

Multiple Repräsentationen als fachdidaktischer Zugang zum Satz von Gauß Qualitative Zugänge zur Interpretation der Divergenz von Vektorfeldern

Larissa Hahn*, Pascal Klein*

*Georg-August-Universität Göttingen, Didaktik der Physik, Friedrich-Hund-Platz 1, 37077 Göttingen
larissa.hahn@uni-goettingen.de

Kurzfassung

Die Divergenz ist ein zentrales Konzept der Vektoranalysis und relevant für viele Teilgebiete der Physik, in denen Vektorfelder z. B. zur Beschreibung von Bewegungen verwendet werden. Für die physikalische Anwendung ist dabei vor allem ein konzeptionelles Verständnis der Divergenz von Bedeutung, welches Studierenden jedoch im Gegensatz zu algebraischen Berechnungen häufig Schwierigkeiten bereitet. Bisherige Forschungsergebnisse betonen daher die Notwendigkeit zur Förderung des konzeptionellen Verständnisses u. a. durch den Einsatz multi-repräsentationaler, qualitativer Zugänge. Zu diesem Zweck stellt dieser Beitrag einen visuellen Zugang zum qualitativen Verständnis der Divergenz vor, der auf einer Beurteilung der partiellen Vektorableitungen anhand zweidimensionaler Vektorfelddiagramme beruht. Da insbesondere die Zerlegung von Vektoren in ihre Feldkomponenten - eine zur Beurteilung der partiellen Ableitungen essentielle Prozedur - eine Herausforderung für Studierende darstellt, werden zudem Anregungen für eine instruktionale Unterstützung durch Zeichenaktivitäten gegeben. Abschließend wird eine Studie zur Wirksamkeitsuntersuchung einer zeichenbasierten Instruktion vorgestellt.

1. Einleitung

Vektoren und Vektorfelder finden Anwendung in vielen Teilgebieten der Physik, so werden z. B. Gravitations- und Zentralfelder in der Mechanik sowie Strömungsfelder in der Elektrodynamik und Fluidmechanik häufig mithilfe von Vektorfeldern beschrieben. Typischerweise werden Vektorfelder graphisch mithilfe von Pfeilen dargestellt, welche die Richtung und den Betrag des Feldes repräsentieren. So kann z. B. jedem Teilchen einer sich bewegenden Flüssigkeit ein Geschwindigkeitsvektor zugeordnet werden, der die Schnelligkeit und die Richtung des sich bewegenden Teilchens indiziert. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in jedem Punkt \vec{r} definiert dann ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$. Ebenen Vektorfeldern im \mathbb{R}^2 liegt eine Orthonormalbasis aus den kartesischen Einheitsvektoren \hat{e}_x und \hat{e}_y zugrunde, sodass die Vektoren des Vektorfeldes mithilfe der Komponentenzerlegung

$$\vec{F}(x, y) = F_x(x, y)\hat{e}_x + F_y(x, y)\hat{e}_y \quad (1)$$

(x -Komponente F_x und y -Komponente F_y) als Linearkombination der kartesischen Einheitsvektoren dargestellt werden können. Während diese Darstellung als algebraische Gleichung für quantitative Berechnungen nützlich ist, bieten Vektorfelddiagramme den Vorteil, viele Eigenschaften des Feldes auf einen Blick darstellen zu können, so z. B. seine Divergenz oder Rotation – vorausgesetzt man weiß, wie diese Konzepte qualitativ zu verstehen sind. Divergenz und Rotation

sind integrale Bestandteile der Vektoranalysis, z. B. in Form des Gaußschen Integralsatzes, sowie verschiedener Erhaltungssätze (z. B. der Kontinuitätsgleichung), denen Physikstudierenden bereits in der Studieneingangsphase häufig begegnen. Dementsprechend hoch ist die Bedeutung eines fundierten Verständnisses vektorieller Konzepte für das Physikstudium. So ergab eine aktuelle Studie von Burkholder et al. (2021), dass eine umfangreiche Vorbereitung der Vektorrechnung signifikant mit der Leistung von Studierenden in einem Einführungskurs zum Elektromagnetismus zusammenhängt. Weitere Forschungsergebnisse zeigten allerdings auch, dass Studierende kaum Probleme mit den mathematischen Grundlagen der vektoranalytischen Konzepte hatten; konzeptionelle Hintergründe hingegen, welche insbesondere für das physikalische Verständnis relevant sind, bereiteten ihnen Schwierigkeiten (z. B. Bollen et al., 2015; Pepper et al., 2012; Singh & Maries, 2013). Da in der gängigen Praxis häufig formal-abstrakte, mathematische Erklärungsansätze genutzt werden (Smith, 2014), wird an dieser Stelle die Notwendigkeit neuer Zugänge zu vektoriellen Konzepten wie der Divergenz deutlich. In diesem Beitrag wird daher ein Ansatz für eine visuelle Interpretation der Divergenz eines Vektorfeldes \vec{F} (für ein Volumen ΔV mit der Oberfläche $\partial(\Delta V)$ und dem Flächendifferential $d\vec{n}$),

$$\operatorname{div}\vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial(\Delta V)} \vec{F} \cdot d\vec{n}, \quad (2)$$

anhand eines Vektorfelddiagramms vorgestellt.

Weiterhin werden Zeichenaktivitäten als fachdidaktische Methode zur Unterstützung und Einbettung dieses Ansatzes in gezielte Instruktionen erläutert.

2. Fachdidaktischer Hintergrund

2.1. Lernschwierigkeiten beim Umgang mit Vektorfeldern

Ein Überblick von Smith (2014) über verschiedene Lehrbücher zeigt, dass die Divergenz in einführenden Texten zur Physik in der Regel nicht oder nur unzureichend qualitativ erklärt wird (Smith, 2014). In weiterführenden Physiklehrbüchern findet ebenfalls kaum eine geometrische Erläuterung der Divergenz statt; so verwenden die meisten Texte entweder eine algebraische Beschreibung oder definieren die Divergenz nicht formal (Smith, 2014). Empirische Forschungsbefunde belegten wiederholt, dass Studierende Schwierigkeiten haben, zu beurteilen, ob ein Vektorfelddiagramm divergenzfrei ist oder nicht (Klein et al., 2018; 2019; Pepper et al., 2012; Singh & Maries, 2013). Analog zu Präkonzepten, die bei SchülerInnen auftreten, finden sich bei Studierenden z. T. Vorstellungen über Divergenz, die einer wörtlichen Übersetzung des Begriffs gleichkommen, z. B. ein „Auseinanderlaufen“ des Feldes (Pepper et al., 2012). Außerdem wird Divergenz lose mit Quellen und Senken assoziiert oder als globale Eigenschaft eines Feldes aufgefasst (Baily et al., 2016). Singh und Maries (2013) schlussfolgerten treffend, dass selbst Studierende mit Hochschulabschluss Schwierigkeiten mit dem Konzept der Divergenz haben, obwohl sie wissen, wie die Divergenz für ein gegebenes Vektorfeld mathematisch berechnet wird. Mehrere Studien vertieften diese Forschungslinie und identifizierten verschiedene Lernschwierigkeiten, die in engem Zusammenhang mit der kartesischen Darstellung der Divergenz stehen. Vor allem das Konzept der Kovariation zwischen Feldkomponenten und Koordinaten bereitet den Studierenden Schwierigkeiten; sie verwechseln die Komponenten mit den Koordinaten oder begehen Fehler bei der Zerlegung von Vektorpfeilen in ihre Komponenten (z. B. Barniol & Zavala, 2014; Bollen et al., 2017; Gire & Price, 2012). Darüber hinaus fanden Pepper et al. (2012) Probleme von Studierenden im Umgang mit partiellen Vektorableitungen; so verwechselten sie die Änderung eines Vektorpfeils mit seinem Betrag. Diese Schwierigkeiten konnten durch eine Analyse der Blickdaten von Studierenden bei der Betrachtung von Vektorfeld-Diagrammen mittels Eye-Tracking validiert werden (Klein et al., 2018; 2019). Verschiedene Studien im Kontext des Elektromagnetismus und der Elektrostatik gingen über die Untersuchung von mathematischen Problemlösenszenarien mit Vektorfeldern hinaus. Sie zeigten, dass konzeptionelle Lücken bezüglich vektoranalytischer Inhalte zu einem unsachgemäßen Verständnis grundlegender Prinzipien in der Physik

fürten, z. B. in Bezug auf die Maxwell'schen Gleichungen (Bollen et al., 2015; 2016) und den Gauß'schen Integralsatz (Li & Singh, 2017; Vienot, 1992).

Vor dem Hintergrund dieser Ergebnisse wird insbesondere die Relevanz und Notwendigkeit neuer Interventionen, die ein konzeptionelles Verständnis der Divergenz adressieren, deutlich. In den aufgeführten Arbeiten wird hierfür vor allem die Verwendung visueller Repräsentationen vorgeschlagen. Dies unterstützt den grundsätzlichen didaktischen Konsens einer Förderung der Repräsentationskompetenz, da dieser positive Auswirkungen auf den Wissenserwerb und die Problemlösefähigkeiten zugeschrieben wird (z. B. Nieminen et al., 2012; Rau, 2017). Vor diesem Hintergrund entwickelten Klein et al. (2018) explizite textbasierte Anweisungen zur visuellen Interpretation der Divergenz von Vektorfelddiagrammen, die sich auf verschiedene mathematische Konzepte der Divergenz beziehen; den Fluss durch eine Grenzfläche und die Kovariation von Komponenten und Koordinaten. In Folgestudien wie auch in diesem Beitrag wird letzterer Zugang in Form der kartesischen Darstellung der Divergenz fokussiert (siehe Kap. 3). In Interviews nach der Intervention äußerten Studierende überwiegend positives Feedback über die vermittelten Strategien; dies unterstreicht den quantitativ gemessenen Zuwachs des konzeptionellen Verständnisses. Trotzdem gaben einige ProbandInnen an, dass ihnen die Komponentenzerlegung schwer gefallen sei und zusätzliche visuelle Hilfsmittel, z. B. Skizzen der Komponentenzerlegung, ihre Leistung verbessert hätten (Klein et al., 2018). In einer experimentellen Folgestudie wurde gezeigt, dass das Hinzufügen von Hinweisen zur Komponentenzerlegung in die (nach wie vor rein text-bildbasierte) Instruktion tatsächlich zu besseren Lernergebnissen führte (Klein et al., 2019). Darüber hinaus betonen Bollen et al. (2016) die Notwendigkeit moderner Unterrichtsszenarien, da der traditionelle Unterricht nicht ausreichte, um ein vollständiges Verständnis von Differentialoperatoren zu ermöglichen. Diese These steht im Einklang mit Wiemans (2007) Forderung einer Implementierung moderner Technologie zur Förderung eines effektiven naturwissenschaftlichen Unterrichts.

2.2. Zeichnen als fachdidaktische Methode

Neben textbasierten Hilfsmitteln, die meist Schreib-, Lese- oder Sprachaktivitäten anregen, befürworten aktuelle Forschungsansätze die Unterstützung beim Lernen durch Zeichenaufgaben (Ainsworth & Scheiter, 2021). Abgesehen davon, dass Visualisierungen integraler Bestandteil des wissenschaftlichen Denkens sind, betonen Ainsworth et al. (2011) das Potential des Zeichnens als effektive Lernstrategie. Den AutorInnen folgend enthält der konstruktive Ansatz des Zeichnens Attribute, die den visuell-räumlichen Anforderungen des wissenschaftlichen Lernens entsprechen und somit

Lernenden helfen, Konzepte visuell zu verstehen (Wu & Rau, 2018). Werden Zeichenaktivitäten mit textbasierten Anweisungen kombiniert (z. B. Van Meter et al., 2006), basiert die generierte Zeichnung auf einem wahrgenommenen Bild, das durch das Vorwissen, die Ziele und das sich entwickelnde mentale Modell des/der Lernenden bestimmt wird und eine tiefe Auseinandersetzung mit dem Text ermöglicht (Ainsworth & Scheiter, 2021; Van Meter & Firetto, 2013). Außerdem können Zeichenaktivitäten die Belastung des Kurzzeitgedächtnisses reduzieren und so eine Erweiterung des Gedächtnisspeichers und eine effektive Nutzung seiner Kapazität unterstützen (Ainsworth & Scheiter, 2021; Zhang & Norman, 1994). Im Einklang mit den genannten theoretischen Überlegungen fanden Studien in verschiedenen Bereichen der Bildungsforschung und den disziplinären Didaktiken positive Lerneffekte bei der Unterstützung von Lernenden durch Zeichenaktivitäten (z. B. Kohnle et al., 2020; Leopold & Leutner, 2012; Wu & Rau, 2018). Kohnle et al. (2020) beispielsweise nutzte Zeichenaktivitäten sowohl zur Vorbereitung als auch begleitend zum Lernen mit zwei Simulationen aus dem Gebiet der Quantenmechanik. Die Konstruktion visueller Repräsentationen vor der Intervention diente hier vor allem der Aktivierung des Vorwissens und der Vorbereitung auf die Lernphase; Zeichnen während des Lernens mit der Simulation unterstützte das Verständnis der verwendeten Repräsentationen. Die Autorinnen betonen in diesem Zusammenhang vor allem die Relevanz der Passung von Design und Abfolge der Zeichenaktivitäten mit der pädagogischen Zielsetzung. Durch den Einfluss des Zeichnens auf das Lernverhalten wird insbesondere auch die kognitive Verarbeitung und damit die visuelle Aufmerksamkeit des Lernenden beeinflusst. So zeigten z. B. Hellenbrand et al. (2019) einen zunehmenden Anteil von Fixierungen auf relevanten Begriffen einer textbasierten Instruktion beim Einsatz zusätzlicher Zeichenaufgaben.

Im Folgenden soll nun basierend auf den vorgestellten theoretischen Grundlagen und empirischen Forschungsergebnissen zunächst eine Strategie vorgestellt werden, die einen visuellen Zugang zur kartesischen Darstellung der Divergenz beschreibt (Kap. 3). Anschließend wird eine Unterstützung der Strategie durch Zeichenaktivitäten skizziert (Kap. 4) und ein Ausblick für eine erste Wirksamkeitsstudie zu diesem Ansatz vorgestellt.

3. Divergenz visuell interpretieren

Die kartesische Koordinatendarstellung der Divergenz eines Vektorfeldes \vec{F} als Summe partieller Ableitungen,

$$\operatorname{div}\vec{F}(x, y) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}, \quad (3)$$

beruht auf einer lokalen Interpretation von Quellen und Senken an bestimmten Punkten des Feldes. Wird das Vektorfeld als Strömungsfeld einer Größe interpretiert, für die die Kontinuitätsgleichung gilt, dann entspricht die Divergenz der Quelldichte des Feldes. Für eine qualitative Beurteilung der Divergenz kann diese Interpretation auf Vektorfelddiagramme angewendet werden (Klein et al., 2018; 2019). Entsprechend didaktischer Prinzipien werden hierbei die nachfolgenden Elementarisierungen und Didaktisierungen durchgeführt (siehe Abb.1 und Abb.2 für zwei Beispiele):

1. Es werden ausschließlich ebene Vektorfelder in zwei Dimensionen betrachtet.
2. Es werden kartesische Koordinaten x und y verwendet und die Feldkomponenten F_x und F_y sind Funktionen von x und y .
3. Die Feldkomponenten hängen maximal linear von den Koordinaten x und y ab.
4. Die Betrachtung ist rein qualitativ; die Absolutwerte der Divergenz werden nicht fokussiert.
5. Es werden nur Vektorfelder mit räumlich konstanter Divergenz (divergenzfrei oder nicht divergenzfrei) betrachtet.

Es ist anzumerken, dass die nachfolgend erläuterte Strategie nicht auf Vektorfelder mit den genannten Vereinfachungen beschränkt ist. Insbesondere die didaktischen Vereinfachungen 3. und 5. können in einem fortgeschrittenen Stadium des Lernprozesses zurückgenommen werden, sodass ein Transfer zu komplizierteren Kovariationen sowie lokal variierender Divergenz möglich wird.

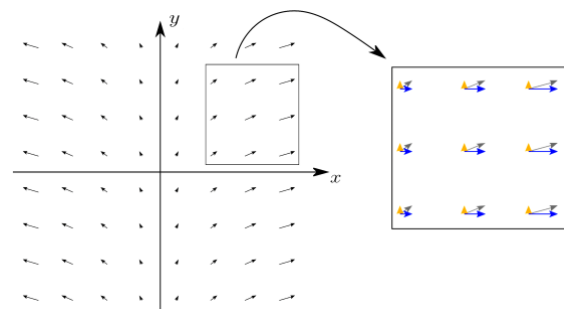


Abb.1: Graphische Darstellung des ebenen Vektorfeldes \vec{F}_1 (links). Das Rechteck hebt eine Region hervor, in der die Divergenz lokal anhand der partiellen Ableitungen ausgewertet wird (rechts). Die y -Komponente (F_y) ändert sich nicht in y -Richtung (orangefarbene Pfeile), es ist jedoch eine Zunahme der x -Komponente (F_x) in x -Richtung zu beobachten (blaue Pfeile). Daher ist das Vektorfeld nicht divergenzfrei.

Im Hinblick auf Gl. (3) kann die Divergenz visuell anhand der Kovariationen (d. h. Abhängigkeiten der Komponenten von den Koordinaten) identifiziert werden. Konkret gilt es die partiellen Ableitungen zu untersuchen, indem die Änderungen von F_x in x -

Richtung und die Änderungen von F_y in y -Richtung ausgewertet werden. Abb.1 zeigt ein Beispiel-Vektorfeld mit

$$\vec{F}_1(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Die y -Komponente des Feldes ist konstant in y -Richtung (orangefarbene Pfeile), daher gilt $\partial F_y / \partial y = 0$. Bei der Verfolgung der x -Komponente in x -Richtung wird eine Zunahme von F_x deutlich, sodass $\partial F_x / \partial x > 0$. Insgesamt gilt somit $\text{div} \vec{F}_1 \neq 0$; das Feld ist nicht divergenzfrei. Eine Wiederholung dieser Auswertung führt für jeden Punkt (x, y) des Feldes \vec{F}_1 zum gleichen Ergebnis; die Divergenz des Feldes ist daher in jedem Punkt ungleich Null. Im Allgemeinen zeigt die lokale Auswertung der Divergenz somit lokale Quellen und Senken des Vektorfeldes auf, über die für das gesamte betrachtete Gebiet summiert wird.

Wenn sich weder die x -Komponente in x -Richtung noch die y -Komponente in y -Richtung ändert, folgt entsprechend Gl. (3), dass es sich um ein divergenzfreies Vektorfeld handelt. Ein Beispiel hierfür ist das Vektorfeld mit

$$\vec{F}_2(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

(siehe Abb.2). Hier variiert ausschließlich die x -Komponente in y -Richtung, sodass $\partial F_x / \partial y > 0$; diese Kovariation besitzt für die Divergenz allerdings keine Relevanz (siehe Gl. 3). Der nicht-triviale Fall eines divergenzfreien Vektorfeldes, bei dem sich die Änderungen in x - und y -Richtung gerade aufheben, wird nicht betrachtet.

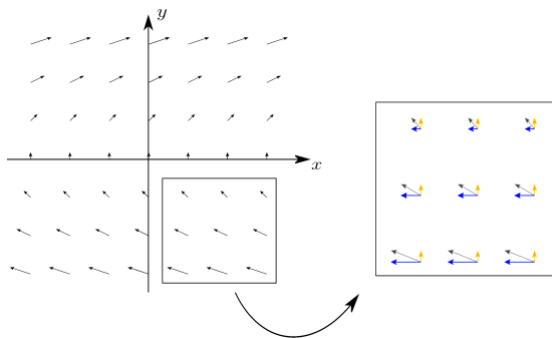


Abb.2: Graphische Darstellung des ebenen Vektorfeldes \vec{F}_2 (links). Es gibt keine Änderung der y -Komponente (F_y) in y -Richtung (orangefarbene Pfeile), und auch die x -Komponente (F_x) ist konstant in x -Richtung (blaue Pfeile). Daher ist das Vektorfeld divergenzfrei.

4. Unterstützung der visuellen Interpretation durch Zeichenaktivitäten

Wesentlicher Bestandteil der kartesischen Darstellung der Divergenz von Vektorfeldern sind die partiellen Ableitungen der Feldkomponenten (Gl. 3). Durch die mentale Zerlegung sowie Aufrechterhaltung der Komponenten erzeugt die visuelle Beurteilung der Kovariation jedoch eine hohe kognitive Belastung. Die in den Abbildungen 1

und 2 dargestellte Vektorkomponentenzerlegung stellt hierbei eine Unterstützung bei der Beurteilung der Komponentenänderungen dar. Es ist zu beachten, dass diese Hilfe bei typischen Aufgaben zu Vektorfeldern nicht vorhanden ist. Vor dem Hintergrund, dass, wie in Kap. 2.1 erläutert, die Komponentenzerlegung selbst bereits häufig für Probleme bei Lernenden sorgt, bietet sich an dieser Stelle eine Unterstützung des Evaluationsprozesses durch Zeichenaktivitäten an (Abb.3).

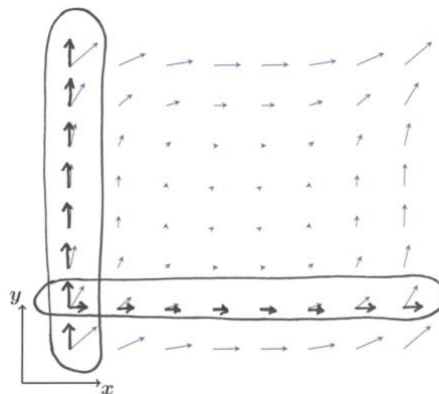
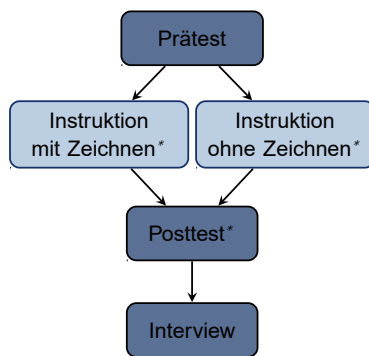


Abb.3: Zeichenaktivitäten zur Unterstützung der visuellen Interpretation der kartesischen Darstellung der Divergenz. Für eine visuelle Beurteilung der partiellen Ableitungen soll die x -Komponente entlang einer Zeile und die y -Komponente entlang einer Spalte des Vektorfeldes eingezeichnet und mit Boxen umrahmt werden. Beide Komponenten sind konstant und das Feld ist divergenzfrei.

Das Einzeichnen der einzelnen Komponenten ermöglicht eine Entlastung des Kurzzeitgedächtnisses, sodass sich die Lernenden auf die Komponentenzerlegung des aktuellen Vektors konzentrieren können, ohne zusätzlich die Zerlegungen vorangegangener Vektoren mental aufrechterhalten zu müssen. So kann eine detaillierte Beschäftigung mit der Komponentenzerlegung selbst stattfinden, bei der infolge der Aktivität der Lernenden zudem eine Reflexion der eigenen Fähigkeiten evoziert wird. Insgesamt fördert die Notwendigkeit aktiver Handlung durch die Lernenden eine tiefe Auseinandersetzung mit der vorgestellten Strategie und somit dem Konzept der Divergenz. Zudem erweisen sich Zeichenaktivitäten insbesondere dann als hilfreich, wenn hohe Aufgabenanforderungen an die visuell-räumlichen Fähigkeiten der Lernenden gestellt werden, wie es bei der Beurteilung der Divergenz der Fall ist. Da z. B. Leopold und Leutner (2012) zeigten, dass sich der Einsatz von Zeichnen vor allem bei Aufgaben eines höheren Anforderungsbereichs positiv auf den Lernprozess auswirkte, sind beim Einzeichnen der Feldkomponenten zur Anwendung der beschriebenen Strategie ebenfalls positive Lerneffekte zu antizipieren. Außerdem ist zu erwarten, dass eine vertiefte Auseinandersetzung mit der Strategie auch die kognitive Verarbeitung und damit das Blickverhalten beeinflusst.

5. Ausblick

Auf Basis der vorgestellten Strategie zur visuellen Interpretation der Divergenz und unter Einbeziehung der beschriebenen Zeichenaktivitäten wurde eine Instruktion entwickelt, welche in einem nächsten Schritt im Rahmen einer Studie evaluiert werden soll. Die Stichprobe wird dabei aus einer Grundlagenvorlesung akquiriert, in der Vektorfelder eine wichtige Rolle spielen. Da die Instruktionsstrategie in ähnlicher Form bereits in mehreren Studien verwendet wurde (Klein et al., 2018; 2019), soll der Schwerpunkt nun auf dem Einsatz der Zeichenaktivitäten liegen. Aus diesem Grund wird ein mixed-methods-Design verwendet, welches als Zwischensubjektfaktor die Gruppenzugehörigkeit (Intervention mit und ohne Zeichenaktivitäten) untersucht (Abb.4). Außerdem wird die Leistung und Antwortsicherheit der Studierenden vor und nach der Intervention analysiert. Der Prätest besteht aus konzeptionellen Fragen zu Vektoren und Vektorfeldern, die bereits in ähnlicher Form in anderen Studien eingesetzt wurden (Klein et al., 2018; 2019). Zusätzlich werden die räumlichen Fähigkeiten der Studierenden mithilfe eines standardisierten Tests ermittelt (Spatial Span Task; Shah & Miyake, 1996). Der Posttest enthält neben den Prätest-Fragen einige Assessment- sowie Transfer-Aufgaben, einen Fragebogen zur wahrgenommenen Aufgabenschwierigkeit und Instruktionsqualität (Leppink et al., 2013) sowie ein kurzes Interview. Neben den genannten Assessment-Instrumenten wird zusätzlich das Blickverhalten der Studierenden bei der Bearbeitung der Intervention (Zeichnen) sowie bei Teilen des anschließenden Posttests erfasst.



* Eye-Tracking Brille

Abb.4: Studiendesign. Der Posttest umfasst verschiedene Assessment-Aufgaben sowie einen Fragebogen zur (wahrgenommene) Aufgabenschwierigkeit und Instruktionsqualität; * Eye-Tracking wird zur Erfassung der visuellen Aufmerksamkeit eingesetzt.

Perspektivisch soll die beschriebene Strategie im Rahmen einer Lehreinheit durch die Zeichenaktivitäten sowie ergänzend durch eine Vektorfeld-Simulation unterstützt werden. Letztere soll dabei bisherige Forschungsergebnisse zu Lernschwierigkeiten in Bezug auf Vektorfelder

aufgreifen und durch verschiedene interaktive sowie dynamische Funktionen eine aktive Auseinandersetzung mit der Strategie ermöglichen. Eine Implementation des Lehrmaterials in einführende Veranstaltungen der mathematischen Physik (Vorkurse, mathematische Methoden der Physik) steht bevor.

6. Literatur

- Ainsworth, Shaaron; Prain, Vaughan; Tytler, Russell (2011): Drawing to learn in science. In: *Science* 333(6046), S. 1096–1097. doi: [10.1126/science.1204153](https://doi.org/10.1126/science.1204153)
- Ainsworth, Shaaron; Scheiter, Katharina (2021): Learning by Drawing Visual Representations: Potential, Purposes, and Practical Implications. In: *Current Directions in Psychological Science* 30(1), S. 1–7. doi: [10.1177/0963721420979582](https://doi.org/10.1177/0963721420979582)
- Baily, Charles; Bollen, Laurens; Pattie, Andrew; Van Kampen, Paul; De Cock, Mieke (2016): Student thinking about the divergence and curl in mathematics and physics contexts. In: *Proceedings of the Physics Education Research Conference 2016, College Park, MD (AIP, New York, 2016)*, S. 51–54. doi: [10.1119/perc.2015.pr.008](https://doi.org/10.1119/perc.2015.pr.008)
- Barniol, Pablo; Zavala, Genaro (2014): Test of understanding of vectors: A reliable multiple-choice vector concept test. In: *Physical Review Special Topics - Physics Education Research* 10(1), 010121. doi: [10.1103/PhysRevSTPER.10.010121](https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.10.010121)
- Bollen, Laurens; Van Kampen, Paul; De Cock, Mieke (2015): Students' difficulties with vector calculus in electrodynamics. In: *Physical Review Special Topics - Physics Education Research* 11(2), 020129. doi: [10.1103/PhysRevSTPER.11.020129](https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.11.020129)
- Bollen, Laurens; Van Kampen, Paul; Baily, Charles; De Cock, Mieke (2016): Qualitative investigation into students' use of divergence and curl in electromagnetism. In: *Physical Review Physics Education Research* 12(2), 020134. doi: [10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.020134](https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.020134)
- Bollen, Laurens; Van Kampen, Paul; Baily, Charles; De Cock, Mieke (2017): Student difficulties regarding symbolic and graphical representations of vector fields. In: *Physical Review Physics Education Research* 13(2), 020109. doi: [10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020109](https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020109)
- Burkholder, Eric; Murillo-Gonzalez, Gabriel; Wieman, Carl (2021): Importance of math prerequisites for performance in introductory physics. In: *Physical Review Physics Education Research* 17(1), 010108. doi: [10.1103/PhysRevPhysEducRes.17.010108](https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.17.010108)
- Gire, Elizabeth; Price, Edward (2012): Graphical representations of vector functions in upper-

- division E&M. In: *AIP Conference Proceedings* 1413(1), S. 27-30. doi: [10.1063/1.3679985](https://doi.org/10.1063/1.3679985)
- Hellenbrand, Johannes; Mayer, Richard; Opfermann, Maria; Schmeck, Annett; Leutner, Detlev (2019): How generative drawing affects the learning process: An eye-tracking analysis. In: *Applied Cognitive Psychology*, 33(6), S. 1147-1164. doi: [10.1002/acp.3559](https://doi.org/10.1002/acp.3559)
- Klein, Pascal; Viiri, Jouni; Mozaffari, Saleh; Dengel, Andreas; Kuhn, Jochen (2018): Instruction-based clinical eye-tracking study on the visual interpretation of divergence: How do students look at vector field plots? In: *Physical Review Physics Education Research* 14(1), 010116. doi: [10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.010116](https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.010116)
- Klein, Pascal; Viiri, Jouni; Kuhn, Jochen (2019): Visual cues improve students' understanding of divergence and curl: Evidence from eye movements during reading and problem solving. In: *Physical Review Physics Education Research* 15(1), 010126. doi: [10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.010126](https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.010126)
- Kohnle, Antje; Ainsworth, Shaaron; Passante, Gina (2020). Sketching to support visual learning with interactive tutorials. In: *Physical Review Physics Education Research*, 16(2), 020139. doi: [10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.020139](https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.020139)
- Leopold, Claudia; Leutner, Detlev (2012): Science text comprehension: Drawing, main idea selection, and summarizing as learning strategies. In: *Learning and Instruction*, 22(1), S. 16-26. doi: [10.1016/j.learninstruc.2011.05.005](https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2011.05.005)
- Leppink, Jimmie; Paas, Fred; Van der Vleuten, Cees; Van Gog, Tamara; Van Merriënboer, Jeroen (2013): Development of an instrument for measuring different types of cognitive load. In: *Behavior Research Methods*, 45(4), S. 1058-1072. doi: [10.3758/s13428-013-0334-1](https://doi.org/10.3758/s13428-013-0334-1)
- Li, Jing; Singh, Chandralekha (2017): Investigating and improving introductory physics students' understanding of symmetry and Gauss's law. In: *European Journal of Physics* 39(1), 015702. doi: [10.1088/1361-6404/aa8d55](https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa8d55)
- Nieminen, Pasi; Savinainen, Antti; Viiri, Jouni (2012): Relations between representational consistency, conceptual understanding of the force concept, and scientific reasoning. In: *Physical Review Special Topics - Physics Education Research* 8(1), 010123. doi: [10.1103/PhysRevSTPER.8.010123](https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.8.010123)
- Pepper, Rachel; Chasteen, Stephanie; Pollock, Steven; Perkins, Katherine (2012): Observations on student difficulties with mathematics in upper-division electricity and magnetism. In: *Physical Review Special Topics - Physics Education Research* 8(1), 010111. doi: [10.1103/PhysRevSTPER.8.010111](https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.8.010111)
- Rau, Martina (2017): Conditions for the effectiveness of multiple visual representations in enhancing STEM learning. In: *Educational Psychology Review* 29(4), 717-761. doi: [10.1007/s10648-016-9365-3](https://doi.org/10.1007/s10648-016-9365-3)
- Shah, Priti; Miyake, Akira (1996): The separability of working memory resources for spatial thinking and language processing: An individual differences approach. In: *Journal of Experimental Psychology: General* 125(1), S. 4-27. doi: [10.1037/0096-3445.125.1.4](https://doi.org/10.1037/0096-3445.125.1.4)
- Singh, Chandralekha; Maries, Alexandru (2013): Core graduate courses: A missed learning opportunity? In: *AIP Conference Proceedings* 1513, S. 382-385. doi: [10.1063/1.4789732](https://doi.org/10.1063/1.4789732)
- Smith, Emily (2014): *Student & textbook presentation of divergence*. Master's thesis (Corvallis, OR: Oregon State University).
- Van Meter, Peggy; Aleksic, Maja; Schwartz, Ana; Garner, Joana (2006): Learner-generated drawing as a strategy for learning from content area text. In: *Contemporary Educational Psychology* 31(2), S. 142-166. doi: [10.1016/j.cedpsych.2005.04.001](https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2005.04.001)
- Van Meter, Peggy; Firetto, Carla (2013): Cognitive model of drawing construction: Learning through the construction of drawings. In: G. Schraw, M. T. McCrudden, & D. Robinson (Hrsg.), *Current perspectives on cognition, learning, and instruction. Learning through visual displays*, S. 247-280, IAP Information Age Publishing.
- Viennot, Laurence; Rainson, Sylvie (1992): Students' reasoning about the superposition of electric fields. In: *International Journal of Science Education* 14(4), S. 475-487. doi: [10.1080/0950069920140409](https://doi.org/10.1080/0950069920140409)
- Wieman, Carl (2007): Why not try a scientific approach to science education? In: *Change: The Magazine of Higher Learning* 39(5), S. 9-15. doi: [10.3200/CHNG.39.5.9-15](https://doi.org/10.3200/CHNG.39.5.9-15)
- Wu, Sally; Rau, Martina (2018): Effectiveness and efficiency of adding drawing prompts to an interactive educational technology when learning with visual representations. In: *Learning and Instruction* 55(3), S. 93-104. doi: [10.1016/j.learninstruc.2017.09.010](https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2017.09.010)
- Zhang, Jiajie; Norman, Donald (1994): Representations in distributed cognitive tasks. In: *Cognitive Science* 18(1), S. 87-122. doi: [10.1207/s15516709cog1801_3](https://doi.org/10.1207/s15516709cog1801_3)

Anhang

Interventions- und Assessment-Materialien können auf Anfrage zugesendet werden.