Dirac-Algebra: Kurz und schmerzlos

Martin Erik Horn

IUBH Internationale Hochschule (Campus Berlin), Frankfurter Allee 73 A, 10247 Berlin,
XU – Exponential University of Applied Sciences, August-Bebel-Straße 26-53, 14482 Potsdam,
m.horn@iubh.de

Kurzfassung

Im Bereich von Informatik und Software-Entwicklung wird die Dirac-Algebra zur Modellierung hyperbolischer und konformer Räume eingesetzt. Es ist deshalb sinnvoll, Lernenden eine Einführung in die Dirac-Algebra zu eröffnen, die auf die Thematisierung des quantenmechanischen Hintergrunds vollständig verzichtet.

Aus diesem Grund wurden Aufgaben zur Lösung Linearer Gleichungssysteme, die zuvor auf Basis der Pauli-Algebra gelöst wurden, umgestaltet und mit Hilfe der Dirac-Algebra bearbeitet. Dieser Ansatz, der vorgestellt und didaktisch hinterfragt wird, führt auf den Kern dessen zurück, was Grassmann in seiner Ausdehnungslehre erstmals formulierte: Die Basisgrößen von Pauli- und Dirac-Algebra (also der Geometrischen Algebra) können als Basisvektoren interpretiert werden.

Die Lösung Linearer Gleichungssysteme mit Hilfe der Dirac-Algebra stellt deshalb ein raumzeitliches Analogon zum üblicherweise als Cramersche Regel bezeichneten Lösungsverfahren dar. Und auch raumzeitliche Analoga zu Moore-Penrose-Matrizeninversen lassen sich konstruieren.

1. Historischer Hintergrund

Selbstverständlich ist die Pauli-Algebra deutlich älter als Wolfgang Pauli. Ebenso selbstverständlich ist die Dirac-Algebra deutlich älter als P. A. M. Dirac. Beide Algebren wurde lange vor Entwicklung der Quantenmechanik vollständig ausformuliert, denn sie stellen letztendlich nichts anderes als Spezialfälle der auf Hermann Günther Grassmann zurückgehenden Geometrischen Algebra dar.

Und deshalb kann ebenso selbstverständlich das bereits 1844 von Grassmann in seiner Ausdehnungslehre formulierte geometrisch-algebraische Analogon zur Cramerschen Regel, hier der alten Schreibweise Grassmanns [1, S. 72] folgend,

$$x_1 = \frac{p_0 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n} \qquad \{1\}$$

als Ansatzpunkt nicht nur für einen Einstieg in die Pauli-Algebra, sondern auch für einen veritablen und tragfähigen Einstieg in die Dirac-Algebra genutzt werden.

Denn selbstverständlich lassen sich die Vektoren p_i in {1} bzw. {2} bereits zu Grassmanns Zeiten nicht nur als rein Euklidische Vektoren und damit als Linearkombinationen von Pauli-Matrizen interpretieren.

Sehr klar arbeitete schon Grassmann hyperbolische Räume aus [2], so dass die Vektoren p_i der Gleichungen {1} und {2} auch ohne jegliche Kenntnis der Quantenmechanik als Linearkombinationen von Dirac-Matrizen interpretiert werden können. Dieser Interpretation folgt der hier vorgestellte Ansatz.

2. Fachliche und didaktische Einordnung

Und selbstverständlich sind Pauli- und Dirac-Algebra keine primär physikalischen Konstrukte.

Da wir als Physikdidaktikerinnen und Physikdidaktiker in unserer Ausbildung – sehr wahrscheinlich – erstmals mit der Pauli- und Dirac-Algebra beim Erlernen der Quantenmechanik in Kontakt kamen, entwickeln wir leicht die Vorstellung, dass Pauli- und Dirac-Algebra primär oder sogar ausschließlich mit der Physik der Quantenmechanik verknüpft sind. Dies ist eine dramatische Fehlvorstellung.

Selbstverständlich gibt es zahlreiche Fachgebiete, die Pauli- und Dirac-Algebra nutzen und die wir in der Physikdidaktik, da in unserer Blickweise fachspezifisch eingeengt, oft übersehen. Die Informatik und die Software-Entwicklung sind solche Gebiete. Dort werden – insbesondere im Bereich von Computer-Graphik, Robotik und Computer Vision beim Beschreiben und Erkennen räumlicher Strukturen – Pauli- und Dirac-Algebra zur Modellierung hyperbolischer, projektiver oder konformer Räume eingesetzt.

In diesen Fachgebieten werden Pauli- und Dirac-Algebra als das gedeutet, was sie mathematisch tatsächlich sind: moderne Ausgestaltungen der Linearen Algebra. Denn die Basiselemente der Pauli- und Dirac-Algebra und multiplikative Verknüpfungen dieser Basiselemente sind geometrisch betrachtet nichts anderes als Basis-Vektoren, orientierte Basis-Flächenstücke, orientierte Basis-Volumenelemente, etc. [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15].

Im Gegensatz zu dieser geometrisch tragfähigen Sichtweise wird der Blick auf Pauli- und Dirac-Algebra im physikalischen Bereich sehr durch historische Einengungen getrübt. Wolfgang Pauli und P. A. M. Dirac charakterisierten ihre Matrizen als Operatoren, die auf andere Objekte einwirken. Sie benannten Pauli- und Dirac-Matrizen jedoch nie als Operanden, auf die eingewirkt wird.

Diese Einengung wird heute noch von zahlreichen Fachkolleginnen und Fachkollegen aus Physik und Mathematik weitergetragen und verhindert einen sinnvollen Umgang mit diesen Algebren.

Selbstverständlich repräsentieren Pauli- und Dirac-Matrizen Operatoren, also beispielsweise Spiegelachsen, an denen mathematische Objekte reflektiert werden. Sie repräsentieren aber auch Operanden, also beispielsweise Vektoren, die gespiegelt werden.

3. Was bisher geschah

In bisherigen Ausarbeitungen wurden Materialien zur Einführung in die Pauli-Algebra entwickelt und erprobt, die als Einstieg die (im Folgenden nun in moderner Schreibung dargestellte) Formel von Grassmann [1, S. 72]

$$x_1 = \frac{p_0 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n}{p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n} \qquad \{2\}$$

zur Lösung Linearer Gleichungssysteme

$$p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + p_3\, x_3 + \ldots + p_n\, x_n = p_0 \qquad \{3\}$$

nutzen.

Dieser Einstieg ist auch deshalb so tragfähig und didaktisch überzeugend, weil er *im Interesse armer Studenten* („in the interest of poor students" [16]) *dieses Geheimnis* („this secret" [16]), *das in der hochsteril gereinigten algebraischen Bildung* der heutigen Zeit *sorgfältig versteckt wird* („which is carefully hidden in the purified algebraic education" [16]), verrät: Wir vergleichen geometrische Größen, und wir vergleichen sie, indem wir sie dividieren.

Die äußeren Produkte in Grassmanns Formel {1} bzw. {2} sind deshalb für Lernende so leicht zugänglich, weil sie geometrisch gedeutet werden.

Im Fall eines Linearen Gleichungssystems zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$\mathbf{a}\, x + \mathbf{b}\, y = \mathbf{r} \qquad \{4\}$$

sind Zähler und Nenner dieser Formel zwei orientierte Parallelogramme $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ und $\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}$, die dividiert werden.

Und m Fall eines Linearen Gleichungssystems dreier Gleichungen mit drei Unbekannten

$$\mathbf{a}\, x + \mathbf{b}\, y + \mathbf{c}\, z = \mathbf{r} \qquad \{5\}$$

sind Zähler und Nenner dieser Formel zwei orientierte Parallelepipede $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ und $\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$, die dividiert werden.

In den entwickelten und erprobten Materialien [18] (englische Fassung siehe [19]) werden also erst einmal orientierte Flächenelemente (orientierte Parallelogramme) und später orientierte Volumenelemente (orientierte Parallelepipede) geometrisch sehr anschaulich diskutiert und an zahlreichen Beispielen leicht nachvollziehbar verdeutlicht.

Ein solches Beispiel wird auch im beigefügten Poster der Präsentation [24] erläutert:

$$\begin{aligned} 6\,x + 5\,y &= 40 \\ 8\,x + 7\,y &= 54 \end{aligned} \qquad \{6\}$$

Dieses algebraische Lineare Gleichungssystem wird nun geometrisch eingebettet, indem die Koeffizienten als Komponenten von Vektoren eines Euklidischen Raums

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 6\,\sigma_x + 8\,\sigma_y \\ \mathbf{b} &= 5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y \\ \mathbf{r} &= 40\,\sigma_x + 54\,\sigma_y \end{aligned} \qquad \{7\}$$

geometrisch gefasst werden. Mit Hilfe von {2} ergibt sich der Lösungswert von x durch Division des orientierten Flächeninhalts des durch den Ergebnisvektor **r** und den Koeffizientenvektor **b** aufgespannten Parallelogramms

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} &= (40\,\sigma_x + 54\,\sigma_y) \wedge (5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y) \\ &= 10\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned} \qquad \{8\}$$

durch den orientierten Flächeninhalt des von den beiden Koeffizientenvektoren **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (6\,\sigma_x + 8\,\sigma_y) \wedge (5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y) \\ &= 2\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned} \qquad \{9\}$$

zu

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = 5 \qquad \{10\}$$

Dieser simple Lösungsansatz kann selbst mit relativ mathematikfernen Studierenden erfolgreich und unter Nutzung von GAALOP auch zeiteffektiv [17] erarbeitet werden.

Das Ziel dieses Beitrags ist jedoch, auf eine Verallgemeinerung zu blicken. Zum ersten ist da die Verallgemeinerung auf höher-dimensionale Räume, die schon durch die Grassmannsche Formel {1} vollständig gegeben wird.

Im dreidimensionalen Fall eines Linearen Gleichungssystems dreier Gleichungen mit drei Unbekannten hätten wir zur Bestimmung von x durch

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \qquad \{11\}$$

dann die Division zweier orientierter Volumenelemente (bzw. Parallelepipede) zu betrachten.

Eine zweite, ebenso interessante Verallgemeinerung betrifft die geometrische Einbettung des algebraischen Linearen Gleichungssystems. Was passiert, wenn, wir die Koeffizienten des LGS {6} nicht als Komponenten von Vektoren eines Euklidischen, also rein räumlichen Raumes deuten, sondern als Komponenten von Vektoren einer Minkowskischen Raumzeit?

Die didaktische Antwort lautet: Wir erhalten einen Einstieg in die Dirac-Algebra.

4. Was nun geschieht

Die Einbettung in eine Raumzeit im Sinne von Minkowski verlangt, das eine Dimension durch einen zeitlichen Basisvektor

$$\gamma_t^2 = 1 \tag{12}$$

und die restlichen Dimensionen durch räumliche Basisvektoren

$$\gamma_x^2 = \gamma_y^2 = \gamma_z^2 = \text{etc}\ldots = -1 \tag{13}$$

aufgespannt werden.

Im zweidimensionalen Fall des Linearen Gleichungssystems {6} werden die Koeffizienten also als raumzeitliche Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 6\,\gamma_t + 8\,\gamma_x \\ \mathbf{b} &= 5\,\gamma_t + 7\,\gamma_x \\ \mathbf{r} &= 40\,\gamma_t + 54\,\gamma_x \end{aligned} \tag{14}$$

geometrisch umgedeutet. Mit Hilfe von {2} ergibt sich der Lösungswert von x durch Division des orientierten Flächeninhalts des durch den Ergebnisvektor **r** und den Koeffizientenvektor **b** aufgespannten raumzeitlichen Parallelogramms

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} &= (40\,\gamma_t + 54\,\gamma_x) \wedge (5\,\gamma_t + 7\,\gamma_x) \\ &= 10\,\gamma_t\gamma_x \end{aligned} \tag{15}$$

durch den orientierten Flächeninhalt des von den beiden Koeffizientenvektoren **a** und **b** aufgespannten raumzeitlichen Parallelogramms

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (6\,\gamma_t + 8\,\gamma_x) \wedge (5\,\gamma_t + 7\,\gamma_x) \\ &= 2\,\gamma_t\gamma_x \end{aligned} \tag{16}$$

zu

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = 5 \tag{17}$$

Ein Vergleich mit Abschnitt 3 zeigt, dass der Schwierigkeitsgrad der Rechnung nicht zugenommen hat. Es ist immer ermutigend für Lernende, wenn das neu zu Lernende sich am schon Gelernten anlehnt.

Dieser Einstieg in die Dirac-Algebra, der die Thematisierung des inneren Produkts nach hinten schiebt und die Unterschiede zum Vorgehen in der Pauli-Algebra klein hält, ist also tatsächlich kurz (also zeitschonend möglich) und schmerzlos (also ohne all zu große Friktionen im konzeptionellen Vorgehen).

Deshalb wurden die Materialien [17] nun für den englischsprachigen Master-Studiengang Computer Science der iubh ohne große Umwege direkt in die Dirac-Algebra übersetzt. Es sollen die gleichen Linearen Gleichungssysteme gelöst werden, indem jetzt die Dirac-Algebra als Algebra der Raumzeit herangezogen wird.

Diese neuen Materialien sind im Anhang dieses Beitrags [25] beigefügt.

Zur Vertiefung und Einübung dieses Ansatzes kann mit den Studierenden im Anschluss auch auf die Bestimmung von Matrizeninversen eingegangen werden.

5. Matrizeninverse

Inverse quadratischer Matrizen lassen sich vollkommen analog zum Vorgehen in den Abschnitten drei und vier bestimmen, indem die Basisvektoren als Ergebnisvektoren gesetzt werden.

Am Beispiel des Linearen Gleichungssystems {6} erhalten wir dann die beiden Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} 6\,x + 5\,y &= 1 \qquad & 6\,x + 5\,y &= 0 \\ 8\,x + 7\,y &= 0 \qquad & 8\,x + 7\,y &= 1 \end{aligned} \tag{18}$$

Diese algebraischen Linearen Gleichungssysteme werden nun geometrisch eingebettet, indem die Koeffizienten als Komponenten von Vektoren eines Euklidischen Raums

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 6\,\sigma_x + 8\,\sigma_y \\ \mathbf{b} &= 5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y \\ \mathbf{r_1} &= \sigma_x \qquad \mathbf{r_2} = \sigma_y \end{aligned} \tag{19}$$

geometrisch gefasst werden. Mit Hilfe von {2} ergeben sich dann die Elemente der ersten Zeile der zu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \tag{20}$$

inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ durch Division der orientierten Flächeninhalte der durch die Basisvektoren σ_x sowie σ_y und den Koeffizientenvektor **b** aufgespannten Parallelogramme

$$\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = \sigma_x \wedge (5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y) = 7\,\sigma_x\sigma_y \tag{21}$$

$$\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = \sigma_y \wedge (5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y) = -5\,\sigma_x\sigma_y \tag{22}$$

durch den orientierten Flächeninhalt des von den beiden Koeffizientenvektoren **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (6\,\sigma_x + 8\,\sigma_y) \wedge (5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y) \\ &= 2\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned} \tag{23}$$

zu

$$x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = 3{,}5 \tag{24}$$

$$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = -2{,}5 \tag{25}$$

Selbstverständlich ergibt sich wieder der gleiche Lösungswert von x = 5, wenn mit Hilfe einer Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\,\vec{r} = \begin{pmatrix} 3{,}5 & -2{,}5 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} \tag{26}$$

probehalber der Lösungsvektor bestimmt wird.

In der Dirac-Algebra bei raumzeitlicher Einbettung sieht der Lösungsweg nahezu identisch aus: Die Einbettung erfolgt nun wieder in eine Raumzeit im Sinne Minkowskis gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 6\,\gamma_t + 8\,\gamma_x \\ \mathbf{b} &= 5\,\gamma_t + 7\,\gamma_x \\ \mathbf{r_1} &= \gamma_t \qquad \mathbf{r_2} = \gamma_x \end{aligned} \tag{27}$$

Mit Hilfe von {2} ergeben sich dann die Elemente der ersten Zeile der zu **A** {20} inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ durch Division der orientierten Flächeninhalte der durch die Basisvektoren γ_t sowie γ_x und den Koeffizientenvektor **b** aufgespannten Parallelogramme

$$\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = \gamma_t \wedge (5\,\gamma_t + 7\,\gamma_x) = 7\,\gamma_t\gamma_x \qquad \{28\}$$

$$\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = \gamma_x \wedge (5\,\gamma_t + 7\,\gamma_x) = -\,5\,\gamma_t\gamma_x \qquad \{29\}$$

durch den orientierten Flächeninhalt des von den beiden Koeffizientenvektoren **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (6\,\gamma_t + 8\,\gamma_x) \wedge (5\,\gamma_t + 7\,\gamma_x)\\ &= 2\,\gamma_t\gamma_x\end{aligned} \qquad \{30\}$$

zu

$$x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \quad 3{,}5 \qquad \{31\}$$

$$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = -\,2{,}5 \qquad \{32\}$$

was selbstverständlich wieder auf den gleichen Lösungswert von x = 5 führt.

Und auch hier können mit Hilfe der Grassmannschen Lösungsformel höher-dimensionale Situationen problemlos gelöst werden. Beispielsweise ergibt sich für die erste Zeile der Inversen einer (3 x 3)-Matrix dann

$$x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \qquad \{33\}$$

$$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \qquad \{34\}$$

$$x_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{r_3} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \qquad \{35\}$$

Und es schadet auch nichts, sich einmal anzuschauen, was Roger Penrose vor seiner Beschäftigung mit Schwarzen Löchern so gemacht hat.

6. Konsistente, überdeterminierte Lineare Gleichungssysteme

Eine weitere Verallgemeinerung ergibt sich, wenn konsistente, überdeterminierte Lineare Gleichungssysteme betrachtet werden, also beispielsweise ein konsistentes, eindeutig lösbares Lineares Gleichungssystem dreier Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$\begin{aligned}6\,x + 5\,y &= 40\\ 8\,x + 7\,y &= 54\\ 4\,x + 9\,y &= 38\end{aligned} \qquad \{36\}$$

Auch hier führt eine Anwendung der von Grassmann aufgezeigten Lösungsformel {1} bzw. {2} zum sofortigen Ergebnis. Die geometrische Einbettung erfolgt nun in einen dreidimensionalen Raum, indem die Koeffizienten des überdeterminierten Linearen Gleichungssystems geometrisch als die Vektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= 6\,\sigma_x + 8\,\sigma_y + 4\,\sigma_z\\ \mathbf{b} &= 5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y + 9\,\sigma_z\\ \mathbf{r} &= 40\,\sigma_x + 54\,\sigma_y + 38\,\sigma_z\end{aligned} \qquad \{37\}$$

gefasst werden. Mit Hilfe von {2} ergibt sich der Lösungswert von x durch Division des orientierten Flächeninhalts des durch den Ergebnisvektor **r** und den Koeffizientenvektor **b** aufgespannten Parallelogramms

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} &= (40\,\sigma_x + 54\,\sigma_y + 38\,\sigma_z) \wedge (5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y + 9\,\sigma_z)\\ &= 10\,\sigma_x\sigma_y + 220\,\sigma_y\sigma_z - 170\,\sigma_z\sigma_x\end{aligned} \qquad \{38\}$$

durch den orientierten Flächeninhalt des von den beiden Koeffizientenvektoren **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (6\,\sigma_x + 8\,\sigma_y + 4\,\sigma_z) \wedge (5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y + 9\,\sigma_z)\\ &= 2\,\sigma_x\sigma_y + 44\,\sigma_y\sigma_z - 34\,\sigma_z\sigma_x\end{aligned} \qquad \{39\}$$

wieder wie erwartet zu

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = 5 \qquad \{40\}$$

Es macht also keinen großen Unterschied, ob eine Einbettung in einen nieder- oder höher-dimensionalen Raum erfolgt, solange alle Vektoren hier in einer Ebene liegen.

Oder allgemein: Wenn die n Koeffizientenvektoren eines Linearen Gleichungssystems aus n + k Gleichungen und n Unbekannten eine n-dimensionale, flache Hyperebene im (n + k)-dimensionalen Raum aufspannen, dann existiert genau dann eine eindeutige Lösung, wenn der Ergebnisvektor **r** = p_0 ebenfalls in dieser n-dimensionalen Hyperebene liegt.

Und wieder kann dieser Lösungsansatz problemlos in eine raumzeitliche Betrachtung und damit in die Dirac-Algebra übersetzt werden:

Das konsistente Lineare Gleichungssystem {36} wird auch dann gelöst, wenn die Koeffizienten als raumzeitliche Vektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= 6\,\gamma_t + 8\,\gamma_x + 4\,\gamma_y\\ \mathbf{b} &= 5\,\gamma_t + 7\,\gamma_x + 9\,\gamma_y\\ \mathbf{r} &= 40\,\gamma_t + 54\,\gamma_x + 38\,\gamma_y\end{aligned} \qquad \{41\}$$

gefasst werden. Mit Hilfe von {2} ergibt sich der Lösungswert von x durch eine Division des raumzeitlichen, durch den Ergebnisvektor **r** und den Koeffizientenvektor **b** aufgespannten orientierten Parallelogramms

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} &= (40\,\gamma_t + 54\,\gamma_x + 38\,\gamma_y) \wedge (5\,\gamma_t + 7\,\gamma_x + 9\,\gamma_y)\\ &= 10\,\gamma_t\gamma_x + 170\,\gamma_t\gamma_y + 220\,\gamma_x\gamma_y\end{aligned} \qquad \{42\}$$

durch das raumzeitliche, von den beiden Koeffizientenvektoren **a** und **b** aufgespannte orientierte Parallelogramm

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (6\,\gamma_t + 8\,\gamma_x + 4\,\gamma_y) \wedge (5\,\gamma_t + 7\,\gamma_x + 9\,\gamma_y)\\ &= 2\,\gamma_t\gamma_x + 34\,\gamma_t\gamma_y + 44\,\gamma_x\gamma_y\end{aligned} \qquad \{43\}$$

wieder wie erwartet zu

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = 5 \qquad \{44\}$$

Eine solche Division ist allerdings nur dann problemlos erlaubt, wenn die orientierten Flächenstücke im Zähler und Nenner parallel zueinander liegen. Nur dann sind die Prä-Multiplikation von links und die Postmultiplikation von rechts

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b})\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \qquad \{45\}$$

identisch, da parallele Flächenstücke kommutieren.

7. Verallgemeinerte Matrizeninverse

Eine Parallelität der orientierten Flächenstücke von Zähler und Nenner ist bei der Berechnung nichtquadratischer, verallgemeinerter Matrizeninverse nicht gegeben. Wir erhalten also unterschiedliche

Resultate für die Matrizeninverse, je nachdem, ob wir von links prä-multiplizieren oder von rechts post-multiplizieren.

Die zur (2 x 3)-Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad \{46\}$$

linksseitig inverse (3 x 2)-Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ wird im Folgenden deshalb durch Prä-Multiplikation mit dem inversen äußeren Produkt $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}$ von links gebildet. Die benötigten orientierten Flächenstücke werden dann bei Einbettung in einen rein räumlichen Raum der Pauli-Algebra mit Hilfe der folgenden Vektoren gebildet

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 6\,\sigma_x + 8\,\sigma_y + 4\,\sigma_z \\ \mathbf{b} &= 5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y + 9\,\sigma_z \qquad \{47\} \\ \mathbf{r_1} &= \sigma_x \qquad \mathbf{r_2} = \sigma_y \qquad \mathbf{r_3} = \sigma_z \end{aligned}$$

und lauten:

$$\begin{aligned} \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} &= \sigma_x \wedge (5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y + 9\,\sigma_z) \\ &= 7\,\sigma_x\sigma_y - 9\,\sigma_z\sigma_x \qquad \{48\} \\ \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} &= \sigma_y \wedge (5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y + 9\,\sigma_z) \\ &= -5\,\sigma_x\sigma_y + 9\,\sigma_y\sigma_z \qquad \{49\} \\ \mathbf{r_3} \wedge \mathbf{b} &= \sigma_z \wedge (5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y + 9\,\sigma_z) \\ &= -7\,\sigma_y\sigma_z + 5\,\sigma_z\sigma_x \qquad \{50\} \end{aligned}$$

Und dann ist da noch der orientierte Flächeninhalt des von den beiden Koeffizientenvektoren **a** und **b** aufgespannten rein räumlichen Parallelogramms

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (6\,\sigma_x + 8\,\sigma_y + 4\,\sigma_z) \wedge (5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y + 9\,\sigma_z) \\ &= 2\,\sigma_x\sigma_y + 44\,\sigma_y\sigma_z - 34\,\sigma_z\sigma_x \qquad \{51\} \end{aligned}$$

Dieses orientierte Parallelogramm kann auch als räumliche Determinante der nicht-quadratischen Matrix **A** {46} gedeutet werden.

Nach kurzer Rechnung und mit Hilfe von

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 = -3096 \qquad \{52\}$$

ergeben sich die Elemente der ersten Zeile der Verallgemeinerten Pauli-Algebra-Matrizeninverse

$$\begin{aligned} x_1 &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) \qquad \{53\} \\ &= \frac{1}{1548}(160 - 198\,\sigma_x\sigma_y - 110\,\sigma_y\sigma_z - 154\,\sigma_z\sigma_x) \\ x_2 &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) \qquad \{54\} \\ &= \frac{1}{1548}(193 + 153\,\sigma_x\sigma_y + 85\,\sigma_y\sigma_z + 119\,\sigma_z\sigma_x) \\ x_3 &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_3} \wedge \mathbf{b}) \qquad \{55\} \\ &= \frac{1}{1548}(-239 - 9\,\sigma_x\sigma_y - 5\,\sigma_y\sigma_z - 7\,\sigma_z\sigma_x) \end{aligned}$$

Und auch hier ergibt sich selbstverständlich wieder der gleiche Lösungswert von x = 5, wenn mit Hilfe einer Matrizenmultiplikation die Komponenten der ersten Zeile der verallgemeinerten Matrizeninverse {53} – {55} zur Berechnung herangezogen werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\,\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 54 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} \qquad \{56\}$$

Dabei wird sichtbar, dass nur die skalaren Anteile der Komponenten zum Endresultat beitragen. Die bivektoriellen Anteile kompensieren sich und fallen weg.

Dieser skalare Anteil der Verallgemeinerten Pauli-Algebra-Matrizeninverse [20], [21] entspricht der Moore-Penrose Matrizeninversen [22], [23].

$$\mathbf{A}^{+} = \frac{1}{1548}\begin{pmatrix} 160 & 193 & -239 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \qquad \{57\}$$

Roger Penrose hat es sich also einfach gemacht und auf eine Diskussion der bivektoriellen, also in der Struktur typisch quaternionischen Zusatzterme, verzichtet. Und leider hat er es auch unterlassen, eine raumzeitliche Formulierung der Moore-Penrose-Matrizeninversen zu geben. Dies werden wir im folgenden Abschnitt mit Hilfe der Dirac-Algebra nachholen.

8. Verallgemeinerte raumzeitliche Matrizeninverse

Die zur Rechteck-Matrix **A** {46} linksseitig inverse nicht-quadratische raumzeitliche Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ wird wieder durch Prä-Multiplikation mit dem inversen äußeren Produkt $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}$ von links gebildet.

Die benötigten orientierten raumzeitlichen Flächenstücke werden nun durch Einbettung in eine Minkowski-Raumzeit gebildet, indem die raumzeitlichen Vektoren wie bereits bekannt mit Hilfe der Dirac-Algebra ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 6\,\gamma_t + 8\,\gamma_x + 4\,\gamma_y \\ \mathbf{b} &= 5\,\gamma_t + 7\,\gamma_x + 9\,\gamma_y \qquad \{58\} \\ \mathbf{r_1} &= \gamma_t \qquad \mathbf{r_2} = \gamma_x \qquad \mathbf{r_3} = \gamma_y \end{aligned}$$

Die raumzeitlichen orientierten Flächenstücke (also raumzeitliche Parallelogramme) lauten sodann:

$$\begin{aligned} \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} &= \gamma_t \wedge (5\,\gamma_t + 7\,\gamma_x + 9\,\gamma_y) \\ &= 7\,\gamma_t\gamma_x + 9\,\gamma_t\gamma_y \qquad \{59\} \\ \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} &= \gamma_x \wedge (5\,\gamma_t + 7\,\gamma_x + 9\,\gamma_y) \\ &= -5\,\gamma_t\gamma_x + 9\,\gamma_x\gamma_y \qquad \{60\} \\ \mathbf{r_3} \wedge \mathbf{b} &= \gamma_y \wedge (5\,\gamma_t + 7\,\gamma_x + 9\,\gamma_y) \\ &= -5\,\gamma_t\gamma_y - 7\,\gamma_x\gamma_y \qquad \{61\} \end{aligned}$$

Und das raumzeitliche orientierte Flächenstück, das von den beiden raumzeitlichen Koeffizientenvektoren **a** und **b** aufgespannt wird und das als raumzeitliche Determinante der der nicht-quadratischen Matrix **A** gesehen werden kann, ist bereits bekannt und lautet:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (6\,\gamma_t + 8\,\gamma_x + 4\,\gamma_y) \wedge (5\,\gamma_t + 7\,\gamma_x + 9\,\gamma_y) \\ &= 2\,\gamma_t\gamma_x + 34\,\gamma_t\gamma_y + 44\,\gamma_x\gamma_y \qquad \{62\} \end{aligned}$$

Nach kurzer Rechnung und mit Hilfe von

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 = -776 \qquad \{63\}$$

wobei die unterschiedliche Signatur der Basisvektoren zu berücksichtigen ist, ergeben sich die Elemente der ersten Zeile der Verallgemeinerten Dirac-Algebra-Matrizeninverse zu

$$x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) \qquad \{64\}$$

$$= \frac{1}{388} (-160 + 198\, \gamma_t\gamma_x - 154\, \gamma_t\gamma_y - 110\, \gamma_x\gamma_y)$$

$$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) \qquad \{65\}$$

$$= \frac{1}{388} (203 - 153\, \gamma_t\gamma_x + 119\, \gamma_t\gamma_y + 85\, \gamma_x\gamma_y)$$

$$x_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{r_3} \wedge \mathbf{b}) \qquad \{66\}$$

$$= \frac{1}{388} (-69 + 9\, \gamma_t\gamma_x - 7\, \gamma_t\gamma_y - 5\, \gamma_x\gamma_y)$$

Und auch hier kompensieren sich die bivektoriellen Anteile wieder gegenseitig, so dass bei einer erneuten Berechnung wie erwartet wieder der skalare Lösungswert von x = 5 ermittelt wird:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\, \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 54 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} \qquad \{67\}$$

Der skalare Anteil der Verallgemeinerten Dirac-Algebra-Matrizeninversen entspricht jedoch nicht mehr der Moore-Penrose Matrizeninversen, sondern kann als raumzeitliches Analogon

$$\mathbf{A}_{\text{spacetime}}{}^{+} = \frac{1}{388} \begin{pmatrix} -160 & 203 & -69 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \qquad \{68\}$$

zur rein räumlichen Moore-Penrose-Matrizeninversen interpretiert werden. Der konventionellen Moore-Penrose-Matrizeninversen fehlt also der gewisse gravitative, hyperbolische Charme.

Und das ist heute leider öfter so: Glauben wir wirklich, dass die Modelle und Strukturen, die wir derzeit in Natur- und Gesellschaftswissenschaften (so auch im Bereich der Physik sozio-ökonomischer Systeme) konstruieren, lediglich rein räumliche, Euklidische Strukturen sein sollten?

Oder sollten wir nicht öfters auf hyperbolische Strukturen zurückgreifen, um die Modellbildung auf Grundlage der Dirac-Algebra zu weiten und konzeptionell zu öffnen. Es ist anzunehmen, dass bei einer solchen Öffnung einige bisher recht komplexe und undurchschaubare Beziehungen leichter zugänglich und verständlicher werden.

9. Literatur

[1] Grassmann, Hermann (1844): Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin. Erster Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend. Leipzig: Verlag von Otto Wigand.

[2] Grassmann, Hermann (1855): Sur les différents genres de multiplication. In: Crelles Journal, Band 49, Heft 2, S. 123-141. Wiederabdruck in: Friedrich Engel (1904): Hermann Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke. Zweiten Bandes Erster Theil: Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis, herausgegeben von E. Study, G. Scheffers, F. Engel. Leipzig: Verlag von B. G. Teubner, S. 199-217.

[3] Hestenes, David (2015): Space-Time Algebra. 2. Auflage, Cham, Heidelberg, New York: Springer.

[4] Hestenes, David (2002): New Foundations for Classical Mechanics. 2. Auflage, New York, Boston, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[5] Hestenes, David (2003): Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, S. 104-121.

[6] Snygg, John (1997): Clifford Algebra. A Computational Tool for Physicists. New York, Oxford: Oxford University Press.

[7] Doran, Chris; Lasenby, Anthony (2003): Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: Cambridge University Press.

[8] Josipović, Miroslav (2020): Geometric Multiplication of Vectors. An Introduction to Geometric Algebra in Physics. Cham, Switzerland: Springer Nature.

[9] Vince, John (2008): Geometric Algebra for Computer Graphics. London: Springer-Verlag.

[10] Vince, John (2018): Imaginary Mathematics for Computer Science. Cham, Heidelberg, New York: Springer.

[11] Perwass, Christian (2009): Geometric Algebra with Applications in Engineering. Berlin, Heidelberg: Springer.

[12] Hildenbrand, Dietmar (2013): Foundations of Geometric Algebra Computing. Berlin, Heidelberg: Springer.

[13] Bayro-Corrochano, Eduardo (2005): Handbook of Geometric Computing. Applications in Pattern Recognition, Computer Vision, Neuralcomputing, and Robotics. Berlin, Heidelberg: Springer.

[14] Bayro-Corrochano, Eduardo (2019): Geometric Algebra Applications, Vol. I – Computer Vision, Graphics and Neurocomputing. Cham, Switzerland: Springer Nature.

[15] Bayro-Corrochano, Eduardo (2020): Geometric Algebra Applications, Vol. II – Robot Modelling and Control. Cham, Switzerland: Springer Nature.

[16] Arnold, Vladimir Igorevich (1998): On Teaching Mathematics. In: Uspekhi Mat. Nauk, Vol. 53, No. 1, S. 229-234. Englische Übersetzung in: Russian Math. Surveys, Vol. 53, No. 1, S. 229-236.

[17] Martin Erik Horn (2018): Die Geometrische Algebra mit GAALOP im Schnelldurchgang.

In: PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Würzburg, Url: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/881 (Stand 5/2021).
[18] Horn, Martin Erik (2018): Moderne Lineare Algebra: Geometrische Algebra mit GAALOP. Übungsblätter des Moduls „Wirtschaftsmathematik“ der Bachelor-Poolveranstaltungen an der Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin, LV-Nr. 200601.07, überarbeitete und ergänzte Fassung vom 30. April 2018 (ursprüngliche Fassung vom 02. Okt. 2017). Sommersemester 2017, HWR Berlin, veröffentlicht als Anhang des Beitrags [17] unter der Url: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/downloadSuppFile/881/209 (Stand 5/2021).
[19] Martin Erik Horn (2018): Modern Linear Algebra: Geometric Algebra with GAALOP. Worksheets of the module „Mathematics for Business and Economics“ of joint first-year bachelor lessons at Berlin School of Economics and Law/Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin, LV-Nr. 200691.01 & 400 691.01, Stand: 07. Jan. 2018. Wintersemester 2017/ 2018, BSEL/HWR Berlin, veröffentlicht als Anhang des Beitrags [17] unter der Url: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/downloadSuppFile/881/210 (Stand 5/2021).
[20] Horn, Martin Erik (2016): Inverse von Rechteck-Matrizen. In: BzMU – Beiträge zum Mathematikunterricht. Tagungsband der 50. Jahrestagung der GDM in Heidelberg, Band 1, Münster: WTM-Verlag, S. 457-460.
[21] Horn, Martin Erik (2016): Moderne Lineare Algebra im wirtschaftsmathematischen Kontext. In: Walther Paravicini, Jörn Schnieder (Hrsg.): Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2015. Beiträge zum gleichnamigen Symposium an der Universität zu Lübeck. Münster: WTM-Verlag, S. 103-129.
[22] Horn, Martin Erik (2018): Verallgemeinerte Matrizeninverse und Moore-Penrose Matrizeninverse aus physikdidaktischer Sicht. In: PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Würzburg, Url: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/851 (Stand 5/2021).
[23] Horn, Martin Erik (2018): Another Introduction to Geometric Algebra with some Comments on Moore-Penrose Inverses. Symmetries in Science XVII, Journal of Physics, Conference Series: 1071 (2018) 012012, Bristol: IOP Publishing.

Dem Beitrag beigefügte Medien

[24] Horn, Martin Erik (2021): Poster DD 14.4, ‚Dirac-Algebra: Kurz und schmerzlos‘ und Poster SOE 3.8, ‚Dirac Algebra Generalized Matrix Inverses‘, beide vom 22. März 2021, siehe auch die beiden Urls: www.dpg-verhandlungen.de/year/2021/conference/didaktik/part/dd/session/14/contribution/4 (Stand 5/2021), www.dpg-verhandlungen.de/year/2021/conference/bpcppdysoe/part/soe/session/3/contribution/8 (Stand 5/2021).
[25] Horn, Martin Erik (2020): Solving Systems of Linear Equations with Dirac Algebra. Worksheets 7, 9, and 11 of the course “Advanced Mathematics (MQM 110)” of the Master program “Computer Science” at iubh – Internationale Hochschule, Campus Berlin, Wintersemester 2020/2021, Stand: 21. Nov. 2020.
[26] Horn, Martin Erik (2021): Die skalare Multiplikation von Vektoren als äußeres Produkt. Ergänzung zum Beitrag DD 14.4 zur virtuellen Frühjahrstagung des Fachverband Didaktik der Physik der DPG 2021.
[27] Horn: Martin Erik (2020): Matrizenrechnung für doofe Computer. Ergänzungsfolien des Kurses „Mathematik 1“ des Bachelor-Studiengangs Ingenieurinformatik der HTW – Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin, Corona-Semester Sommer 2020, Teilfolien 01 – 08 mit Stand vom 16. Juli 2020.