

Quantenmechanische Analyse von Massen in ihrem eigenen Gravitationsfeld

Maximilian Carmesin¹, Hans-Otto Carmesin^{2,3,4}

¹Gymnasium Fabritianum, Fabritiusstr. 15a, 47829 Krefeld

²Gymnasium Athenaeum Stade, Harsefelder Straße 40, 21680 Stade

³Studienseminar Stade, Bahnhofstraße 5, 21682 Stade ⁴Fachbereich
Physik, Universität Bremen, 28334 Bremen

Kurzfassung

Die Position einer Masse kann gemessen werden und unterliegt Gesetzmäßigkeiten auf der Basis von grundlegenden Wechselwirkungen zwischen Materie. Bei Objekten mit hohen Dichten ist dabei die Gravitation dominant.

In der Quantenmechanik sind Messwerte jedoch nach der Heisenbergschen Unschärferelation in Verbindung mit entsprechend komplementären Eigenschaften, wie Ort und Impuls es sind, nicht exakt zu ermitteln. Somit können Objekte, anders als in der klassischen Mechanik üblich und oft auch ausreichend, für eine exakte Betrachtung nicht als Massenpunkt angesehen werden. Sie haben vielmehr eine Massenverteilung.

In diesem Projekt wird nun das Gravitationspotenzial eines Teilchens in einem 3-dimensionalen Raum unter Beachtung solch einer Massenverteilung numerisch berechnet. Dazu wird eine selbst entwickelte Computersimulation verwendet. Des Weiteren werden Eigenschaften dieses Potenzials wie auch der Wellenfunktion des Teilchens untersucht.

Abstract

The position of masses can be measured and is based on laws describing fundamental interactions among matter. For objects at a very high density, the gravitational force is the most important for describing their interactions. As a result from the Heisenberg uncertainty principle, measurements of complementary properties cannot be exact, examples are position and momentum. Accordingly, such objects have to be investigated in terms of a mass distribution. This is an essential difference to classical mechanics, viewing objects as masses concentrated at a single point. Such a model is not exact, but sufficient in many fields of physics, except quantum physics. This project numerically simulates the gravitational potential of a particle in a 3-dimensional space. Thereby, a mass distribution instead of a concentrated mass is modeled. For this purpose, a computer simulation has been developed. As a result, properties of the gravitational potential and of the wave function of a particle have been examined.

1. Einleitung

Mit der Entwicklung der Quantenphysik und der Relativitätstheorie konnten viele physikalische Phänomene besser beschrieben werden. Doch stellte sich dadurch auch die Frage, wie man diese beiden Theorien verbinden kann.

Gerade zum Beginn der Entwicklung des Universums hat die Gravitation vermutlich mit einer entscheidenden Rolle gespielt, weil die Dichte im Universum damals sehr hoch war. [17] Daher ist eine Antwort auf diese Frage hilfreich, wenn nicht essenziell, für die Erklärung der Entstehung des Universums.

Einen Ansatz für die Verbindung der beiden Theorien bietet die Schrödinger-Newton Gleichung.

Da sie eine nicht lineare Differenzialgleichung ist, bietet es sich zunächst an, sie numerisch zu lösen und zu untersuchen. [1, S. 4]

2. Schrödinger-Newton Gleichung

Die Schrödinger-Newton Gleichung ist eine Verbindung aus der Schrödingergleichung *stationär (allgemein)*:

$$E|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle \quad (1)$$

⁰Um die Ergebnisse in dieser Arbeit mit Messwerten vergleichen zu können, wird, falls nicht anders beschrieben, ein 3-dimensionaler isotroper Raum betrachtet.

stationär (mit Potential):

$$E \cdot \Psi(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \Delta\Psi(r) + E_{pot}(r) \cdot \Psi(r) \quad (2)$$

und dem Newton'schen Gravitationsgesetz

$$F_G(r) = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \quad (3)$$

Funktionen, wie $\Psi(r)$, werden mit Hilfe der Kugelkoordinaten r, θ und φ definiert. Der Polar- und der Azimutwinkel werden nur im Term der potentiellen Energie verwendet, da sie für den Wert der, aufgrund des isotropen Raums, radialsymmetrischen Wellenfunktion $\Psi(r)$ unwichtig sind. Sie sind also lediglich für ein Integral der Wellenfunktion von Bedeutung. Weiter stellt M die Masse des gravitationsfelderzeugenden Objekts dar. m ist das Objekt, dessen Wellenfunktion beschrieben werden soll. Diese stellt eine Art Probemasse im Einflussbereich von M dar.

Da M als Quantenobjekt nicht auf einen Punkt konzentriert ist, muss es auch eine Massenverteilung geben. Diese lässt sich durch

$$M(r) = \int_0^r 4\pi \cdot M \cdot x^2 \cdot \Psi^2(x) dx \quad (4)$$

beschreiben. [siehe auch 1, S. 3]

Hier wird davon ausgegangen, dass die Wellenfunktionen von M und m identisch sind. Daher ist eine sinnvolle Interpretation, dass M und m das selbe Objekt darstellen.

Daraus ergibt sich das Gravitationspotenzial:

$$E_{pot}(r) = \int_0^r \gamma \cdot \frac{\int_0^x M \cdot 4\pi \cdot y^2 \cdot \Psi^2(y) dy \cdot m}{x^2} dx \quad (5)$$

Durch die Kombination der Gleichungen (2) und (5) gelangt man zur Definition der Schrödinger-Newton Gleichung. Diese gibt Aufschluss über die Wellenfunktion eines einzelnen frei im Raum befindlichen Teilchens mit Quanteneigenschaften, das lediglich durch ein einzelnes radialsymmetrisches Gravitationsfeld beeinflusst wird.

Des Weiteren gilt

$$\Delta\Psi(r) = \frac{D-1}{r} \cdot \Psi'(r) + \Psi''(r) \quad (6)$$

für $\Psi(r)$ in einem D-dimensionalen Raum [vgl. 16, S. 2, 7, 8, S. 1]. Bei der hier verwendeten DGL ist $D = 3$ zu wählen.

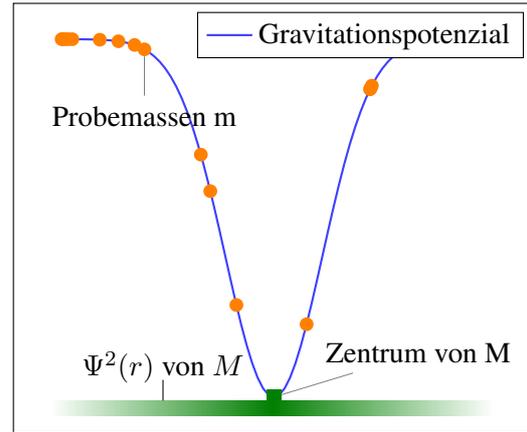


Abbildung 1: Visualisierung zur Definition der Schrödinger-Newton-Gleichung

Bezeichnung		Wert in SI-Einheit
Planck-Länge	l_P	$1,616 \cdot 10^{-35} \text{ m}$
Planck-Masse	m_P	$2,176 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$
Planck-Energie	E_P	$1,956 \cdot 10^9 \text{ J}$

Tabelle 1: Liste einiger Planck-Einheiten

*Alle Werte in dieser Tabelle wurden Fundamental Physical Constants [12] entnommen.

Außerdem werden $r, m, M(r)$ und $\Psi(r)$ durch entsprechende Planckeinheiten dividiert und somit skaliert. [8] (siehe Tabelle 1) Skalierte Werte werden im Folgenden mit einer Tilde $\tilde{}$ gekennzeichnet. Die verwendete Differentialgleichung lautet nun

$$\tilde{\Psi}''(\tilde{r}) = 2\tilde{m} \cdot (\tilde{E}_{pot}(\tilde{r}) - \tilde{E}) \cdot \tilde{\Psi}(\tilde{r}) - \frac{2}{\tilde{r}} \cdot \tilde{\Psi}'(\tilde{r}) \quad (7)$$

[8] (für E_{pot} siehe Gleichung 5)

3. Lösungsverfahren

Als Startwert wird davon ausgegangen, dass $\tilde{\Psi}(0) = \tilde{\Psi}_0$ und $\tilde{\Psi}'(0) = 0$. $\tilde{\Psi}_0$ muss später angepasst werden, um die Wahrscheinlichkeitsdichte $4\pi \cdot r^2 \cdot \Psi^2(r)$ zu normieren, kann anfangs aber auf einen beliebigen Wert ungleich 0 gesetzt werden. Hier wurde $\tilde{\Psi}_0 = 1$ verwendet. $\tilde{\Psi}'(0) = 0$, damit $\tilde{\Psi}(\tilde{r})$ auch im Ursprung stetig differenzierbar ist.

Da eine Berechnung von $\tilde{\Psi}''(\tilde{r})$ anhand von $\tilde{\Psi}'(\tilde{r})$ und Integralen dessen möglich ist, die jedoch erst aus $\tilde{\Psi}''(\tilde{r})$ ermittelt werden können, wurde hier das eulersche Polygonzugverfahren angewandt.

Um $\tilde{\Psi}''(0)$ berechnen zu können muss weiter angenommen werden, dass für $\frac{2}{\tilde{r}} \cdot \tilde{\Psi}'(\tilde{r}) = a, \tilde{r} = 0, a \in \mathbb{R}$, weil ansonsten eine Division durch 0 vorliegen

würde. Hier wurde angenommen, dass $a = 0$ für $\tilde{r} = 0$.

Da der Energieeigenwert E noch unbekannt ist, muss dieser zum Beispiel durch eine Intervallschachtelung systematisch ermittelt werden. Da hier der Grundzustand des Probekörpers betrachtet werden soll, wird versucht einen möglichst kleinen Energieeigenwert zu finden.

Weiter muss die Wahrscheinlichkeitsdichte, wie anfangs angesprochen, über den Raum normiert werden. Dazu wird die Lösung der DGL zusammen mit der Ermittlung von E mehrfach durchgeführt und jedes Mal der Startwert $\tilde{\Psi}_0$ nach dem Schema $\tilde{\Psi}_{0,n+1} = \frac{\tilde{\Psi}_{0,n}}{\sqrt{\int_0^\infty 4\pi \cdot \tilde{r}^2 \cdot \tilde{\Psi}_n^2(\tilde{r}) \, d\tilde{r}}}$ angepasst.

Zuletzt muss die Schrittweite des Polygonzugs festgelegt werden. Ein Ziel das erfüllt werden soll ist, die Laufzeit effizient genutzt wird und nicht zu lange wird. Mögliche Wege dies zu tun lauten:

1. Die Schrittweite wird für jede Iteration willkürlich festgelegt.
2. Die Schrittweite für jede Iteration wird für eine einzelne Masse einmalig festgestellt. Diese Werte werden daraufhin für alle anderen Massen übernommen.
3. Die Schrittweite wird angepasst, sodass ein Abbruchkriterium, soweit möglich, nach einer festen Anzahl an Schritten des Algorithmus erreicht wird.
4. Die Schrittweite wird angepasst, sodass ein Abbruchkriterium, soweit möglich, nach einer festen Laufzeit des Algorithmus erreicht wird.
5. Die Schrittweite wird auf den kleinsten durch einen bestimmten Datentyp darstellbaren Wert gesetzt.

Der Nachteil von Möglichkeit 1 ist, dass Ergebnisse schlecht vergleichbar sind, da nicht genau bekannt ist, in welchem Rahmen eine Änderung der Schrittweite auch Resultate ändert.

Möglichkeit 2 setzt eine andere Methode für die Ermittlung der Schrittweite voraus, und ist schon deshalb keine vollkommene Lösung. Zudem hat sich im Laufe der Experimente mit dem Programm ergeben, dass sich der Rechenaufwand für Berechnungen zu den hier verwendeten Massen, sowie die Qualität der Ergebnisse zweier verschiedener Massen, deutlich unterscheiden würde, weshalb eine Anwendung dieses Verfahrens nicht ratsam ist.

Die 3. und 4. Möglichkeit sind im Grunde sehr ähnlich. So dürften sich bei einer konstanten Anzahl an Rechenoperationen pro Zeiteinheit bei beiden Möglichkeiten auch ähnliche Lösungen ergeben.

Weiter zeigte sich durch die Verwendung der 3. oder 4. Möglichkeit kein größerer Vor- oder Nachteil. Es besteht in beiden Fällen die Gefahr, dass die Limitierung der Breite der simulierten Wellenfunktion in Schritten eine freie Bestimmung der Breite in Längeneinheiten unterbindet. Da die Wahl der Schrittweite jedoch noch einen Freiheitsgrad für diese Breite darstellt, ist diese Gefahr vermutlich als gering zu bewerten.

Durch die in den nächsten Abschnitten erläuterten Vergleiche von anderen Ergebniswerten mit theoretischen Betrachtungen, wird diese Annahme gestützt.

Ein kleiner Vorteil der 4. Möglichkeit gegenüber der 3. Möglichkeit liegt in der teilweise durch das Computersystem vorgegebenen mehr oder weniger zufälligen Veränderung der Zahl der Rechenoperation pro Zeiteinheit für die Simulation. Diese entsteht durch Regelungen der Prozessgeschwindigkeit aufgrund der Temperatur und durch die Aktivität anderer Prozesse. Dadurch sollte es vermutlich zu leichten Streuungen in den Ergebnissen der Simulation führen, welche zur Untermauerung von Test genutzt werden können (siehe Abschnitt 9).

Theoretisch könnte dies auch in die 3. Möglichkeit eingebaut werden. Dies wurde hier allerdings nicht gemacht.

Möglichkeit 5 ist unrealistisch, da sie zu einem sehr hohen Rechenaufwand, oder durch Werte nahe der Darstellungsgrenze des gewählten Datentyps zu ungenauen Berechnungen und somit zu ebenfalls ungenauen Ergebnissen führen könnte.

Für die Untersuchung der Ergebnisse der Simulation wurde die Masse eines Neutrons angesetzt, da dieses keine elektrische Wechselwirkung aufweist und ein Quantenobjekt ist. Damit ist $\tilde{m} = m \cdot 1 \, m_P^{-1} \approx 1,67 \cdot 10^{-27} \, \text{kg} \, m_P^{-1} \approx 7,70 \cdot 10^{-20}$ [10, 12]. Das hier angenommene Teilchen wird im Folgenden als Neutronenmasse bezeichnet.

4. Energieeigenwert

Zunächst startet der Energieeigenwert bei ca. $5,22 \cdot 10^{-15} \, E_P$. Mit voranschreitender Normierung der Wahrscheinlichkeitsdichte fällt der Energieeigenwert jedoch bis zu einem Wert von ca. $4,40 \cdot 10^{-84} \, E_P$ (siehe Abbildung 2) ab. Der Wert

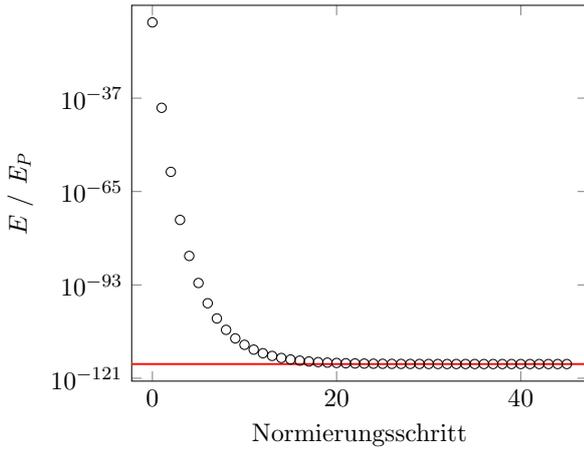


Abbildung 2: Entwicklung des Energieeigenwerts mit voranschreitender Normierung (rot: Niveau des minimalen Energieeigenwerts)

scheint, wie zu erwarten, zu konvergieren.

Da der Verlauf im berechneten Intervall streng monoton fallend ist, kann davon ausgegangen werden, dass das Verfahren zur Normierung der Wahrscheinlichkeitsdichte korrekt funktioniert und nicht überreagiert.

5. Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist in der Quantenphysik als das Quadrat der Wellenfunktion definiert. Dies wäre hier $\Psi^2(r, \theta, \varphi)$. Weil es sich jedoch um einen isotropen Raum handelt, kann, wie schon zuvor zu sehen war, der Term

$$4\pi \cdot \tilde{r}^2 \cdot \tilde{\Psi}^2(\tilde{r}) \tag{8}$$

als Definition der Wahrscheinlichkeitsdichte genutzt werden. Somit muss die Wahrscheinlichkeitsdichte nur einfach nach \tilde{r} integriert werden, um eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit zu erhalten. Zudem wird so erreicht, dass $\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) \rightarrow M$ und nicht gegen einen anderen Wert, der im Sachzusammenhang wohl keinen Sinn macht.

Wie zu erkennen ist, befindet sich die Neutronenmasse hauptsächlich auf einer Kugelschale um den Ursprung herum und nicht im Ursprung (siehe Abbildung 3). Dies liegt daran, dass das Volumen nahe des Ursprungs sehr gering ist und daher auch bei einer hohen Wahrscheinlichkeitsdichte eine geringe Aufenthaltswahrscheinlichkeit vorliegt. Das Maximum dieser Funktion liegt bei $\tilde{r} \approx 1,32 \cdot 10^{49}$. Das Integral dieses Graphen liegt bei ca. 0,999 98. Die Normierung scheint also zu funktionieren angesichts der Tatsache, dass das Integral anfangs ($E \approx 5,22 \cdot 10^{-15} E_P$) bei $1,685 65 \cdot 10^{51}$

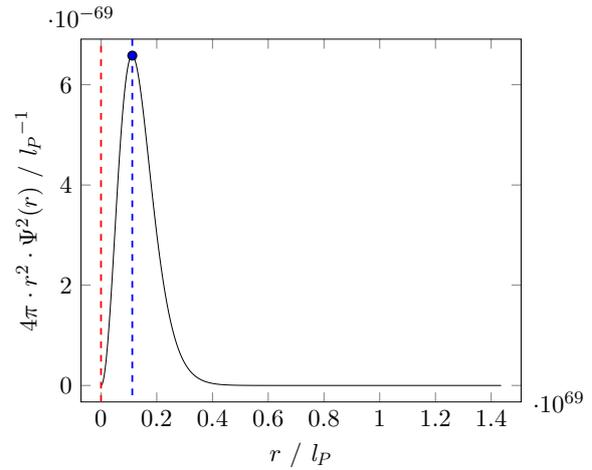


Abbildung 3: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Neutronenmasse im 3-dimensionalen Raum (rot: experimentell bestimmter Radius des Neutrons (siehe Abbildung 4))

quadratisches Mittel des absoluten Ladungsradius des Neutrons:

$$\frac{\sqrt{|-0,1161 \text{ fm}^2|}}{l_P} \approx 2,10 \cdot 10^{19} l_P$$

magnetischer Radius des Neutrons:

$$\frac{0,864 \text{ fm}^2}{l_P} \approx 5,35 \cdot 10^{19} l_P$$

Abbildung 4: experimentell ermittelter Radius eines Neutrons (nach zwei Definitionen, Messwerte von Tanabashi u. a. [19])

lag.

Wie anhand der roten Linie zu sehen ist (siehe Abbildung 3), ist die Wahrscheinlichkeitsdichte jedoch nicht mit der realen Wahrscheinlichkeitsdichte des Neutrons zu vergleichen. Angesichts der Größenunterschiede ist auch nicht relevant welche Definition für den Radius eines Neutrons (siehe Abbildung 4) angesetzt wird.

6. Wellenfunktion

Angesichts des Verlaufs von $\Psi^2(r)$ (siehe Abbildung 5) bietet sich ein Vergleich zwischen einer Glockenkurve und dem Quadrat der Wellenfunktion an.

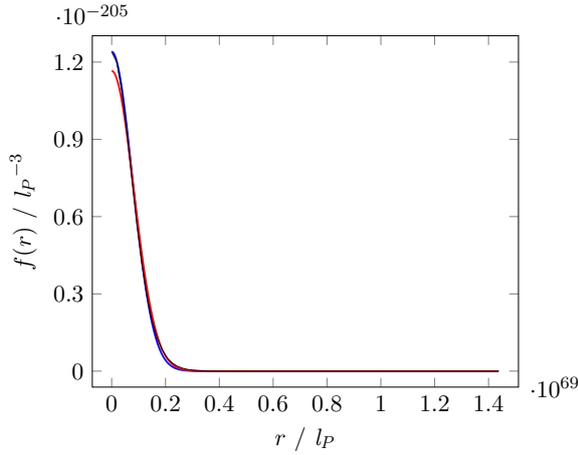


Abbildung 5: Verlauf von $\Psi^2(r)$ (schwarz) und zwei Glockenkurven als Näherung dieser Funktion (rot: Standardabweichung entspricht der von $\Psi^2(r)$; blau: erster Wert entspricht $\Psi^2(0)$) ($f(r)$ steht stellvertretend für die abgebildeten Funktionen)

Eine Glockenkurve sei definiert wie folgt:

$$\varphi(r) = \frac{c_1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (9)$$

$c_1, \sigma = \text{const.}, c_1, \sigma \in \mathbb{R}$

Es stellt sich heraus, dass die aufeinander gelegten Funktionen zwar sehr ähnlich aussehen, jedoch die berechneten Differenzen noch deutlich sind (siehe Abbildung 6). Es ist zu sehen, dass die rote Kurve, obwohl sie die gleiche Standardabweichung, wie $\Psi^2(r)$ hat, anfangs eine relative Abweichung von fast 6% hat. Auch das nicht gerichtete Integral der Differenz zum ermittelten Verlauf von $\Psi^2(r)$ ist mit $6,09 \cdot 10^{-139} l_P^{-2}$ höher als das nicht gerichtete Integral der blauen Differenzfunktion mit $3,99 \cdot 10^{-139} l_P^{-2}$.

Durch das Einsetzen des Funktionsterms einer Glockenkurve in die Schrödinger-Newton Gleichung kann diese Untersuchung zumindest in dem Punkt, dass eine einfache Glockenkurve in der Form, in welcher sie hier verwendet wurde, nicht die Wellenfunktion des betrachteten Teilchens beschreibt, gestützt werden.

Es ergibt sich die Gleichung

$$r^2 = 8\sigma^4 \cdot m \cdot E_{pot}(r) - 6\sigma^2 + 8 \cdot m \cdot E \quad (10)$$

Folglich müsste $r^2 \sim E_{pot}(r)$. Beobachtungen in der realen Welt zeigen jedoch eindeutig, dass dies nicht für alle Größenskalen gilt. So ist das Gravitationspotenzial im Kosmos nicht als ein Parabelpotenzial zu betrachten.

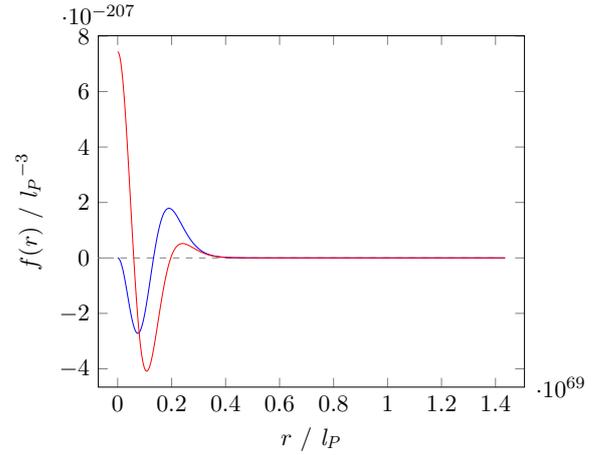


Abbildung 6: Differenz zwischen $\Psi^2(r)$ und zwei Näherungen dieser Funktion durch Glockenkurven (rot: Standardabweichung entspricht der von $\Psi^2(r)$; blau: erster Wert entspricht $\Psi^2(0)$) (siehe auch Abbildung 5) ($f(r)$ steht stellvertretend für die abgebildeten Funktionen)

Da Unterschiede zu der ermittelten Funktion nachweislich bestehen sollten, kann weiter angenommen werden, dass die Unterschiede zwischen $\Psi^2(r)$ und der hier verwendeten Näherung wenigstens in der Tendenz stimmen (Richtung, womöglich aus Ausmaß) und nicht durch mangelnde Genauigkeit des Verfahrens begründet sind.

Von den Erkenntnissen zum Quadrat der Wellenfunktion unseres Probekörpers aus könnte nun eine weitere Näherung entwickelt werden, um den ermittelten Werten zu entsprechen. Dies gehört jedoch nicht zum Umfang dieser Arbeit.

7. Potentielle Energie

Für ein Verständnis von Gravitation sind das Gravitationspotenzial $\Phi(r)$ und die potentielle Energie $E_{pot}(r)$ hilfreich. Da $\Delta E_{pot}(r) = m \cdot \Delta\Phi(r)$, $m = \text{const.}$, reicht es zunächst aus nur eine der beiden Funktionen zu betrachten. Im Folgenden wird dies $E_{pot}(r)$ sein.

Zunächst bietet sich ein Vergleich zwischen der ermittelten potentiellen Energie, sowie dem klassischen Ausdruck für die potentielle Energie

$$E_{pot} = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r} \quad (11)$$

an.

Wie in Abbildung 7, sowie Abbildung 8 zusehen ist, ähneln sich diese beiden Funktionen für größere r zunehmend.

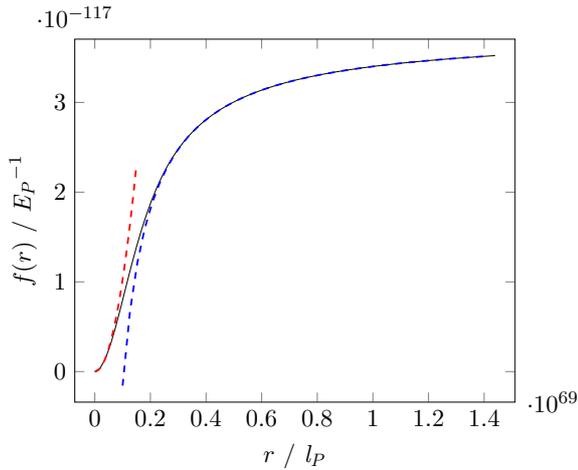


Abbildung 7: potentielle Energie einer Neutronenmasse in ihrem eigenen Gravitationsfeld im 3-dimensionalen Raum (schwarz) und zwei Näherungen dieser Funktion (rot: eine Parabel ($\frac{4}{6}\pi\gamma \cdot \tilde{M} \cdot \tilde{m} \cdot \tilde{r}^2$); blau: eine dem Verlauf der klassischen potentiellen Energie ähnelnde Funktion ($\gamma \cdot \tilde{M} \cdot \tilde{m} \cdot \tilde{r}^{-1} + c_1$)) ($f(r)$ steht stellvertretend für die abgebildeten Funktionen)

($4 \cdot 10^{68} l_P \approx 0,646 \cdot 10^{34} \text{ m} \approx 0,0683 \cdot 10^{19} \text{ ly}$) Dies ist allerdings teilweise auch der Methodik geschuldet. Die beiden Graphen kreuzen sich zwangsweise, da ein gemeinsamer Punkt gewählt wurde, um den konstanten Summanden c_1 zu bestimmen.

Bei der Betrachtung der Differenz der Graphen ist festzustellen, dass das Annähern jedoch deutlich später geschieht, als nach Beobachtungen des Makrokosmos anzunehmen ist.

Angesichts der Ergebnisse zur Wellenfunktion des Probekörpers (siehe Abschnitt 6) ist anzunehmen, dass $\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi(r) \rightarrow 0$ gilt. Dies lässt sich durch die Voraussetzung, dass $4\pi \cdot r^2 \cdot \Psi^2(r)$ normiert sein muss, begründen. (In anderen Versuchen könnte dies ein anderer Term, der $\Psi(r)$ enthält, sein. (z.B. $\Psi^2(r)$)) Somit ist das zuvor geschilderte asymptotische Verhalten nicht ausgeschlossen. Vielmehr bestehen Indizien, die dieses bestätigen.

Wie Abbildung 7 und Abbildung 8 ebenfalls zu entnehmen ist, verläuft $E_{pot}(r)$ anfangs nahezu parabelförmig. Obleich es in Abbildung 5 anders erscheinen mag, ist daraus zu schließen, dass der Ausdruck $\Psi^2(r)$ für kleine r nahezu konstant ist. Dies mag sicherlich auch daran liegen, dass für kleine r : r^{-2} einen signifikanteren Einfluss auf den Verlauf des Potentials hat, als der Term

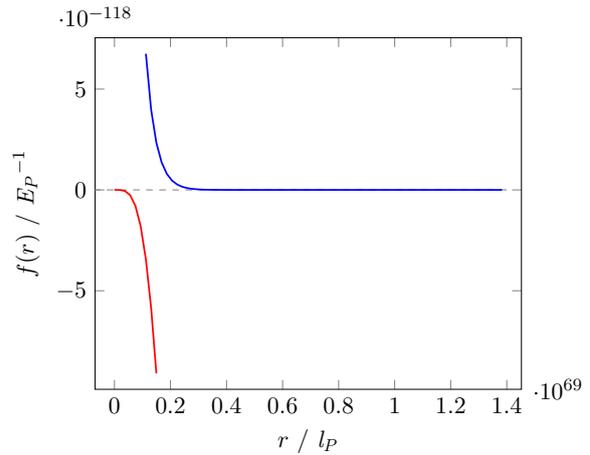


Abbildung 8: Differenz zwischen der potentiellen Energie einer Neutronenmasse in ihrem eigenen Gravitationsfeld im 3-dimensionalen Raum und zwei Näherungen dieser Funktion (siehe auch Abbildung 7) ($f(r)$ steht stellvertretend für die abgebildeten Funktionen)

$$\int_0^r 4\pi \cdot M \cdot x^2 \cdot \Psi^2(x) \cdot m \, dx.$$

Es konnten also zwei scheinbar gute Näherungen für den Verlauf der potentiellen Energie einerseits für kleine Radien r und andererseits für große Radien r gefunden werden. Diese beiden Funktionen deuten auf einen oberen, sowie einen unteren Grenzwert für die potentielle Energie hin, anders als es im klassischen Term der potentiellen Energie ist (siehe Gleichung 11).

Eine Zusammenführung dieser beiden Näherungen, wie auch eine Näherung für den Übergang von der ersten zur zweiten Näherung werden hier nicht weiter betrachtet.

8. Probleme

Der eulersche Polygonzug ist eine mögliche Fehlerquelle. Da der maximal evaluierte Radius r , sowie der ermittelte Energieeigenwert E jedoch bis zu einer gewissen Schrittweite kaum mit der Veränderung der Schrittweite des Polygonzugs schwankt (siehe Tabelle 2 und Abbildung 9), kann davon ausgegangen werden, dass das Ergebnis nahe an der exakten Funktion liegt.

Auch die Tatsache, dass in dieser Differentialgleichung nur die Gravitation berücksichtigt wurde und keine andere Wechselwirkung, wie die starke Wechselwirkung, kann zu den beobachteten Abweichungen von der Realität führen.

Zudem wurde hier kein Raum mit sehr hoher Dichte betrachtet, wie er zu Anfang des Univer-

Schrittweite des Polygonzug	r_{max}
$1 \cdot 10^{61} l_P$	$6,45 \cdot 10^{68} l_P$
$1 \cdot 10^{62} l_P$	$6,47 \cdot 10^{68} l_P$
$1 \cdot 10^{63} l_P$	$6,77 \cdot 10^{68} l_P$
$1 \cdot 10^{64} l_P$	$5,80 \cdot 10^{68} l_P$
$1 \cdot 10^{65} l_P$	$4,90 \cdot 10^{68} l_P$
$1 \cdot 10^{66} l_P$	$4,05 \cdot 10^{68} l_P$

Tabelle 2: maximal evaluierter Radius der Simulation r_{max} (gerundet auf zwei Dezimalstellen) in Abhängigkeit von der Schrittweite; ausgegangen wird von gleichen Parametern (Energieeigenwert: $1,84 \cdot 10^{-117} E_P$, $\tilde{\Psi}(0)$: $1,24 \cdot 10^{-205}$, Masse: $7,70 \cdot 10^{-20} m_P$)

sums bestand, sodass die Gravitation in diesem Versuchsaufbau möglicherweise auch in der Realität kaum eine Rolle spielt.

Die genannten nicht berücksichtigten Aspekte führen wahrscheinlich auch zu der unrealistischen Ausdehnung des ermittelten Gravitationspotenzials.

9. Verschiedene Massen

Aus der DGL kann hergeleitet werden, dass

$$E_{pot} - E \sim m^5 \quad (12)$$

ist. Es folgt also, dass $\sqrt[5]{E_{pot} - E}$ linear abhängig von m ist.

Diese Beziehung kann genutzt werden, um die entwickelte Simulation weiter zu testen.

Ein Parameter, welcher dabei zu beachten ist, ist die Schrittweite der Simulation. Diese Schrittweite hängt unter anderem mit dem Rechenaufwand der Simulation zusammen und ist alleine deshalb nicht so klein wie möglich gewählt (siehe Abschnitt 3). Wie in Abbildung 9 zu sehen ist, spielt dieser Faktor bei dieser Implementation der Simulation eine zunächst vernachlässigbar kleine Rolle.

Grundsätzlich benötigt die Simulation für kleinere Massen bei gleicher Schrittweite mehr Zeit, um eine Simulation durchzuführen. Das meint, dass ein Abbruchkriterium der Simulation bei ihnen später (höheres r) erreicht wird, als bei höheren Massen. Dies liegt an einer breiteren Wellenfunktion, sodass sie erst später in die Nähe von 0 kommt.

Wie Abbildung 9 zu entnehmen ist, ist der oben beschriebene Zusammenhang (siehe Gleichung 12) auch in den Ergebnissen der Simulation festzustellen. Mit einem mittleren absoluten Fehler

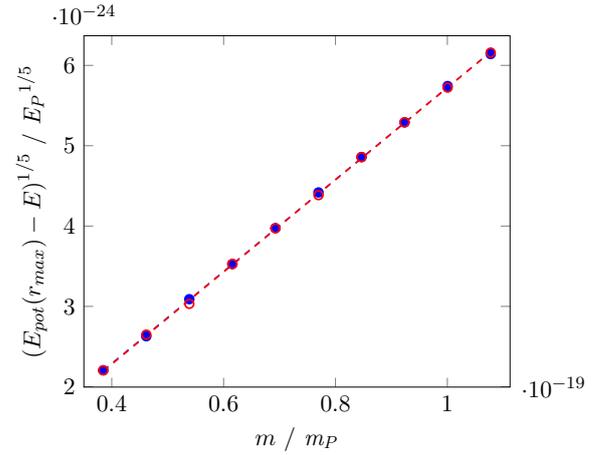


Abbildung 9: Vergleich der ermittelten Werte für von $\tilde{E}_{pot}(\tilde{r}_{max}) - E$ in Abhängigkeit von der gewählten Masse bei verschiedenen zeitlichen Abbruchkriterien (blau: 100 ms/Simulation, rot: 50 ms/Simulation); Kreise und Punkte sind ermittelte Werte der Simulation; gestrichelte Linien stellen eine lineare Regression dar

von ca. $9,49 \cdot 10^{-27} E_P^{1/5}$ der blauen Messpunkte und ca. $1,39 \cdot 10^{-26} E_P^{1/5}$ der roten Messpunkte, liegen beide Messreihen näherungsweise auf je einer Geraden, die sich jedoch auch nur geringfügig unterscheiden.

Die Simulation scheint also theoretischen Betrachtungen standzuhalten.

Dies kann anhand anderer proportionaler Zusammenhänge, wie

$$\Psi(0) \sim m^{\frac{9}{2}} \quad (13)$$

$$\sigma_{\Psi} \sim m^{-3} \quad (14)$$

weiter bestätigt werden, wie Korrelationskoeffizienten von meist $> 0,999$ aufzeigen.

Die Ergebnisse der Tests werden zusätzlich durch leichte Streuungen der Messpunkte (siehe Abbildung 9) gestützt, da somit davon ausgegangen werden kann, dass die untersuchten proportionalen Verhältnisse nicht direkt, aber auch nicht indirekt (über die Verbindung mehrerer Schritte), in der Implementierung des Algorithmus enthalten sind.

10. Zusammenfassung

Die modifizierte Schrödinger-Newton Gleichung konnte durch das hier angewandte numerische Verfahren gelöst werden. Diese Gleichung ist jedoch wenigstens für ein Neutron nicht repräsentativ. Andere Potenziale, wie das der starken Kernkraft,

scheinen notwendig zu sein, um ein solches Teilchen näherungsweise realistisch beschreiben zu können. Daher kann nicht überprüft werden, ob die Schrödinger-Newton Gleichung einen heute messbaren Sachverhalt für Aufgaben der Physik präzise genug beschreiben kann.

Eine numerische Lösung dieser DGL ist jedoch grundsätzlich möglich. Dabei sind ihre Ergebnisse im Einklang mit theoretischen Betrachtungen der DGL, was es für möglich erscheinen lässt, dass eine hohe Präzision möglich ist.

11. Anwendungskontext

Diese Untersuchung findet im Rahmen einer Jugend forscht Gruppe statt. Dort untersuchen wir die Struktur und die Zeitentwicklung des frühen Universums durch eine Kombination der Quantenphysik und der allgemeinen Relativitätstheorie einschließlich Gravitation [2, 15, 18, 3, 5, 9]. Das frühe Universum hat eine so hohe Dichte, dass die Zustände durch die hier numerisch erzeugten Lösungen genau charakterisiert werden [4, 6]. Daher stützt diese numerische Untersuchung unsere Analysen und wird in Zukunft wohl weitere Erkenntnisse ermöglichen. Parallel zu dieser numerischen Untersuchung berichten wir in diesem Jahr in dieser Zeitschrift über drei weitere Ergebnisse: eine Dichtegrenze, eine kosmische Entfaltung und den Ursprung von Energie einschließlich Masse im Universum.

So vernetzen die Lernenden die vier wesentlichen Basiskonzepte Energie, Wechselwirkung, Materie sowie Wellen miteinander sowie mit der Entwicklung des Universums [13]. Dabei entwickeln die Schülerinnen und Schüler ihre prozessbezogenen Kompetenzen Modellbildung, Problemlösen, Mathematisierung und Erkenntnisgewinnung [11]. So erzielen sie eine hohe Lernwirksamkeit [14].

12. Literatur

- [1] S. Carlip. „Is quantum gravity necessary?“ In: *Classical and Quantum Gravity* 25.15 (Juli 2008), S. 154010. ISSN: 1361-6382. DOI: [10.1088/0264-9381/25/15/154010](https://arxiv.org/abs/0803.3456). URL: <https://arxiv.org/abs/0803.3456>.
- [2] H.-O. Carmesin. *Vom Big Bang bis heute mit Gravitation: Model for the Dynamics of Space*. Berlin: Verlag Dr. Köster, 2017.
- [3] H.-O. Carmesin. „A Model for the Dynamics of Space - Expedition to the Early Universe“. In: *PhyDid B, FU Berlin, hal-02077596* (2018), S. 1–9.
- [4] H.-O. Carmesin. *Entstehung der Raumzeit durch Quantengravitation - Theory for the Emergence of Space, Dark Matter, Dark Energy and Space-Time*. Berlin: Verlag Dr. Köster, Nov. 2018.
- [5] H.-O. Carmesin. „A Novel Equivalence Principle for Quantum Gravity“. In: *PhyDid B Internet Journal* (2019), S. 1–9.
- [6] H.-O. Carmesin. *Die Grundsicherungen des Universums - The Cosmic Unification - With 8 Fundamental Solutions based on G, c and h - With Answers to 42 Frequently Asked Questions*. Berlin: Verlag Dr. Köster, Juli 2019.
- [7] H.-O. Carmesin. „On the Laplace equation in d-dimension - Folgerung“. German. Stade, Deutschland, 27. März 2019.
- [8] H.-O. Carmesin. „Zusammenfassung II zur Wellenfunktion“. German. Stade, Deutschland, 6. März 2019.
- [9] H.-O. Carmesin. *Wir entdecken die Geschichte des Universums mit eigenen Fotos und Experimenten*. Berlin: Verlag Dr. Köster, März 2020.
- [10] CODATA Value: neutron mass. *Fundamental Physical Constants*. In: *Fundamental Physical Constants*. National Institut of Standards of Commerce, Mai 2019. URL: <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?mn> (besucht am 03.01.2020).
- [11] M. Frenzel u. a. *Kerncurriculum für das Gymnasium - gymnasiale Oberstufe, die Gesamtschule - gymnasiale Oberstufe, das Fachgymnasium, das Abendgymnasium, das Kolleg, Physik, Niedersachsen*. Hannover: Niedersächsisches Kultusministerium, 2017.
- [12] *Fundamental Physical Constants*. National Institut of Standards of Commerce, Mai 2019. URL: <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html> (besucht am 03.01.2020).
- [13] S. Großmann u. a. „Physik in der Schule Analge Basiskonzepte“. In: *DPG* (2016), S. 1–54.

- [14] J. Hattie. *Visible Learning*. London: Taylor und Francis Ltd, 2009.
- [15] B. J. Helmcke u. a. „Three methods for the observation of the Big Bang with our school telescope“. In: *PhyDid B* (2018), S. 55–60.
- [16] R. R. Landim. *On the Laplace equation in d -dimension*. 12. Feb. 2009. arXiv: 0901.3488 [math-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/0901.3488v3> (besucht am 17. 10. 2019).
- [17] C. R. Nave. *Big Bang models back to Planck time. Models of Earlier Events*. Georgia State University (GSU), 9. Nov. 2016. URL: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Astro/planck.html> (besucht am 26. 03. 2020).
- [18] L. Sprenger und H.-O. Carmesin. „A Computer Simulation of Cosmic Inflation“. In: *PhyDid B* (2018), S. 61–64.
- [19] M. Tanabashi u. a. *Review of Particle Physics - neutron*. University of California. Aug. 2018. URL: <http://pdg.lbl.gov/2019/listings/rpp2019-list-n.pdf> (besucht am 12. 01. 2020).