Die komplexe Konjugation aus physikalischer Sicht

Martin Erik Horn

Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin
FB 2: Ingenieurwissenschaften – Technik und Leben (Campus Wilhelminenhof)
hornmar@htw-berlin.de

Kurzfassung

In mathematischen Lehrbüchern wird in der Regel darauf verwiesen, dass die Multiplikation einer komplexen Zahl b mit einer komplex konjugierten zweiten Zahl a* kommutativ ist: $a^*b = b\,a^*$.
Im Kontext einer physikalisch geprägten Geometrischen Algebra kann jedoch eine alternative Sichtweise motiviert werden: Die komplexe Konjugation wurde erfunden, um nicht-kommutative Strukturen durch kommutative Größen ausdrücken zu können. Tatsächlich modelliert das oben genannte Produkt eine nicht-kommutative Multiplikation in Form von $a^*b \neq b^*a$.
Fazit: Die komplexe Konjugation wird derzeit in Schule und Hochschule mit Hilfe eines Trugbilds vermittelt, das einen sachangemessen mathematischen Einsatz der komplexen Konjugation erschwert.

1. Überblick

Dieses Paper ist ein Versuch, den Symmetriebegriff im Kontext zuerst der komplexen und später dann der quaternionenartigen Konjugation zu hinterfragen. Dabei wird versucht, bisherige Resultate und Veröffentlichungen [1], [2], [3], [4] so zu ordnen und zusammenzustellen, dass die tiefere Motivation für das Tun des Autors sichtbar wird.

Ein zentraler Motivationspunkt wird zu Ende der Beiträge [1] und [4] deutlich ausformuliert: „Wie soll die Menschheit jemals das physikalische Verhalten von Wahrscheinlichkeitsdichten in der Quantenmechanik verstehen, wenn die Mathematik alles tut, die dahinter stehenden Symmetrien zu verbergen?“

Und dies ist das zentrale Anliegen dieses Beitrags – Symmetrie. Der Autor geht davon aus, dass die Nutzung der komplexen Konjugation das Symmetrieverhalten zusammengesetzter Systeme verschleiert. Die komplexe Konjugation verhindert (oder erschwert zumindest) das mathematische Verständnis unserer Welt. Dies soll im folgenden erläutert werden.

2. Zwischen allen Stühlen

Im Laufe der Jahre ist der Autor dieses Beitrags – originär aus der Physik und der Physikdidaktik kommend – immer weiter in die Mathematik und eine unmathematische Mathematikdidaktik abgerutscht.

Dort sitzt er nun, zwischen allen Stühlen - frei und eingeklemmt zugleich.

Eingeklemmt, weil man sich schlecht bewegen kann, wenn aus der Mathematik kommende Kolleginnen und Kollegen beim Blick auf die Dinge, die ich so treibe, feststellen: Das ist doch keine Mathematik und keine Mathematikdidaktik, sondern schnöde (das Wort verwenden sie nicht, aber es klingt durch), also lediglich schnöde Physik und Physikdidaktik.

Und von Kolleginnen und Kollegen aus dem physikalischen und physikdidaktischen Bereich kommt beim skeptischen Blick auf die Dinge, die ich so treibe, die Einschätzung: Das ist doch keine Physik und keine Physikdidaktik, sondern schnöde (das Wort verwenden sie nicht, aber es klingt durch), also lediglich schnöde Mathematik und Mathematikdidaktik.

Ich kann mich also kaum in die eine Richtung bewegen, ohne denen auf der anderen Seite Anlass zu einem noch stärkerem Naserümpfen zu bieten. Und ich kann mich kaum in die andere Richtung bewegen, ohne der einen, ersten Seiten Anlass zu noch stärkerem Stirnrunzeln zu geben.

Ein typisches Beispiel ist die Reaktion auf meinen Beitrag [1], den ich als Entwurf zur Publikation bei den Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (MGDM) eingereicht habe. Die Rückmeldung kam prompt und innerhalb kürzester Zeit: „Vielen Dank für die Einreichung Ihres interessanten Beitrags. (…) Einstimmig waren die Kollegen der Meinung, dass der mathematikdidaktische Fokus fehlt. Zum größeren Teil wird die Physik(Didaktik) angesprochen. Sie gehen insgesamt ganz wenig auf unser Kerngebiet ein, …“ [5].

Eine Publikation des Beitrags wurde folglich abgelehnt.

Dabei war ich mir doch relativ sicher, dass ich in [1] über den Satz des Pythagoras, über komplexe Zahlen und die komplexe Konjugation geschrieben habe. Erklären Sie mal einem Physikdidaktiker oder einer Physikdidaktikerin, dass das keine originäre Mathematik oder Mathematikdidaktik sei, sondern Physik oder Physikdidaktik. Er oder sie wird sie auslachen!

Und deshalb erwarte ich von den physikalisch und physikdidaktisch geprägten Leserinnen und Leser dieses Beitrags zur komplexen Konjugation, der bei PhyDid, also einer physikdidaktisch ausgerichteten Internet-Zeitschrift als Tagungsbeitrag erscheinen soll, eine ähnliche Reaktion mit dem Tenor: Das alles gehört doch hier nicht hin!

Meine recht deutliche und vielleicht auch freche Antwort darauf ist: Doch, tut es! Für gelegentlich als nicht ausreichend zurückhaltend (also irgendwie als frech) empfundene Formulierungen muss ich mich sicher entschuldigen. Gleichzeitig muss ich aber auch sagen: Es geht nicht anders in einem drögen, Grenzen und geistige Barrieren errichtenden Wissenschaftsbetrieb wie dem unseren hier in Deutschland.

Ja, ich nehme die Dinge, die mich im Laufe meines Lebens geprägt haben, aus der Physik und Physikdidaktik mit und trage sie in die Mathematik und Mathematikdidaktik hinein. Es ist eine Grenzüberschreitung, die in einer leider wieder mehr und mehr durch Grenzen geprägten Welt nicht goutiert wird.

Ein Beispiel ist mein Umgang mit dem Begriff der Äquivalenzumformung. Für Mathematikerinnen und Mathematiker ist dieser Begriff untrennbar verbunden mit einer Gleichheit von Lösungsmengen [6]. Wenn eine erste Gleichung eine Lösungsmenge aufweist und in eine zweite Gleichung überführt wird, dann sind die erste und die zweite Gleichung aus Mathematikersicht äquivalent, wenn die Lösungsmenge der ersten Gleichung und die Lösungsmenge der zweiten Gleichung identisch sind.

Für mich als Physiker und Physikdidaktiker ist beim Blick auf die Äquivalenz etwas anderes zentral: Das Gleichheitszeichen in der Mitte der Gleichung. Äquivalenz bedeutet Gleichheit von linker und rechter Gleichungsseite. Für mich als Physiker und Physikdidaktiker ist also entscheidend, dass diese Äquivalenz der Gleichungsseiten bei einer Umformung erhalten bleibt.

Sind nach einer Umformung die neue linke Seite und die neue rechte Seite einer Gleichung wieder gleich und somit äquivalent, so sind wir als Physikerinnen und Physiker zufrieden. Die Lösungsmengen dürfen sich dabei auch verändert haben, ohne dass für uns Physikerinnen und Physiker gleich die Welt zusammenbricht.

Beim Quadrieren passiert das zum Beispiel. Und in diese Richtung habe ich in meinem Paper [1] auch gedacht, was für echte Mathematikerinnen und Mathematiker natürlich ein Graus ist.

Oder um es noch überspitzer zu sagen: Für uns als Physikerinnen und Physiker bricht keine Welt zusammen, wenn sich die Lösungsmenge bei einer Umformung ändert. Wir als Physikerinnen und Physiker haben die Erfahrung gemacht, dass sich durch solch eine Änderung der Lösungsmenge neue Welten öffnen.

Nicht anders deuten wir die Entdeckung der Anti-Materie durch Dirac. Gleichungen, deren linke und rechte Gleichungsseiten äquivalent waren, wurden von Dirac umgeformt in eine Gleichung, bei der die Äquivalenz von linker und rechter Gleichungsseite erhalten blieb, die aber eine weit größere Lösungsmenge aufwies. Das war die Geburt des Positrons. Und dieses Ereignis prägt die physikalische Welt noch heute – und sie prägt uns natürlich auch mathematisch, ob das nun echten Mathematikerinnen und Mathematikern gefällt oder nicht.

3. Unmathematische Mathematikdidaktik

Überhaupt: Was ist echte Mathematik? Was ist echte Mathematikdidaktik? Wahrscheinlich habe ich da recht wenig Ahnung. Schließlich habe ich Physik mit Nebenfach Chemie studiert, so dass ich mangelnde Mathematikkenntnisse immer durch mangelndes Studium entschuldigen kann.

Dass ich dann irgendwie in die Mathematik und Mathematikdidaktik reingerutscht bin und heute fachhochschulische Mathematikkurse gebe ist kaum mehr als Zufall und keineswegs Folge einer ausgeklügelten Lebensplanung.

Ich war und bin halt Physiker und Physikdidaktiker und habe diese Physikdidaktik auf meiner Reise in die Mathematikdidaktik mitgenommen. Und folglich unterrichte ich heute meine Mathematikkurse so, wie ich früher auch meine Physikkurse unterrichtet habe: sehr physikdidaktisch.

Feynman hat den Unterschied zwischen mathematischem und physikalischem Unterrichten ja einmal sehr prägnant auf den Punkt gebracht: „Heute besitzen wir nicht die Fähigkeit, einem Studenten zu zeigen, wie er Physik *physikalisch* verstehen kann! Wir können die Gesetze aufschreiben, aber wir können immer noch nicht sagen, wie man sie physikalisch versteht. Mangels einer Ausdrucksmöglichkeit ist der einzige Weg, Physik physikalisch zu verstehen, auch heute noch der langweilige Babylonische Weg, viele Beispiele zu machen, bis man es verstanden hat" [7, S. 70].

Und genau so unterrichte ich jetzt meine Mathematikkurse: Ich mache Beispiele über Beispiele und noch mehr Beispiele, bis meine Studenten das generelle Prinzip dahinter verstanden haben. Das ist natürlich für echte Mathematiker unerträglich.

Echte Mathematikerinnen und echte Mathematiker betreiben echte Mathematik, indem sie Axiome aufstellen, aus diesen Axiomen jede Menge logische

Schlussfolgerungen ziehen und so sehr, sehr systematisch ein sehr, sehr elegantes und gleichzeitig ein sehr, sehr fragiles Gedankengebäude errichten.

Fragil ist dieses Gedankengebäude natürlich dadurch, dass man einfach ein bisschen an den Axiomen wackeln muss, eine klitzekleine, unscheinbar nebensächliche Änderung an einem Axiom bewirkt schon, dass das gesamte Gedankengebäude einzustürzen droht. Insofern ist die Mathematik ein recht schwankendes, völlig freischwebendes und absolut haltloses Tun.

Und diese Haltlosigkeit ist der tiefere Grund für die Eleganz der modernen Mathematik. Mangels Fundament müssen die Mathematikerinnen und Mathematiker auf eine andere, sehr sublime Größe vertrauen, der sie ihre gesamte Überzeugungskraft schulden: der Ästhetik.

Die von der Mathematik errichteten Gedankengebäude sind so schön, so brillant, so phaszinierend betörend hübsch, hübscher und tausendfach kitschighübsch, so dass sie aus Mathematikersicht einfach nur wahr und nichts anderes als wahr sein können.

Der wohl wirklich einzige Grund, weshalb Mathematikerinnen und Mathematiker an ihre Mathematik glauben dürfen, ist deren innere Schönheit. Etwas anderes haben sie nicht, seit Gödel nicht einmal mehr die innere Widerspruchsfreiheit, auf die sie natürlich immer hoffen und vordergründig verweisen [8].

Und das Komische ist: Als ich nach meiner Reise in die Mathematikdidaktik mit schwerem physikdidaktischem Ballast endlich in meinen Mathematikkursen diverser Schulen und Fachhochschulen angekommen war, musste ich feststellen: Die Physikdidaktik ist schon da. Sie heißt dort nur nicht so.

Aber beim Blick auf das, was meine Kolleginnen und Kollegen, die sich Mathematiklehrer oder Mathematikdozenten nennen, so machen, sehe ich keine Mathematik, keine echte Mathematik. Niemand elaboriert an Schulen oder anwendungsorientiert ausgerichteten Fachhochschulen (die sich heute meist blasiert „Universities of Applied Sciences“, also irgendwie fast Universitäten nennen) an echten, mathematischen Axiomen, die per ausgeklügelter Beweisführung schrittweise über Theoreme hin zu den nützlichen Dingen des Lebens hochgezüchtet werden.

Nein, Mathematiklehrerinnen und -lehrer an Schulen und Fachhochschulen, Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker aller Art betreiben diese nützlichen Dinge sofort und umstandslos. Die Schulmathematik und die Fachhochschulmathematik sind Anwendungsmathematik, die sich um die Grundlagen und um axiomatische Fundierung nicht schert. Es ist überhaupt keine echte Mathematik!

Wir Physikerinnen und Physiker wissen ja, was wir tun: Wir durchmessen die Welt mit unseren Experimenten auf der Suche nach neuen Theorien oder auf der Suche nach Bestätigung bereits existierender Theorien oder fragiler Hypothesen. Dieses Messen – man nennt es Experimentalphysik – ist einer der wichtigsten Bestandteile unseres Tuns.

Eingebaut ist dies natürlich in die auf Mathematik basierende theoretische Rahmengebung, die das Gemessene logisch zu verknüpfen sucht.

Also: Messen ist Physik, logisches Theoretisieren ist Mathematik – diese naiv-simple, holzschnittartige Zuordnung kann die beiden Disziplinen in erster Näherung charakterisieren. Es ist ja eh‘ meistens so, dass Protagonisten beider Disziplinen beides machen und beides im Alltag nicht trennen.

Sie sollten dann aber auch so ehrlich sein und diese fehlende Trennung anerkennen. Sie sollten nicht so tun, als ob „Messen“ Mathematik sei – Messen ist und bleibt ein Kernpunkt der Physik.

Und wenn dann in bundesdeutschen Bildungsstandards der Mathematik durchgängig an zentraler Stelle als Leitidee L2 der Themenbereich „Messen“ auftaucht [9, S. 10], [10, S. 10], [11, S. 19], dann ist das eindeutig kein mathematisches, sondern physikalisches Tun (wobei im Oberstufenbereich die Beschreibung der Leitidee „Messen“ darauf hindeutet, dass den Autoren unter Umständen der Sinngehalt des Wortes „Messen“ nicht ganz klar ist: Zu echtem „Messen“ benötigt man in erster Linie Messgeräte … Also ich persönlich messe Winkel mit einem Geo-Dreieck und nicht mit dem Skalarprodukt. Aber ich messe natürlich auch manchmal Streckenlängen mit Hilfe eines Lineals und nutze dann ohne weitere Messung das Skalarprodukt zur Berechnung des Winkels, also zur Interpretation von Messergebnissen.)

Wie dem auch sei, ein Fazit muss gezogen werden: Die schulische und fachhochschulische Mathematik ist von physikalischem Tun durchsetzt und betreibt – so wie auch ich – hauptsächlich Physikdidaktik. Wahrhaft mathematisches Tun – echtes Beweisen – kommt so gut wie gar nicht vor.

Echte mathematische Mathematikdidaktik trifft man in der bundesdeutschen Lebenswirklichkeit höchst selten und meist wird – glücklicherweise – eine unmathematische, physikalische Mathematikdidaktik betrieben. Und als „physikalische Mathematikdidaktik“ sollten auch die folgenden Abschnitte betrachtet werden.

4. Konzeptuelle Fundierung

Also genug geschimpft! Hier geht es ja eigentlich um Größeres: Die moderne, auf Grassmann [12], Clifford [13], Peirce [14], Cartan [15, S. 43-45], Riesz [16] und Hestenes [17], [18] aufbauende Vorstellung, dass Vektoren in unserer dreidimensionalen, Euklidischen Welt didaktisch zugänglich [19], [20] am besten durch eine Linearkombination von Pauli-Matrizen σ_x, σ_y und σ_z dargestellt werden können:

$$\mathbf{r}_{3d} = x\,\sigma_x + y\,\sigma_y + z\,\sigma_z \qquad \{1\}$$

Um auch eine Diskussion von Quaternionen zu ermöglichen, ist darüber hinaus eine Betrachtung von Vektoren einer vierdimensionalen, Euklidischen Welt

$$\mathbf{r}_{4d} = w\,\sigma_w + x\,\sigma_x + y\,\sigma_y + z\,\sigma_z \qquad \{2\}$$

sinnvoll, die ein zusätzliches Paulinisches Basiselement σ_w aufweisen. Alle diese Basisvektoren sind Einheitsvektoren

$$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \qquad \{3\}$$

die geometrisch senkrecht zueinander stehen, was algebraisch durch deren Anti-Kommutativität

$$\begin{aligned} \sigma_x\sigma_y &= -\,\sigma_y\sigma_x & \sigma_x\sigma_w &= -\,\sigma_w\sigma_x \\ \sigma_y\sigma_z &= -\,\sigma_z\sigma_y & \sigma_y\sigma_w &= -\,\sigma_w\sigma_y \\ \sigma_z\sigma_x &= -\,\sigma_x\sigma_z & \sigma_z\sigma_w &= -\,\sigma_w\sigma_z \end{aligned} \qquad \{4\}$$

ausgedrückt wird.

Darüber hinaus ist für physikalische Betrachtungen eine Analyse raumzeitlicher Vektoren einer vierdimensionalen, pseudo-Euklidischen Welt

$$\mathbf{r}_{st} = ct\,\gamma_t + x\,\gamma_x + y\,\gamma_y + z\,\gamma_z \qquad \{5\}$$

hilfreich, die als Linearkombinationen der Dirac-Matrizen

$$\gamma_t^2 = 1 \qquad \gamma_x^2 = \gamma_y^2 = \gamma_z^2 = -\,1 \qquad \{6\}$$

mit den üblichen Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} \gamma_x\gamma_y &= -\,\gamma_y\gamma_x & \gamma_x\gamma_w &= -\,\gamma_w\gamma_x \\ \gamma_y\gamma_z &= -\,\gamma_z\gamma_y & \gamma_y\gamma_w &= -\,\gamma_w\gamma_y \\ \gamma_z\gamma_x &= -\,\gamma_x\gamma_z & \gamma_z\gamma_w &= -\,\gamma_w\gamma_z \end{aligned} \qquad \{7\}$$

dargestellt werden können. Dabei sind γ_t ein zeitartiger und γ_x, γ_y sowie γ_z raumartige Basisvektoren.

Eine geometrisch-algebraische Fundierung unserer Welt, die auf den Strukturen {1} bis {7} aufbaut, wurde bereits von Grassmann und anschließend Clifford vorgenommen, damals allerdings noch ohne Nutzung einer Matrixdarstellung. Die wesentlichen Beziehungen finden sich allerdings schon sehr klar und sehr deutlich in ihren Beiträgen [21], [22], [13] ausformuliert.

5. Komplexe Zahlen

Um die Bedeutung des in Abschnitt 4 vorgestellten Fundaments für unsere Vorstellungen zum Begriff der komplexen Zahlen aufzuzeigen, wird anfangs auf Vektoren **a** und **b**

$$\mathbf{a} = a_x\,\sigma_x + a_y\,\sigma_y \qquad \mathbf{b} = b_x\,\sigma_x + b_y\,\sigma_y \qquad \{8\}$$

des zweidimensionalen Raumes, die nur zwei Basisvektoren σ_x und σ_y besitzen, zurückgegriffen.

Das Geometrische Produkt dieser beiden Vektoren kann durch mittige Einmultiplikation des neutralen Elements $\sigma_x^2 = 1$ gemäß [2, S. 904]

$$\begin{aligned} \mathbf{a\,b} &= (a_x\,\sigma_x + a_y\,\sigma_y)\,\sigma_x^2\,(b_x\,\sigma_x + b_y\,\sigma_y) \\ &= (a_x - a_y\,\sigma_x\sigma_y)\,(b_x + b_y\,\sigma_x\sigma_y) \\ &= (a_x - i\,a_y)\,(b_x + i\,b_y) \\ &= (a_x + i\,a_y)^*\,(b_x + i\,b_y) \\ &= a^*\,b \end{aligned} \qquad \{9\}$$

auf Grund der Assoziativität mit einer komplexen Multiplikation gleichgesetzt werden.

Für alle Skeptiker sei darauf verwiesen, dass die Umbenennung des Bivektors $\sigma_x\sigma_y$ in eine imaginäre Basiseinheit i

$$\sigma_x\sigma_y = i \qquad \text{mit} \qquad (\sigma_x\sigma_y)^2 = i^2 = -\,1 \qquad \{10\}$$

im Kontext einer zweidimensionalen Situation lediglich eine sprachliche Namensänderung, jedoch keine inhaltlich mathematische Umstellung bedeutet. Gleichung {9} zeigt eindeutig und unzweifelhaft, dass die Geometrische Multiplikation zweier Vektoren **a** und **b** im Zweidimensionalen der Multiplikation der komplex konjugierten Zahl a* mit der zweiten komplexen Zahl b entspricht. Die Produkte sind identisch. Und Herrgott nochmal, das ist keine Physik [5], das ist Mathematik.

Aber in der Physik interessieren wir uns natürlich für das Symmetrieverhalten der mathematischen Größen, die wir nutzen. Wir vergleichen also die beiden Produkte **a b** und **b a** miteinander.

Wir vergleichen ausdrücklich nicht **a b** und **a b** im Sinne von

$$\mathbf{a\,b} = a^*\,b = b\,a^* = \mathbf{a\,b} \qquad \{11\}$$

da dies irgendwie trivial und nichtssagend wäre. Natürlich kommutieren die komplex konjugierte Zahl a* und die komplexe Zahl b. Das bringt uns aber nicht weiter und sagt nichts über das Symmetrieverhalten aus, denn wir haben ja durch die komplexe Konjugation ein zusätzliches Minuszeichen in die „normale“ komplexe Multiplikation a b = b a zweier komplexer Zahlen a und b reingeschummelt.

Wir zerstören durch dieses zusätzliche Minuszeichen die vorhandene Symmetrie des Produkts a b und betrügen uns und unsere mathematische Umwelt [1], wenn wir a* b als kommutativ ansehen.

a* b modelliert das Geometrische Produkt **a b**, und um dessen Symmetrieverhalten zu verstehen, vergleichen wir als physikalisch denkende Mathematikerinnen und Mathematiker das Produkt {9} mit dem in der Reihenfolge vertauschten geometrischen Produkt

$$\mathbf{b\,a} = b^*\,a \qquad \{12\}$$

indem wir ein inneres Produkt

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a\,b} + \mathbf{b\,a}) = \frac{1}{2}\,(a^*\,b + b^*\,a) \qquad \{13\}$$

und ein äußere Produkt

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{a\,b} - \mathbf{b\,a}) = \frac{1}{2}\,(a^*\,b - b^*\,a) \qquad \{14\}$$

(siehe [17], [18], [19], [23], [24]) konstruieren.

Die kanonische Zerlegung eines Geometrischen Produkts aus zwei Vektoren **a** und **b** in ein kommutatives inneres Produkt $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ und ein anti-kommutatives äußeres Produkt $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$

$$\mathbf{a\,b} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = a^*\,b \qquad \{15\}$$

kann also auch vollkommen identisch mit Hilfe komplexer Zahlen vorgenommen werden. Fazit: Mit dem Produkt a* b sind die gleichen Symmetrieeigenschaften verbunden wie mit dem Produkt **a b**. Das Produkt a* b auf der linken Seite

$$a^*\, b \neq b^*\, a \qquad \mathbf{a\, b} \neq \mathbf{b\, a} \qquad \{16\}$$

ist auf absolut genau die gleiche Art und Weise nicht-kommutativ wie das rechts stehende identische Produkt **a b**.

6. Das Herrenduo Pascal und Pauli-Pascal

Noch deutlicher wird dieses Symmetrieverhalten, wenn die gerade betrachteten Produkte in höheren Potenzen als Binomialentwicklungen dargestellt werden.

Potenzen skalarer Binome $c^n = (p + q)^n$ oder vektorieller Binome, die aus parallelen, in die gleiche Richtung weisenden Vektoren wie beispielsweise

$$\mathbf{c}^n = (\mathbf{p} + \mathbf{q})^n = (p\, \sigma_x + q\, \sigma_x)^n \qquad \{17\}$$

zusammengesetzt sind, zeigen die üblichen Binomialkoeffizienten (siehe Pascal-Dreieck in Abb. 1), wenn sie als Reihenentwicklungen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}^0 &= 1\\
\mathbf{c}^1 &= 1\,\mathbf{p} + 1\,\mathbf{q}\\
\mathbf{c}^2 &= 1\,\mathbf{p}^2 + 2\,\mathbf{p}\,\mathbf{q} + 1\,\mathbf{q}^2 \qquad \{18\}\\
\mathbf{c}^3 &= 1\,\mathbf{p}^3 + 3\,\mathbf{p}^2\mathbf{q} + 3\,\mathbf{p}\,\mathbf{q}^2 + 1\,\mathbf{q}^3\\
\mathbf{c}^4 &= 1\,\mathbf{p}^4 + 4\,\mathbf{p}^3\mathbf{q} + 6\,\mathbf{p}^2\mathbf{q}^2 + 4\,\mathbf{p}\,\mathbf{q}^3 + 1\,\mathbf{q}^4\\
\mathbf{c}^5 &= 1\,\mathbf{p}^5 + 5\,\mathbf{p}^4\,\mathbf{q} + 10\,\mathbf{p}^3\mathbf{q}^2 + 10\,\mathbf{p}^2\mathbf{q}^3 + 5\,\mathbf{p}\,\mathbf{q}^4 + 1\,\mathbf{p}^5
\end{aligned}$$

Potenzen vektorieller Binome, die aus orthogonal zueinander stehenden Vektoren wie beispielsweise den Komponenten $\mathbf{x} = x\, \sigma_x$ und $\mathbf{y} = y\, \sigma_y$ eines beliebigen Vektors $\mathbf{r}_{2d}$ des zweidimensionalen Raums

$$\mathbf{r}_{2d} = x\, \sigma_x + y\, \sigma_y = \mathbf{x} + \mathbf{y} \qquad \{19\}$$

zusammengesetzt sind, weisen dagegen ein vollkommen anderes Symmetrieverhalten auf. Sie antikommutieren und ein Viertel der Terme kompensiert sich infolgedessen, wie in den Gleichungen {20} zu sehen ist, gegenseitig zu Null.

Die Struktur der Koeffizienten entspricht dann der eines Pauli-Pascal-Dreiecks [25], [26], das in Abb. 2 gezeigt wird. Diese Struktur ist eineindeutig mit dem Symmetrieverhalten der binomisch zusammengesetzten Größen verknüpft.

$$\begin{array}{c}
\mathbf{1}\\
\mathbf{1 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 2 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 3 \quad 3 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1}
\end{array}$$

Abb.1: Die Binomialkoeffizienten im Pascal-Dreieck.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{2d}^{\;0} &= 1\\
\mathbf{r}_{2d}^{\;1} &= 1\,\mathbf{x} + 1\,\mathbf{y}\\
\mathbf{r}_{2d}^{\;2} &= 1\,\mathbf{x}^2 + 0\,\mathbf{x}\mathbf{y} + 1\,\mathbf{y}^2 \qquad \{20\}\\
\mathbf{r}_{2d}^{\;3} &= 1\,\mathbf{x}^3 + 1\,\mathbf{x}^2\mathbf{y} + 1\,\mathbf{x}\mathbf{y}^2 + 1\,\mathbf{y}^3\\
\mathbf{r}_{2d}^{\;4} &= 1\,\mathbf{x}^4 + 0\,\mathbf{x}^3\mathbf{y} + 2\,\mathbf{x}^2\mathbf{y}^2 + 0\,\mathbf{x}\mathbf{y}^3 + 1\,\mathbf{y}^4\\
\mathbf{r}_{2d}^{\;5} &= 1\,\mathbf{x}^5 + 1\,\mathbf{x}^4\,\mathbf{y} + 2\,\mathbf{x}^3\mathbf{y}^2 + 2\,\mathbf{x}^2\mathbf{y}^3 + 1\,\mathbf{x}\mathbf{y}^4 + 1\,\mathbf{y}^5
\end{aligned}$$

Die Aussage ‚Sind die Größen kommutativ, ergeben sich die üblichen Koeffizienten des Pascal-Dreiecks‘ ist also umkehrbar in: Wenn sich die Koeffizienten des Pascal-Dreiecks ergeben, dann müssen die zugrunde liegenden Größen kommutativ sein.

Ebenso kann die Aussage ‚Sind die Größen antikommutativ, dann ergeben sich die Koeffizienten des Pauli-Pascal-Dreiecks‘ umgekehrt werden in: Wenn sich die Koeffizienten des Pauli-Pascal-Dreiecks ergeben, dann müssen die zugrunde liegenden Größen anti-kommutativ sein.

Unter Rückgriff auf diese Umkehrung ergibt sich für die sukzessive abwechselnd mit

$$z = \sigma_x\, \mathbf{r}_{2d} = x + i\,y \qquad \{21\}$$

bzw.

$$z^* = \mathbf{r}_{2d}\, \sigma_x = x - i\,y \qquad \{22\}$$

multiplizieren komplexen Binome die folgenden Reihenentwicklungen:

$$\begin{aligned}
z^0 &= 1\\
z &= 1\,x + 1\,iy\\
z^*z &= 1\,x^2 + 0\,ixy + 1\,y^2 \qquad \{23\}\\
zz^*z &= 1\,x^3 + 1\,ix^2y + 1\,xy^2 + 1\,iy^3\\
z^*zz^*z &= 1\,x^4 + 0\,ix^3y + 2\,x^2y^2 + 0\,ixy^3 + 1\,y^4\\
\ldots &= 1\,x^5 + 1\,ix^4y + 2\,x^3y^2 + 2\,ix^2y^3 + 1\,xy^4 + 1\,iy^5
\end{aligned}$$

Die resultierenden Koeffizienten sind unschwer als die des Paul-Pascal-Dreiecks erkennbar. Mithin müssen die zugrunde liegenden Größen eine inhärent anti-kommutative Struktur besitzen.

Durch die Nutzung komplex konjugierter Faktoren wird eine zuvor kommutative Struktur in eine antikommutative Struktur überführt. Das Symmetrieverhalten hat sich grundlegend geändert.

Die komplexe Konjugation ist deshalb mitnichten eine harmlose mathematische Umformung. Sie stellt stattdessen einen massiven Eingriff in grundlegendste Gestaltungsmuster unserer mathematischen Welt dar.

$$\begin{array}{c}
\mathbf{1}\\
\mathbf{1 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 0 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \quad 1}
\end{array}$$

Abb.2: Die Koeffizienten des Pauli-Pascal-Dreiecks.

7. Quaternionen sind komisch

Um einen Bezug zu den Quaternionen zu erarbeiten, kann das Geometrische Produkt zweier rein räumlichen Vektoren der Gl. {2}

$$\mathbf{a} = w_1\,\sigma_w + x_1\,\sigma_x + y_1\,\sigma_y + z_1\,\sigma_z \qquad \{24\}$$

bzw.

$$\mathbf{b} = w_2\,\sigma_w + x_2\,\sigma_x + y_2\,\sigma_y + z_2\,\sigma_z \qquad \{25\}$$

erneut durch mittige Einmultiplikation des neutralen Elements $\sigma_w^2 = 1$ gemäß [2, S.906] umgeformt werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{a\,b} &= \mathbf{a}\,\sigma_w^2\,\mathbf{b}\\ &= (w_1\,\sigma_w + x_1\,\sigma_x + y_1\,\sigma_y + z_1\,\sigma_z)\,\sigma_w\\ &\qquad \sigma_w\,(w_2\,\sigma_w + x_2\,\sigma_x + y_2\,\sigma_y + z_2\,\sigma_z)\\ &= (w_1 + x_1\,\sigma_x\sigma_w + y_1\,\sigma_y\sigma_w + z_1\,\sigma_z\sigma_w)\\ &\qquad (w_2 + x_2\,\sigma_w\sigma_x + y_2\,\sigma_w\sigma_y + z_2\,\sigma_w\sigma_z)\\ &= (w_1 - x_1\,\sigma_w\sigma_x - y_1\,\sigma_w\sigma_y - z_1\,\sigma_w\sigma_z)\\ &\qquad (w_2 + x_2\,\sigma_w\sigma_x + y_2\,\sigma_w\sigma_y + z_2\,\sigma_w\sigma_z)\\ &= (w_1 - i_1\,x_1 - i_2\,y_1 - i_3\,z_1)\\ &\qquad (w_2 + i_1\,x_2 + i_2\,y_2 + i_3\,z_2)\\ &= (w_1 + i_1\,x_1 + i_2\,y_1 + i_3\,z_1)^*\\ &\qquad (w_2 + i_1\,x_2 + i_2\,y_2 + i_3\,z_2)\\ &= a^*\,b \qquad \{26\}\end{aligned}$$

Die Geometrische Multiplikation zweier Vektoren **a** und **b** des vierdimensionalen Raums kann also eineindeutig mit der Multiplikation der konjugierten quaternionenartigen Zahl a* und der quaternionenartigen Zahl b gleichgesetzt werden.

Für alle Skeptiker sei darauf verwiesen, dass die Umbenennung der drei Bivektoren in die drei quaternionenartigen Basiseinheiten

$$\begin{aligned}\sigma_w\sigma_x &= i_1 &\quad \text{mit} &\quad (\sigma_w\sigma_x)^2 = i_1^2 = -1\\ \sigma_w\sigma_y &= i_2 &\quad \text{mit} &\quad (\sigma_w\sigma_y)^2 = i_2^2 = -1 \qquad \{27\}\\ \sigma_w\sigma_z &= i_3 &\quad \text{mit} &\quad (\sigma_w\sigma_z)^2 = i_3^2 = -1\end{aligned}$$

im Kontext dieser vierdimensionalen Situation lediglich eine sprachliche Namensänderung, jedoch keine inhaltlich mathematische Umstellung bedeutet.

Gleichung {26} zeigt eindeutig und unzweifelhaft, dass die Geometrische Multiplikation zweier Vektoren **a** und **b** im Vierdimensionalen der Multiplikation der konjugierten quaternionenartigen Zahl a* mit der zweiten quaternionenartigen Zahl b entspricht. Die Produkte sind identisch. Und Herrgott nochmal, das ist keine Physik [5], das ist Mathematik.

Aber in der Physik interessieren wir uns natürlich für das Symmetrieverhalten der mathematischen Größen, die wir nutzen. Wir vergleichen also die beiden Produkte **a b** und **b a** miteinander.

Wir vergleichen jedoch ausdrücklich nicht a* b und b a*. Das bringt uns nicht weiter und sagt nichts über das Symmetrieverhalten aus, denn wir haben ja durch die quaternionenartige Konjugation zusätzliche Minuszeichen in die normale Multiplikation zweier quaternionenartiger Zahlen a b eingefügt und damit haben wir geschummelt. Und wir schummeln falsch, wenn wir diese Schummelei nun auf einmal beim zweiten Faktor vornehmen und nicht mehr beim ersten.

Also: a* b modelliert das Geometrische Produkt **a b**, und um dessen Symmetrieverhalten zu verstehen, vergleichen wir als physikalisch denkende Mathematikerinnen und Mathematiker das Produkt {26} mit dem in der Reihenfolge vertauschten geometrischen Produkt

$$\mathbf{b\,a} = b^*\,a \qquad \{28\}$$

indem wir wie zuvor ein inneres Produkt

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a\,b} + \mathbf{b\,a}) = \frac{1}{2}(a^*\,b + b^*\,a) \qquad \{29\}$$

und ein äußere Produkt

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a\,b} - \mathbf{b\,a}) = \frac{1}{2}(a^*\,b - b^*\,a) \qquad \{30\}$$

(siehe [17], [18], [19], [23], [24]) konstruieren.

Die kanonische Zerlegung eines Geometrischen Produkts aus zwei Vektoren **a** und **b** in ein kommutatives inneres Produkt **a • b** und ein anti-kommutatives äußeres Produkt **a** ∧ **b**

$$\mathbf{a\,b} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = a^*\,b \qquad \{31\}$$

kann also auch vollkommen identisch mit Hilfe quaternionenartiger Zahlen vorgenommen werden. Fazit: Mit dem Produkt a* b sind die gleichen Symmetrieeigenschaften verbunden wie mit dem Produkt **a b**. Das Produkt a* b auf der linken Seite

$$a^*\,b \neq b^*\,a \qquad \mathbf{a\,b} \neq \mathbf{b\,a} \qquad \{32\}$$

ist auf absolut genau die gleiche Art und Weise nicht-kommutativ wie das rechts stehende identische Produkt **a b**.

Quaternionen sind sublime, seltsam chamäleonartige Strukturen. Im Kontext dreidimensionaler Räume können sie mit der Bivektoralgebra [24, Abschnitt 2.4.2] identifiziert werden. Sie repräsentieren somit eine Algebra orientierter Flächenstücke.

Der Versuch von Hamilton, sie im Sinne einer Algebra orientierter Strecken oder Vektoren zu deuten, musste deshalb scheitern. Und auch der Versuch, sie im Kontext vierdimensionaler Räume zu nutzen, führt aufgrund des Vertauschungsverhaltens der Basiseinheiten

$$\begin{aligned} i_1\,i_2 &= -\,i_2\,i_1 = \sigma_w\sigma_x\sigma_w\sigma_y = \sigma_y\sigma_x \neq i_3\\ i_2\,i_3 &= -\,i_3\,i_2 = \sigma_w\sigma_y\sigma_w\sigma_z = \sigma_z\sigma_w \neq i_1 \qquad \{33\}\\ i_3\,i_1 &= -\,i_1\,i_3 = \sigma_w\sigma_z\sigma_w\sigma_x = \sigma_x\sigma_z \neq i_2\end{aligned}$$

zu einer quaternionenartigen Struktur, die als Abbild des konzeptionellen Konflikts zwischen der Ideengestaltung Hamiltons (als Teil einer dreidimensionalen Welt) und der weitsichtigeren Ideengestaltung Grassmanns (geweitet als Teil einer vierdimensionalen Welt) gedeutet werden kann.

Quaternionen sind komisch und sie werden erst durch die quaternionenartige Weiterung mathematisch trittfest – verbunden allerdings mit der immer vorhandenen Gefahr, durch eine Konjugation ins konzeptionelle Straucheln zu kommen.

Soll dieses Straucheln verhindert werden, ist zu empfehlen, quaternionische oder quaternionenartige Größen, die als Vektoren r_{3d} dreidimensionaler Räume

$$\begin{aligned} r_{3d} &= x + i_1\, y + i_2\, z \\ &= \sigma_x^2\, (x + y\, \sigma_x\sigma_y + z\, \sigma_x\sigma_z) \\ &= \sigma_x\, (x\, \sigma_x + y\, \sigma_y + z\, \sigma_z) \\ &= \sigma_x\, \mathbf{r}_{3d} \end{aligned} \qquad \{34\}$$

bzw. als Vektoren r_{4d} vierdimensionaler Räume

$$\begin{aligned} r_{4d} &= w + i_1\, x + i_2\, y + i_3\, z \\ &= \sigma_w^2\, (w + x\, \sigma_w\sigma_x + y\, \sigma_w\sigma_y + z\, \sigma_w\sigma_z) \\ &= \sigma_w\, (w\, \sigma_w + x\, \sigma_x + y\, \sigma_y + z\, \sigma_z) \\ &= \sigma_w\, \mathbf{r}_{4d} \end{aligned} \qquad \{35\}$$

gedacht sind, in entsprechende Vektoren {1} bzw. {2} der Geometrischen Algebra zu überführen und besser mit diesen geometrisch-algebraischen Vektoren zu rechnen.

8. Raumzeitlich Relativistisches

Wie im vorangegangene Abschnitt gezeigt, führt eine Nutzung quaternionenartiger Größen auf rein räumliche Vektoren (oder rein zeitliche, wenn man ein Universum, in dem nur zeitliche Dimensionen, aber keine räumlichen existieren, sich vorzustellen bereit ist).

Raumzeitliche Vektoren, die eine zeitliche Richtung und drei räumliche Richtungen im Sinne von Gl. {5}

$$\mathbf{a} = ct_1\, \gamma_t + x_1\, \gamma_x + y_1\, \gamma_y + z_1\, \gamma_z \qquad \{36\}$$

bzw.

$$\mathbf{b} = ct_2\, \gamma_t + x_2\, \gamma_x + y_2\, \gamma_y + z_2\, \gamma_z \qquad \{37\}$$

besitzen, können durch mittige Einmultiplikation des neutralen Elements $\gamma_t^2 = 1$ gemäß [2, S.906] umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\, \mathbf{b} &= \mathbf{a}\, \gamma_t^2\, \mathbf{b} \\ &= (ct_1\, \gamma_t + x_1\, \gamma_x + y_1\, \gamma_y + z_1\, \gamma_z)\, \gamma_t \\ &\qquad \gamma_t\, (ct_2\, \gamma_t + x_2\, \gamma_x + y_2\, \gamma_y + z_2\, \gamma_z) \\ &= (ct_1 + x_1\, \gamma_x\gamma_t + y_1\, \gamma_y\gamma_t + z_1\, \gamma_z\gamma_t) \\ &\qquad (ct_2 + x_2\, \gamma_t\gamma_x + y_2\, \gamma_t\gamma_y + z_2\, \gamma_t\gamma_z) \\ &= (ct_1 - x_1\, \gamma_t\gamma_x - y_1\, \gamma_t\gamma_y - z_1\, \gamma_t\gamma_z) \\ &\qquad (ct_2 + x_2\, \gamma_t\gamma_x + y_2\, \gamma_t\gamma_y + z_2\, \gamma_t\gamma_z) \\ &= (ct_1 - j_1\, x_1 - j_2\, y_1 - j_3\, z_1) \\ &\qquad (ct_2 + j_1\, x_2 + j_2\, y_2 + j_3\, z_2) \\ &= (ct_1 + j_1\, x_1 + j_2\, y_1 + j_3\, z_1)^* \\ &\qquad (ct_2 + j_1\, x_2 + j_2\, y_2 + j_3\, z_2) \\ &= a^*\, b \end{aligned} \qquad \{38\}$$

Die Geometrische Multiplikation zweier Vektoren **a** und **b** der vierdimensionalen Raumzeit kann also eineindeutig mit der Multiplikation der konjugierten pseudo-quaternionenartigen Zahl a* und der pseudo-quaternionenartigen Zahl b gleichgesetzt werden.

Für alle Skeptiker sei darauf verwiesen, dass die Umbenennung der drei Bivektoren in die drei pseudo-quaternionenartigen Basiseinheiten

$$\begin{aligned} \gamma_t\gamma_x &= j_1 \quad \text{mit} \quad (\gamma_t\gamma_x)^2 = j_1^2 = +1 \\ \gamma_t\gamma_y &= j_2 \quad \text{mit} \quad (\gamma_t\gamma_y)^2 = j_2^2 = +1 \\ \gamma_t\gamma_z &= j_3 \quad \text{mit} \quad (\gamma_t\gamma_z)^2 = j_3^2 = +1 \end{aligned} \qquad \{39\}$$

im Kontext dieser vierdimensionalen Situation lediglich eine sprachliche Namensänderung, jedoch keine inhaltlich mathematische Umstellung bedeutet.

Und sprachlich sinnvoll ist es auch, die reellwertigen Basisgrößen j_1, j_2 und j_3, die nun nicht mehr zu minus, sondern zu plus Eins quadrieren, als pseudo-quaternionenartige Basiseinheiten zu bezeichnen.

Gleichung {38} zeigt eindeutig und unzweifelhaft, dass die Geometrische Multiplikation zweier Vektoren **a** und **b** in der vierdimensionalen Raumzeit der Multiplikation der konjugierten pseudo-quaternionenartigen Zahl a* mit der zweiten pseudo-quaternionenartigen Zahl b entspricht. Die Produkte sind identisch. Und Herrgott nochmal, das ist nicht nur Physik [5], das ist auch Mathematik.

Die zugrundeliegende logische Struktur, das ist die Mathematik. Und die Bezeichnungen „Zeit“ und „Raum“, das ist die Physik. Sie dürfen aber auch gerne „Bierseidel“ oder „Besenkammer“ dazu sagen [27, S. 403], wenn Sie wirklich echte Mathematik haben wollen.

9. Andersrum geht es auch

Das Highlight kommt zum Schluss. Bei den bisherigen Beiträgen zu diesem Themenbereich lautet das Fazit in etwas so, wie es auch in der diesem Beitrag beigefügten erweiterten englischen Fassung des GDM-Papers [3] zu finden ist [29, S. 6]: „With complex conjugation we are modeling anti-commutative structures, which we hide behind illegitimate commutativity.“

Diese Aussage kann jedoch auch in einer umgekehrten Wirkungsrichtung getroffen werden: Mit Hilfe einer Konjugation können wir kommutative Strukturen modellieren, die wir hinter einer illegitimen Anti-Kommutativität verbergen, indem wir eben wieder zusätzliche Minuszeichen in unsere Multiplikation einbauen und dadurch das Symmetrieverhalten verschleiern.

Das geht beispielsweise so: Eine Größe **u** werde als eine Linearkombination eines zeitlichen Vektors $\mathbf{u}_t$ und eines rein zeitlichen Bivektors $\mathbf{u}_T$ als

$$\mathbf{u} = u_1\, \gamma_t + u_2\, \gamma_t\gamma_T = j\, u_t + i\, u_T = \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_T \qquad \{40\}$$

gedacht. Die beiden Basiselemente

$$\begin{aligned} j &= \gamma_t \quad \text{mit} \quad j^2 = \gamma_t^2 = 1 = \gamma_T^2 \\ i &= \gamma_t\gamma_T \quad \text{mit} \quad i^2 = (\gamma_t\gamma_T)^2 = -1 \end{aligned} \qquad \{41\}$$

anti-kommutieren

$$j\, i = \gamma_t\gamma_t\gamma_T = -\gamma_t\gamma_T\gamma_t = -i\, j \qquad \{42\}$$

so dass die Koeffizienten der Potenzen dieser Größe

$$\mathbf{u}^0 = 1$$
$$\mathbf{u}^1 = 1\,\mathbf{u}_t + 1\,\mathbf{u}_T$$
$$\mathbf{u}^2 = 1\,\mathbf{u}_t^2 + 0\,\mathbf{u}_t\mathbf{u}_T + 1\,\mathbf{u}_T^2 \qquad \{43\}$$
$$\mathbf{u}^3 = 1\,\mathbf{u}_t^3 + 1\,\mathbf{u}_t^2\mathbf{u}_T + 1\,\mathbf{u}_t\mathbf{u}_T^2 + 1\,\mathbf{u}_T^3$$
$$\mathbf{u}^4 = 1\,\mathbf{u}_t^4 + 0\,\mathbf{u}_t^3\mathbf{u}_T + 2\,\mathbf{u}_t^2\mathbf{u}_T^2 + 0\,\mathbf{u}_t\mathbf{u}_T^3 + 1\,\mathbf{u}_T^4$$

wie erwartet die Struktur des Pauli-Pascal-Dreiecks aufweisen. Die Größe $\mathbf{u}$ ist ja aus zwei anti-kommutierenden Termen zusammengesetzt.

Jetzt zerstören wir die vorgegebene Anti-Kommutativität, indem wir per komplexer Konjugation

$$\mathbf{u}^* = u_1\,\gamma_t - u_2\,\gamma_t\gamma_T = j\,u_t - i\,u_T = \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_T \qquad \{44\}$$

zusätzliche Minuszeichen in unsere Potenzen hineinmogeln:

$$\mathbf{u}^0 = 1$$
$$\mathbf{u} = 1\,\mathbf{u}_t + 1\,\mathbf{u}_T$$
$$\mathbf{u}^*\mathbf{u} = 1\,\mathbf{u}_t^2 + 2\,\mathbf{u}_t\mathbf{u}_T - 1\,\mathbf{u}_T^2 \qquad \{45\}$$
$$\mathbf{u}\,\mathbf{u}^*\mathbf{u} = 1\,\mathbf{u}_t^3 + 3\,\mathbf{u}_t^2\mathbf{u}_T - 3\,\mathbf{u}_t\mathbf{u}_T^2 - 1\,\mathbf{u}_T^3$$
$$\mathbf{u}^*\mathbf{u}\,\mathbf{u}^*\mathbf{u} = 1\,\mathbf{u}_t^4 + 4\,\mathbf{u}_t^3\mathbf{u}_T - 6\,\mathbf{u}_t^2\mathbf{u}_T^2 - 4\,\mathbf{u}_t\mathbf{u}_T^3 + 1\,\mathbf{u}_T^4$$

Die Struktur der Binomialkoeffizienten inklusive Vorzeichengestaltung sieht jetzt genau so aus wie bei den konventionellen komplexen Zahlen $z = x + iy$ {21}, wenn wir diese potenzieren:

$$z^0 = 1$$
$$z^1 = 1\,x + 1\,iy$$
$$z^2 = 1\,x^2 + 2\,ixy - 1\,y^2 \qquad \{46\}$$
$$z^3 = 1\,x^3 + 3\,ix^2y - 3\,xy^2 - 1\,iy^3$$
$$z^4 = 1\,x^4 + 4\,ix^3y - 6\,x^2y^2 - 4\,ixy^3 + 1\,y^4$$

Und von denen behauptet die Lehrbuch-Mathematik ja auch, dass sie aus kommutativen Bestandteilen zusammengesetzt seien.

Das neuerliche und endgültige Doppel-Fazit lautet also: Wenn wir eine komplexe oder quaternionische Konjugation nutzen, können wir nicht nur anti-kommutative Strukturen mit Hilfe kommutativer Bausteine modellieren und so die zugrunde liegende Anti-Kommutativität verbergen.

Wir können darüber hinaus auch kommutative Strukturen mit Hilfe anti-kommutativer Bausteine modellieren und so die zugrunde liegende Kommutativität verbergen.

Mit Hilfe von Konjugationen aller Art schummeln wir die Symmetrien kaputt. Herzlichen Glückwunsch zum 475. Geburtstag der Komplexen Zahlen [28, S. 143]!

10. Literatur

[1] Horn, Martin Erik (2019): Cheating with Complex Numbers. Der Selbstbetrug mit den komplexen Zahlen. Vixra-Preprint-Server (Stand 01.11.2019): www.vixra.org/abs/1911.0023.

[2] Horn, Martin Erik (2020): Verstecken wir die Geometrische Algebra in den komplexen Zahlen! In: S. Habig (Hrsg.): Naturwissenschaftliche Kompetenzen in der Gesellschaft von morgen. Tagungsband der Jahrestagung der GDCP 2020 in Wien. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Band 40, S. 904-907, Universität Duisburg-Essen.

[3] Horn, Martin Erik (2020): Äquivalenzumformungen in der Geometrie am Beispiel der Satzgruppe des Pythagoras. Zur Veröffentlichung vorgesehen in: BzMU 2020 – Beiträge zum Mathematikunterricht, Tagungsband der Online-Jahrestagung der GDM 2020 in Würzburg. Münster: WTM-Verlag.

[4] Horn, Martin Erik (2020). If You Split Something into Two Parts, You Will Get Three Pieces: The Bilateral Binomial Theorem and its Consequences. Symposiumsbeitrag Symmetries in Science XVIII am 9. Aug. 2019 in Bregenz. Zur Veröffentlichung vorgesehen in: Journal of Physics: Conference Series, Bristol: IOP Publishing.

[5] Götze, Daniela (2019): Re: Geplante Beitragseinreichung – Mitteilungen der GDM. Email vom 26. Sept. 2019 in der Funktion als Herausgeberin der Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.

[6] Oldenburg, Reinhard (2016): Stoffdidaktik konkret: Äquivalenz von Gleichungen. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Vol. 101, S. 10-12.

[7] Feynman, Richard (2000): Physik »The Lost Lectures«. München, Boston, San Francisco: Pearson Studium / Pearson Education Deutschland.

[8] Stewart, Ian (2017): Xenomath! In: Bharath Sriraman (Hrsg.): Humanizing Mathematics and its Philosophy. Essays Celebrating the 90th Birthday of Reuben Hersh. Cham, Switzerland: Birkhäuser / Springer International Publishing, S. 69-84.

[9] Sekretariat der KMK (Hrsg.) (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss (Jahrgangsstufe 9), Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Luchterhand / Wolters Kluwer.

[10] Sekretariat der KMK (Hrsg.) (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10), Beschluss vom 4.12.2003. München, Neuwied: Luchterhand / Wolters Kluwer.

[11] Sekretariat der KMK (Hrsg.) (2015): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife, Beschluss vom 18.10. 2012. Köln: Carl Link / Wolters Kluwer.

[12] Grassmann, Hermann (1844): Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin. Erster Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend. Leipzig: Verlag von Otto Wigand.

[13] Clifford, William Kingdon (1878): Applications of Grassmann's Extensive Algebra. In:

American Journal of Mathematics, Vol. 1, No. 4, 350-358.
[14] Peirce, Charles Sanders (1877/1878): Note on Grassmann's Calculus of Extension. In: Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, Vol. 13 (May, 1877 – May, 1878), S. 115-116.
[15] Cartan, Élie (1981): The Theory of Spinors. New York: Dover Publications.
[16] Riesz, Marcel (1958): Clifford Numbers and Spinors. Chapters I – IV, Lecture Series No. 38, Lectures delivered October 1957 – January 1958. The Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland, College Park.
[17] Hestenes, David (2015): Space-Time Algebra. 2. Auflage, Cham, Heidelberg, New York: Springer.
[18] Hestenes, David (2003): Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, S. 104-121.
[19] Gull, Stephan; Lasenby, Anthony; Doran, Chris (1993): Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime. In: Foundations of Physics, Vol. 23, No. 9, S. 1175-1201.
[20] Parra Serra, Josep Manel (2009): Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. In: Advances of Applied Clifford Algebras, Vol. 19, No. 3/4, S. 819-834.
[21] Grassmann, Hermann (1877): Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre. In: Mathematische Annalen, Vol. 12, S. 222-240.
[22] Grassmann, Hermann (1877): Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre. In: Mathematische Annalen, Vol. 12, S. 375-386.
[23] Snygg, John (1997): Clifford Algebra – A Computational Tool for Physicists. New York, Oxford: Oxford University Press.
[24] Doran, Chris; Lasenby, Anthony (2003): Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: Cambridge University Press.
[25] Horn, Martin Erik (2007): Die didaktische Relevanz des Pauli-Pascal-Dreiecks. In: Dietmar Höttecke (Ed.): Naturwissenschaftlicher Unterricht im Internationalen Vergleich. Tagungsband zur Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik in Bern, GDCP Band 27. Berlin, Münster: LIT-Verlag, S. 557-559.
[26] Horn, Martin Erik (2006): The Didactical Relevance of the Pauli Pascal Triangle. Preprint arXiv:physics/0611277 (Stand 28.11.2006): http://arxiv.org/abs/physics/0611277.
[27] Blumenthal, Otto (1935): Lebensgeschichte. In: David Hilbert: Gesammelte Abhandlungen. Dritter Band: Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes nebst einer Lebensgeschichte. Berlin: Verlag von Julius Springer, S. 388-429.
[28] Anglin, W. S. (1994): Mathematics: A Concise History and Philosophy. New York, Berlin, Heidelberg: Springer.

Dem Beitrag beigefügte Dateien

[29] Horn, Martin Erik (2020): Equivalence Operations in Geometry Illustrated by the Pythagorean and Euclidean Theorems. Erweiterte und ins Englische übersetze Fassung des Beitrags [3].