beitrag zur DPG-Frühjahrstagung in Würzburg 2015. Die dem Beitrag beigefügten OHP-Folien finden Sie in www.phydid.de.

Geometrisch-physikalischer Kern der Dirac-Algebra

Die vier Basisvektoren γ_t, γ_x, γ_y und γ_z … sind entweder zeitartig oder raumartig

$$\gamma_t^2 = 1 \qquad \gamma_x^2 = \gamma_y^2 = \gamma_z^2 = -1$$

… stehen senkrecht aufeinander, da sie anti-kommutieren:

$$\gamma_x\gamma_y = -\gamma_y\gamma_x \qquad \gamma_y\gamma_z = -\gamma_z\gamma_y \qquad \gamma_z\gamma_x = -\gamma_x\gamma_z$$
$$\gamma_x\gamma_t = -\gamma_t\gamma_x \qquad \gamma_y\gamma_t = -\gamma_t\gamma_y \qquad \gamma_z\gamma_t = -\gamma_t\gamma_z$$

Konzeptioneller Kern der Interpretation Linearer Gleichungssysteme

Gleichungssysteme werden **nicht zeilenweise** als Aneinanderreihung von Gleichungen interpretiert, sondern **spaltenweise** als Linearkombination von Vektoren.

Beispielaufgabe: Eindeutig lösbares Lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten x und y:

Konventionelle Lösung auf Grundlage der **Regel von Cramer** mit Hilfe der Determinanten von Matrizen, die aus den **Spaltenvektoren** zusammengesetzt werden

$$\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}40\\54\end{pmatrix}$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 6\,x + 5\,y = 40 \\ 8\,x + 7\,y = 54 \end{array}}$$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix}40 & 5\\54 & 7\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}6 & 5\\8 & 7\end{pmatrix}} = \frac{10}{2} = 5 \qquad y = \frac{\det\begin{pmatrix}6 & 40\\8 & 54\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}6 & 5\\8 & 7\end{pmatrix}} = \frac{4}{2} = 2$$

Bisher: Die linearen Gleichungen werden in einen **Euklidischen Raum** eingebettet, indem sie mit den Basisvektoren der **Pauli-Algebra** multipliziert werden.

$$6\,x\,\sigma_x + 5\,y\,\sigma_x = 40\,\sigma_x$$
$$8\,x\,\sigma_y + 7\,y\,\sigma_y = 54\,\sigma_y$$

$\mathbf{a} = 6\,\sigma_x + 8\,\sigma_y$ $\quad \mathbf{b} = 5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y$ $\quad \mathbf{r} = 40\,\sigma_x + 54\,\sigma_y$

$$\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r}$$

Jetzt: Die linearen Gleichungen werden in eine **hyperbolische Raumzeit** eingebettet, indem sie mit den Basisvektoren der **Dirac-Algebra** multipliziert werden.

$$6\,x\,\gamma_t + 5\,y\,\gamma_t = 40\,\gamma_t$$
$$8\,x\,\gamma_x + 7\,y\,\gamma_x = 54\,\gamma_x$$

$\mathbf{a} = 6\,\gamma_t + 8\,\gamma_x$ $\quad \mathbf{b} = 5\,\gamma_t + 7\,\gamma_x$ $\quad \mathbf{r} = 40\,\gamma_t + 54\,\gamma_x$

Es ergibt sich als **rein räumliches Analogon** zur Cramerschen Regel:

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = (2\,\sigma_x\sigma_y)^{-1}\,10\,\sigma_x\sigma_y = 5$$
$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = (2\,\sigma_x\sigma_y)^{-1}\,4\,\sigma_x\sigma_y = 2$$

Es ergibt sich als **raumzeitliches Analogon** zur Cramerschen Regel:

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = (2\,\gamma_t\gamma_x)^{-1}\,10\,\gamma_t\gamma_x = 5$$
$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = (2\,\gamma_t\gamma_x)^{-1}\,4\,\gamma_t\gamma_x = 2$$

Fazit

- Hier wird mit den Größen der Pauli-Algebra (links) und der Dirac-Algebra (rechts) gerechnet, ohne auf deren quantenmechanische Historik einzugehen. ⇒ Die Nachverfolgung des historischen Wegs bei der Einführung von Pauli-und Dirac-Algebra erschwert einen einfachen Zugang und sollte erst später und erst dann ausführlich diskutiert und erläutert werden, wenn die mathematischen Grundlagen gefestigt vorliegen.
- Hier wird mit geometrischen Größen (Vektoren und orientierten Flächenstücken) gerechnet, so dass alle algebraischen Größen und Umformungen geometrisch interpretiert werden können. ⇒ Selbstverständlich haben Clifford und Hestenes recht: „Geometry without algebra is dumb! Algebra without geometry is blind!' „Geometrie ohne Algebra ist stumm! Algebra ohne Geometrie ist blind!"
- Hier wird ein äußerst einfacher Sachverhalt (Lineare Gleichungssysteme) herangezogen, um in einen anderen äußerst einfachen Sachverhalt (Pauli-Algebra & Dirac-Algebra) einzuführen. ⇒ Selbstverständlich sind Pauli- und Dirac-Algebra äußerst einfach. Sie erscheinen nur dann kompliziert und unzugänglich, wenn sie anhand eines komplizierten und unzugänglichen Ansatzes (wie z.B. der Quantenmechanik) eingeführt werden.
- Und dieser Ansatz ist anschlussfähig. ⇒ Siehe Ausblick: Während die Cramersche Regel nicht verallgemeinert werden kann, lassen sich mit Hilfe von Pauli- und Dirac-Algebra Verallgemeinerte Matrizeninverse bilden.

Ausblick: Konsistente, eindeutig lösbare überdeterminierte Lineare Gleichungssysteme lassen sich auf vollkommen äquivalente Weise lösen.

Erweiterung der Beispielaufgabe:

$$\boxed{\begin{array}{c} 6\,x + 5\,y = 40 \\ 8\,x + 7\,y = 54 \\ 4\,x + 9\,y = 38 \end{array}}$$

$$\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r}$$

Pauli-Algebra ↔ Euklidischer Raum

$$6\,x\,\sigma_x + 5\,y\,\sigma_x = 40\,\sigma_x$$
$$8\,x\,\sigma_y + 7\,y\,\sigma_y = 54\,\sigma_y$$
$$4\,x\,\sigma_z + 9\,y\,\sigma_z = 38\,\sigma_z$$

$\mathbf{a} = 6\,\sigma_x + 8\,\sigma_y + 4\,\sigma_z$ $\quad \mathbf{b} = 5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y + 9\,\sigma_z$ $\quad \mathbf{r} = 40\,\sigma_x + 54\,\sigma_y + 38\,\sigma_z$

Dirac-Algebra ↔ Hyperbolische Raumzeit

$$6\,x\,\gamma_t + 5\,y\,\gamma_t = 40\,\gamma_t$$
$$8\,x\,\gamma_x + 7\,y\,\gamma_x = 54\,\gamma_x$$
$$4\,x\,\gamma_y + 9\,y\,\gamma_x = 38\,\gamma_y$$

$\mathbf{a} = 6\,\gamma_t + 8\,\gamma_x + 4\,\gamma_y$ $\quad \mathbf{b} = 5\,\gamma_t + 7\,\gamma_x + 9\,\gamma_y$ $\quad \mathbf{r} = 40\,\gamma_t + 54\,\gamma_x + 38\,\gamma_y$

⇒ Die Lösungswerte ergeben sich mit Hilfe des bereits bekannten, vollkommen identischen Ansatzes (Flächenvergleich) wieder zu:

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = (2\,\sigma_x\sigma_y + 44\,\sigma_y\sigma_z - 34\,\sigma_z\sigma_x)^{-1}\,(10\,\sigma_x\sigma_y + 220\,\sigma_y\sigma_z - 170\,\sigma_z\sigma_x) = 5$$
$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = (2\,\sigma_x\sigma_y + 44\,\sigma_y\sigma_z - 34\,\sigma_z\sigma_x)^{-1}\,(4\,\sigma_x\sigma_y + 88\,\sigma_y\sigma_z - 68\,\sigma_z\sigma_x) = 2$$

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = (2\,\gamma_t\gamma_x + 44\,\gamma_x\gamma_y - 34\,\gamma_y\gamma_t)^{-1}\,(10\,\gamma_t\gamma_x + 220\,\gamma_x\gamma_y - 170\,\gamma_y\gamma_t) = 5$$
$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = (2\,\gamma_t\gamma_x + 44\,\gamma_x\gamma_y - 34\,\gamma_y\gamma_t)^{-1}\,(4\,\gamma_t\gamma_x + 88\,\gamma_x\gamma_y - 68\,\gamma_y\gamma_t) = 2$$

⇒ Dieser Ansatz führt auf Verallgemeinerte Matrizeninverse und damit zu rein räumlichen und raumzeitlichen Analoga von Moore-Penrose-Matrizeninversen. Mehr dazu in der Posterpräsentation **SOE 3.8** des FV Physik Sozio-ökonomischer Systeme:

www.dpg-verhandlungen.de/year/2021/conference/bpcppdysoe/part/soe/session/3/contribution/8?lang=en

Posterbeitrag zur virtuellen DPG-Frühjahrstagung 2021 des Fachverbands Physik Sozio-Ökonomischer Systeme, SOE 3.8, Mo, 22. März 2021, 17:30 h – 19:30 h, SOEp (Postersitzung 1)

Dirac Algebra Generalized Matrix Inverses

Martin Erik Horn

IUBH – Internationale Hochschule, Campus Berlin, Master-Studiengang Computer Science

iubh INTERNATIONALE HOCHSCHULE

Email: m.horn@iubh.de

Conceptual and didactical background

e.g. see: Karsten Schmidt, Götz Trenkler: Einführung in die Moderne Matrix-Algebra. 3rd ed, Springer Gabler, Berlin 2015.

More and more introductory business mathematics textbooks present generalized matrix inverses as elementary part of the foundations of mathematical economics. Therefore Moore-Penrose generalized matrix inverses as the scalar part of Pauli Algebra generalized matrix inverses had been discussed at the DPG spring meeting 2018 of the Physics of Socio-economic Systems Division in Berlin in a geometric way.

Conceptual background: www.dpg-verhandlungen.de/year/2018/conference/berlin/part/soe/session/7/contribution/2?lang=en

As this geometry is based on the Euclidean structure of space, it is quite reasonable to ask: **What happens if generalized matrix inverses are constructed in pseudo-Euclidean, hyperbolic spacetimes?** The basic mathematical features and the didactical foundations of the mathematics of hyperbolic spacetime are discussed in the poster session of the DPG spring meeting 2021 of the Physics Education Division.

Didactical background: www.dpg-verhandlungen.de/year/2021/conference/didaktik/part/dd/session/14/contribution/4?lang=de

Structural core of Dirac Algebra

The four base vectors γ_t, γ_x, γ_y, and γ_z … … are orthogonal to each other, because they anti-commute:

… are either time-like or space-like	$\gamma_t^2 = 1$ $\gamma_x^2 = \gamma_y^2 = \gamma_z^2 = -1$	$\gamma_x\gamma_y = -\gamma_y\gamma_x$ $\gamma_x\gamma_t = -\gamma_t\gamma_x$	$\gamma_y\gamma_z = -\gamma_z\gamma_y$ $\gamma_y\gamma_t = -\gamma_t\gamma_y$	$\gamma_z\gamma_x = -\gamma_x\gamma_z$ $\gamma_z\gamma_t = -\gamma_t\gamma_z$

Systems of linear equations are now **not** seen as **a composition of different rows**,
but as **a composition of different columns** and thus as a **linear combination of vectors**.

Example problem: Solving a consistent system of two linear equations with two unknown variables x and y by finding the inverse matrix:

$$\boxed{\begin{aligned} 6x + 5y &= 40 \\ 8x + 7y &= 54 \end{aligned}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = ?$$

Cramer:

$6x_1 + 5y_1 = 1$, $8x_1 + 7y_1 = 0$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}} = \frac{7}{2} = 3.5 \qquad y_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}} = \frac{-8}{2} = -4$$

$6x_2 + 5y_2 = 0$, $8x_2 + 7y_2 = 1$

$$x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}} = \frac{-5}{2} = -2.5 \qquad y_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}} = \frac{6}{2} = 3$$

Pauli:

$6x_1\sigma_x + 5y_1\sigma_x = \sigma_x$, $\mathbf{a} = 6\sigma_x + 8\sigma_y$, $\mathbf{r_1} = \sigma_x$, $x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = (2\sigma_x\sigma_y)^{-1}\, 7\sigma_x\sigma_y = 3.5$

$8x_1\sigma_y + 7y_1\sigma_y = 0$, $\mathbf{b} = 5\sigma_x + 7\sigma_y$, $\mathbf{r_2} = \sigma_y$, $y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = (2\sigma_x\sigma_y)^{-1}(-8\sigma_x\sigma_y) = -4$

$6x_2\sigma_x + 5y_2\sigma_x = 0$, $x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = (2\sigma_x\sigma_y)^{-1}(-5\sigma_x\sigma_y) = -2.5$

$8x_2\sigma_y + 7y_2\sigma_y = \sigma_y$, $y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = (2\sigma_x\sigma_y)^{-1}\, 6\sigma_x\sigma_y = 3$

Dirac:

$6x_1\gamma_t + 5y_1\gamma_t = \gamma_t$, $\mathbf{a} = 6\gamma_t + 8\gamma_x$, $\mathbf{r_1} = \gamma_t$, $x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = (2\gamma_t\gamma_x)^{-1}\, 7\gamma_t\gamma_x = 3.5$

$8x_1\gamma_x + 7y_1\gamma_x = 0$, $\mathbf{b} = 5\gamma_t + 7\gamma_x$, $\mathbf{r_2} = \gamma_x$, $y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = (2\gamma_t\gamma_x)^{-1}(-8\gamma_t\gamma_x) = -4$

$6x_2\gamma_t + 5y_2\gamma_t = 0$, $x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = (2\gamma_t\gamma_x)^{-1}(-5\gamma_t\gamma_x) = -2.5$

$8x_2\gamma_x + 7y_2\gamma_x = \gamma_x$, $y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = (2\gamma_t\gamma_x)^{-1}\, 6\gamma_t\gamma_x = 3$

Solution:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3.5 & -2.5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 & -2.5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 40 \\ 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

> As determinants of non-square matrices are not easy to find, it is not possible to generalize Cramer's rule in a straightforward way. But it is very easy to generalize the outer product equations of **Grassmann (1844)**, used in Pauli and Dirac Algebra: They nearly remain unchanged.

Extended example problem: Solving an over-constraint, consistent system of three linear equations with two unknown variables x and y by finding the Pauli Algebra generalized matrix inverse and the Dirac Algebra generalized matrix inverse:

$$\boxed{\begin{aligned} 6x + 5y &= 40 \\ 8x + 7y &= 54 \\ 4x + 9y &= 38 \end{aligned}}$$

Pauli:

$6x_1\sigma_x + 5y_1\sigma_x = \sigma_x$, $\mathbf{a} = 6\sigma_x + 8\sigma_y + 4\sigma_z$, $x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b})$, $6x_2\sigma_x + 5y_2\sigma_x = 0$, $x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b})$, $6x_3\sigma_x + 5y_3\sigma_x = 0$, $x_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{r_3} \wedge \mathbf{b})$

$8x_1\sigma_y + 7y_1\sigma_y = 0$, $\mathbf{b} = 5\sigma_x + 7\sigma_y + 9\sigma_z$, $y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1})$, $8x_2\sigma_y + 7y_2\sigma_y = \sigma_y$, $y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2})$, $8x_3\sigma_y + 7y_3\sigma_y = 0$, $y_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_3})$

$4x_1\sigma_z + 9y_1\sigma_z = 0$, $\mathbf{r_1} = \sigma_x$, $\mathbf{r_2} = \sigma_y$, $\mathbf{r_3} = \sigma_z$, $4x_2\sigma_z + 9y_2\sigma_z = 0$, $4x_3\sigma_z + 9y_3\sigma_z = \sigma_z$

Dirac:

$6x_1\gamma_t + 5y_1\gamma_t = \gamma_t$, $\mathbf{a} = 6\gamma_t + 8\gamma_x + 4\gamma_t$, $x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b})$, $6x_2\gamma_t + 5y_2\gamma_t = 0$, $x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b})$, $6x_3\gamma_t + 5y_3\gamma_t = 0$, $x_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{r_3} \wedge \mathbf{b})$

$8x_1\gamma_x + 7y_1\gamma_x = 0$, $\mathbf{b} = 5\gamma_t + 7\gamma_x + 9\gamma_x$, $y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1})$, $8x_2\gamma_x + 7y_2\gamma_x = \gamma_x$, $y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2})$, $8x_3\gamma_x + 7y_3\gamma_x = 0$, $y_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_3})$

$4x_1\gamma_y + 9y_1\gamma_y = 0$, $\mathbf{r_1} = \gamma_t$, $\mathbf{r_2} = \gamma_x$, $\mathbf{r_3} = \gamma_z$, $4x_2\gamma_y + 9y_2\gamma_y = 0$, $4x_3\gamma_y + 9y_3\gamma_y = \gamma_y$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = ? \Rightarrow \text{Left-sided matrix inverses exist: } A^{-1}$$

Solution:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1548}\overbrace{\begin{pmatrix} 160 - 198\sigma_x\sigma_y - 110\sigma_y\sigma_z - 154\sigma_z\sigma_x & 193 + 153\sigma_x\sigma_y + 85\sigma_y\sigma_z + 119\sigma_z\sigma_x & -239 - 9\sigma_x\sigma_y - 5\sigma_y\sigma_z - 7\sigma_z\sigma_x \\ -76 + 88\sigma_x\sigma_y + 132\sigma_y\sigma_z + 176\sigma_z\sigma_x & -82 - 68\sigma_x\sigma_y - 102\sigma_y\sigma_z - 136\sigma_z\sigma_x & 278 + 4\sigma_x\sigma_y + 6\sigma_y\sigma_z + 8\sigma_z\sigma_x \end{pmatrix}}^{A^{-1}}\begin{pmatrix} 40 \\ 54 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{388}\underbrace{\begin{pmatrix} -160 + 198\gamma_t\gamma_x - 154\gamma_t\gamma_y - 110\gamma_x\gamma_y & 203 - 153\gamma_t\gamma_x + 119\gamma_t\gamma_y + 85\gamma_x\gamma_y & -69 + 9\gamma_t\gamma_x - 7\gamma_t\gamma_y - 5\gamma_x\gamma_y \\ 76 - 88\gamma_t\gamma_x + 176\gamma_t\gamma_y + 132\gamma_x\gamma_y & -94 + 68\gamma_t\gamma_x - 136\gamma_t\gamma_y - 102\gamma_x\gamma_y & 74 - 4\gamma_t\gamma_x + 8\gamma_t\gamma_y + 6\gamma_x\gamma_y \end{pmatrix}}_{A^{-1}}\begin{pmatrix} 40 \\ 54 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Deleting the bivector components will give…

…. the **Moore-Penrose generalized matrix inverse** as scalar part of the Pauli Algebra generalized matrix inverse:

$$A^{+} = \frac{1}{1548}\begin{pmatrix} 160 & 193 & -239 \\ -76 & -82 & 278 \end{pmatrix}$$

… the **spacetime generalized matrix inverse** as scalar part of the Dirac Algebra generalized matrix inverse.

$$A^{\#} = \frac{1}{388}\begin{pmatrix} -160 & 203 & -69 \\ 76 & -94 & 74 \end{pmatrix}$$

> **Conclusion:** It is possible to construct generalized matrix inverses in hyperbolic spacetime.

Final questions:

Do you really think that every socio-economic system is strictly Euclidean? Do you really want to exclude the physics of spacetime from socio-economic considerations? (Perhaps you do not have to minimize the squares but to maximize them when dealing with linear regression next time?)