

Die schiefe Ebene als fächerübergreifendes Lehr- und Lernmodell

Juliane König-Birk*, Thomas Pospiech⁺

Hochschule Heilbronn, Fakultät für Technische Prozesse, Max-Planck-Str. 39, 74081 Heilbronn

*juliane.koenig-birk@hs-heilbronn.de

⁺thomas.pospiech@hs-heilbronn.de

Kurzfassung

An der Hochschule Heilbronn wurde ein fächerübergreifendes Lehr- und Lernmodell entwickelt, das den Übergang von der Schule zur Hochschule speziell in den Fächern Mathematik und Physik erleichtern soll. Bedingt durch die unterschiedlichen Schularten, die zu einer Hochschulzugangsberechtigung führen, ist die Heterogenität im Wissensstand in diesen Fächern besonders groß. Das Modell begleitet die Studierenden dann bis ins Hauptstudium.

In thematisch enger Verzahnung mit dem Modell wurde an der Hochschule Heilbronn ein verpflichtender Mathe-Grundlagentest als Qualitätssicherungsmittel eingeführt.

Das Lehr- und Lernmodell stellt eine schiefe Ebene dar, deren Neigungswinkel geändert werden kann. Ein darauf befindlicher Ball soll nach der Auslenkung wieder in die Ruhelage gebracht werden. Um das Modell theoretisch zu erfassen, wird Schulstoff wie trigonometrische Funktionen, kinetische und potentielle Energie aufgefrischt. Im Grundstudium wird das Modell bis zu einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung samt deren Lösung besprochen. Im Hauptstudium wird in der Regelungs-, Steuerungs- und Automatisierungstechnik die entsprechende Übertragungsfunktion veranschaulicht und das Modell durch die Themengebiete Sensortechnik und Aktorik erweitert.

1. Ausgangszustand

Die Heterogenität im Wissensstand der Studienanfänger und –anfängerinnen an der Hochschule Heilbronn ist in den technischen Fakultäten enorm: Es gibt Studierende im ersten Semester, die problemlos auch komplizierte Ableitungen in der Mathematik bewältigen. Andere können noch nicht einmal etwas mit dem Begriff „Funktion“ anfangen. Dies lässt sich mit den Unterschieden in der Hochschulzugangsberechtigung, den Unterschieden in der Mathematiknote und den Zeiten, die zwischen Studienbeginn und Schulabschluss vergangen sind, erklären.

1.1. Hochschulzugangsberechtigung und Mathe-note

Die Erstsemesterbefragung in der Fakultät für Technische Prozesse im Wintersemester 18/19 zeigt, dass 36,4% eine Mathematiknote von besser als 2,5 aufweisen. Ein technisches Studium wird dieser Umfrage zufolge auch dann aufgenommen, wenn die Mathematiknote 4,0 oder schlechter ist (22,1 %). Ebenfalls abgefragt wird die Hochschulzugangsberechtigung. Auch hier zeigt sich ein heterogenes Bild: In den Jahren 2013-2018 hatten 36 % der Studierenden eine allgemeine Hochschulreife, 43 % eine Fach-

hochschulreife, 5 % eine außerhalb Deutschland erworbene Fachhochschulreife. Weitere Zugangsarten wie berufliche Qualifikation lagen bei ca. 2 %.

1.2. Durchfallquoten

Bislang lagen die Durchfallquoten in den Fächern Mathematik (1. Semester), Physik (1.Semester) und Regelungstechnik (3. Semester) bei ca. 50 %. Eine Hypothese ist, dass die Studierenden im Grundstudium in den technischen und mathematischen Fächern scheitern, weil sie den Inhalten auf Grund von fehlenden Mathematikkenntnissen nicht folgen können. Diese Annahme beruht auf Erfahrungsberichten aus den Vorlesungen von Lehrenden in diesen Fächern und auf verschiedenen Veröffentlichungen ([1], [2]). Um hier Abhilfe zu schaffen, wurde ein Mathematik-Grundlagentest eingeführt, der online durchgeführt wird. Die Studierenden können vor dem Test ortsunabhängig online üben. Abgefragt wird mathematischer Unterrichtsstoff bis zur Oberstufe Gymnasium laut Bildungsplan Baden-Württemberg, da das Einzugsgebiet der Studierenden einen Umkreis von ca. 50 km um Heilbronn umfasst. Nur mit einem bestandenen Mathematik-Grundlagentest dürfen Prüfungen in den Fächern Mathematik 1 und Physik angetreten werden.

1.3. Fächerübergreifendes Lernen

Bislang existieren in der Fakultät nur für eng verwandte Fächer übergreifende Projekte (z.B. Werkstoffkunde 1 und Labor Werkstoffkunde). Eine Idee war es, den Studierenden an Hand eines Projekts die verschiedenen Aspekte, Inhalte und Fächer vom Grund- bis zum Hauptstudium näherzubringen. So entsteht ein roter Faden, der die verschiedenen Disziplinen miteinander verknüpft und durch Wiederholungen und einen hohen Wiedererkennungswert den Wissenserwerb unterstützt.

2. Übersicht fächerübergreifendes Projekt

Hier setzt nun das Lehr- und Lernmodell „Balancierender Ball auf einer schiefen Ebene“ an: An diesem Modell werden grundlegende Bereiche der Mathematik und Physik wiederholt und erlernt. Im Sinne eines ganzheitlichen Lernansatzes existiert das Modell als experimenteller Aufbau zum Ausprobieren, Vorführen und Erfahren, als Video und als Foliensatz mit Text, Bildern, Formeln und Übungen. Somit können alle Sinne nach [3] angesprochen werden, um die Informationen zu erhalten und damit das Wissen im Gehirn zu speichern.

2.1. Aufbau des Lehr- und Lernmodells

Beim Projekt „Schiefe Ebene“ befindet sich eine Kugel auf einer Ebene (Abb. 1). Die Position des Balls wird mittels eines Laserabstandssensors erfasst. Über einen Servomotor lässt sich eine Kurbel mit einem Pleuel bewegen, so dass die Ebene an einer Seite angehoben oder abgesenkt werden kann. Dadurch bewegt sich die Kugel auf der nun schiefen Ebene.

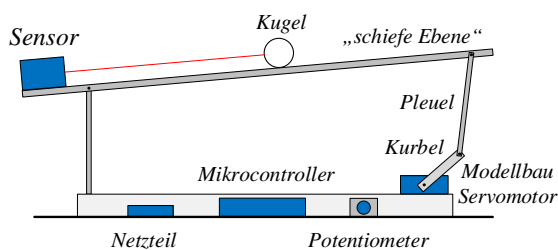


Abb. 1: Prinzipieller Aufbau des Modells „Balancierender Ball auf einer schiefen Ebene“

Der Betrieb des Motors und damit die Auslenkung der Ebene kann einerseits händisch über ein Potentiometer oder andererseits automatisiert über einen Mikrocontroller erfolgen.

Die Positionsdaten der Kugel werden mittels eines Raspberry Pi erfasst und verarbeitet. Über einen integrierten Webserver können die Daten des Modells wie beispielsweise die Auslenkung des Balls auf einem Notebook oder Smartphone dargestellt werden.

2.2. Mathematische und physikalische Erfassung

Wird die Ebene erstmals aus der Ruhelage ausgelenkt, so setzt sich der Ball in Bewegung. Damit lässt sich unter Vernachlässigung der Reibung folgende Aussage treffen: Potentielle Energie wird in kinetische Energie umgewandelt. Die kinetische Energie setzt sich zusammen aus einer translatorischen und einer rotatorischen Komponente (Abb. 2). Es gilt:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \quad \{1\}$$

mit Masse der Kugel m , Erdbeschleunigung g , Höhe h , Geschwindigkeit v , Massenträgheitsmoment I und Winkelgeschwindigkeit ω .

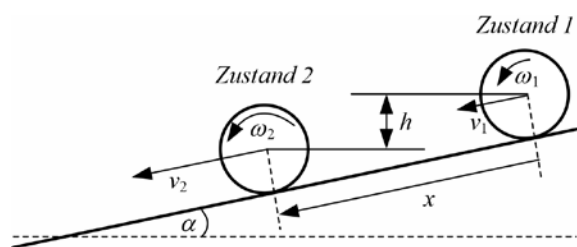
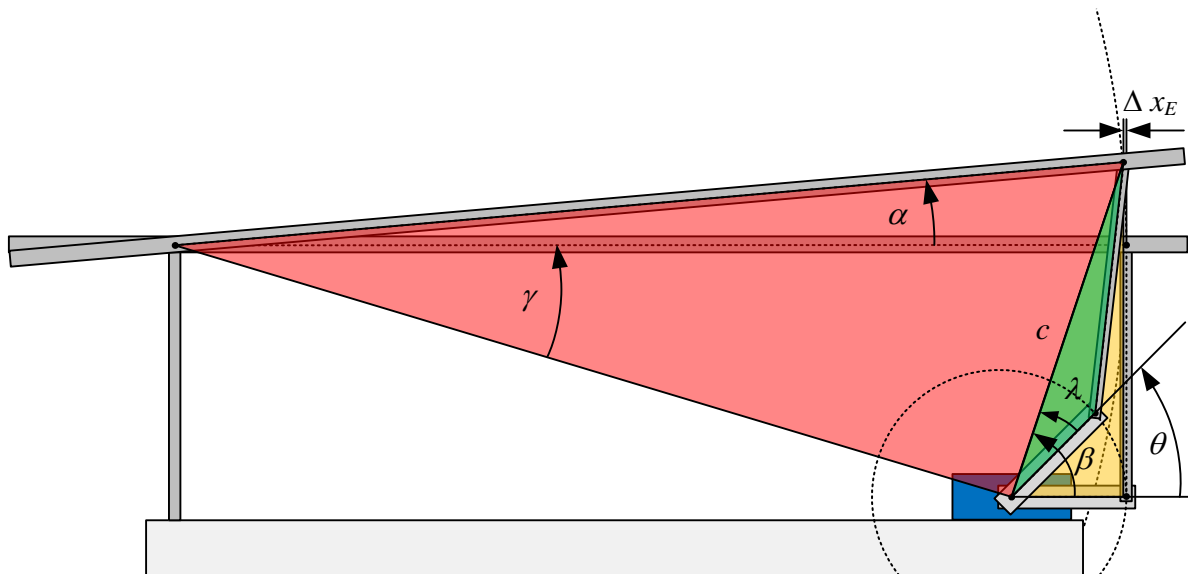


Abb. 2: Energiebetrachtung der Kugel auf der schiefen Ebene

Wird differenziert und die Kleinwinkelnäherung angewendet und vorher die Höhe mit $h = x \cdot \sin \alpha$ und die Rotationsgeschwindigkeit mit $v = r \cdot \omega$ ersetzt, folgt:

$$\ddot{x} \approx \frac{m \cdot g}{\left(m + \frac{I}{r^2}\right)} \cdot \alpha \quad \{2\}$$

Abb. 3 zeigt, dass der Winkel α der schiefen Ebene bestimmt wird durch den Winkel θ der Kurbel am Motor. Deshalb soll nun eine Funktion für diesen Winkel in Abhängigkeit von α gefunden werden.


Abb. 3: Winkel der schiefen Ebene und der Kurbel am Servomotor

Ist die schiefe Ebene nicht ausgelenkt und beide Winkel gleich Null, wird ein Hilfswinkel γ eingeführt und über den Satz des Pythagoras l_M (Länge der Strecke zwischen Servomotor und festem linkem Auflagepunkt der schiefen Ebene) bestimmt.

Über den Kosinussatz wird eine Formel für die Strecke c und für den Hilfswinkel λ (Abb. 3) aufgestellt. Mit $\theta = \beta - \lambda$ folgt:

$$\theta = \arccos \left[\frac{l_K - l_E \cdot [1 - \cos(\alpha)]}{\sqrt{l_E^2 + l_M^2 - 2 \cdot l_E \cdot l_M \cdot \cos(\gamma + \alpha)}} \right] - \arccos \left[\frac{l_K^2 + [l_E^2 + l_M^2 - 2 \cdot l_E \cdot l_M \cdot \cos(\gamma + \alpha)] - l_P^2}{2 \cdot l_K \cdot \sqrt{l_E^2 + l_M^2 - 2 \cdot l_E \cdot l_M \cdot \cos(\gamma + \alpha)}} \right] \quad \{3\}$$

Stellt man die Formel grafisch dar, sieht man, dass sie sich für den Bereich $-2^\circ < \alpha < 2^\circ$ linear nähern lässt:

$$\theta \approx 17\alpha \quad \{4\}$$

Setzt man {4} in {2} ein, so folgt:

$$\ddot{x} = \frac{m \cdot g}{\left(m + \frac{I}{r^2}\right)} \cdot \frac{\theta}{17} \quad \{5\}$$

Die Vorlesungen Mathematik 1 und Physik führen zu dieser homogene linearen Differentialgleichung 2. Ordnung, die an er Fakultät in der Vorlesung Mathematik 2 im 2. Semester gelöst wird.

2.3. Weiterführung in der Regelungstechnik

In der Regelungstechnik stellt Gleichung {5} die mathematische Beschreibung der Regelstrecke dar. Mit Hilfe der Laplace-Transformation kann diese in den Bildbereich übertragen werden, sodass die Übertragungsfunktion der Regelstrecke vorliegt:

$$G_{ST}(s) = \frac{X(s)}{\theta(s)} = \frac{K_s}{s^2} \quad \{6\}$$

Der Streckenverstärkungsfaktor K_s berücksichtigt u.a. auch das Massenträgheitsmoment I .

Die Aufgaben der Regelungstechnik sind u.a. das Stabilisieren von instabilen Systemen und das Ausregeln von Störgrößen. Beide Aufgaben lassen sich den Studierenden mit dem Modell anschaulich demonstrieren, indem beispielsweise bei waagerechter Führungsschiene der Ball leicht angestoßen wird. Das Anstoßen der Kugel kann als Störgröße interpretiert werden und das System reagiert mit der sog. Impulsantwort. Hierbei ist gut zu erkennen, dass die Kugel nicht mehr von alleine zur Ruhe kommt, es wird demnach kein stationärer Zustand erreicht. Die Regelstrecke ist somit instabil. Diese Instabilität kann nach [4] auch direkt aus {6} abgeleitet werden, da die Übertragungsfunktion eine doppelte Polstelle im Ursprung aufweist. Das bedeutet, dass ohne einen geeigneten Regler, bzw. ohne einen geschlossenen Regelkreis, sich die Kugel nicht auf der Führungsschiene automatisch „balancieren“ lässt!

Für die weiteren Betrachtungen wird das Übertragungsverhalten des Stellmotors und des Sensors vernachlässigt. Diese Annahme begründet sich dadurch, dass die Dynamik der beiden Teilsysteme deutlich höher ist als die der Regelstrecke. Störsignale, Messunsicherheiten des Sensorsignals sowie der auftretende Quantisierungsfehler beim Digitalisieren werden mit einem Tiefpassfilter (erster Ordnung) im Rückführzweig des Regelkreises geglättet. Das nachfolgende Bild zeigt den daraus resultierenden Regelkreis.

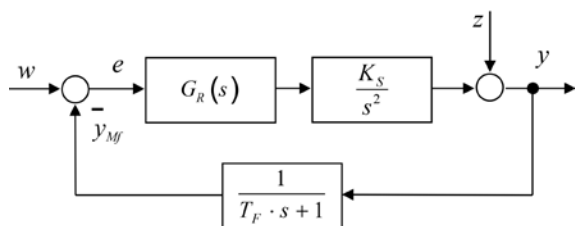


Abb. 4: Geschlossener Regelkreis

Mit einem reinen *P*-Regler kann das Gesamtsystem nicht stabilisiert werden, da sich der geschlossene Regelkreis zu „träge“ verhält. Im realen Modell zeigt sich dies indem sich nach einer äußeren Erregung der Ball hin und her bewegt und dabei die Amplitude immer größer wird. Am realen Modell kann das „Aufschwing-Verhalten“ gut beobachtet werden: Die Winkellage der schiefen Ebene ändert sich „zu spät“. Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises ergibt sich zu:

$$G_g(s) = \frac{K_p \cdot K_s \cdot T_f \cdot s + K_p \cdot K_s}{T_f \cdot s^3 + s^2 + K_p \cdot K_s} \quad \{7\}$$

mit $G_R(s) = K_p$

Gleichung {7} zeigt nach [4], dass der geschlossene Regelkreis mit einem einfachen *P*-Regler nicht stabilisiert werden kann, da ein Koeffizient in der charakteristischen Gleichung {8} fehlt.

$$T_f \cdot s^3 + s^2 + K_p \cdot K_s = 0 \quad \{8\}$$

Die Dynamik des geschlossenen Regelkreises kann nun dadurch erhöht werden, indem die Veränderungsgröße der Regelabweichung *e* zyklisch ermittelt und verrechnet wird. Dies erfolgt mit einem *D*-Anteil des Reglers, indem die Regelabweichung differenziert und anschließend mit dem Regler-Parameter *T_D* multipliziert wird. In Kombination mit dem *P*-Regler ergibt sich die Übertragungsfunktion des (idealen) *PD*-Reglers zu:

$$G_R(s) = K_p (T_D \cdot s + 1) \quad \{9\}$$

Der geschlossene Regelkreis besitzt dann die Übertragungsfunktion:

$$G_g(s) = \frac{K_p \cdot K_s \cdot T_f \cdot T_D \cdot s^2 + K_p \cdot K_s \cdot (T_D + T_f) \cdot s + K_p \cdot K_s}{T_f \cdot s^3 + s^2 + K_p \cdot K_s \cdot T_D \cdot s + K_p \cdot K_s} \quad \{10\}$$

Daraus lässt sich die charakteristische Gleichung ableiten. Diese ist:

$$T_f \cdot s^3 + s^2 + K_p \cdot K_s \cdot T_D \cdot s + K_p \cdot K_s = 0 \quad \{11\}$$

Nach [5] kann über das Hurwitz-Kriterium asymptotische Stabilität nachgewiesen werden, indem die drei nachfolgenden Hurwitz-Determinanten größer Null sind:

$$D_1 = 1 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & T_f \\ K_p \cdot K_s & K_p \cdot K_s \cdot T_D \end{vmatrix} > 0 \quad \{12\}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & T_f & 0 \\ K_p \cdot K_s & K_p \cdot K_s \cdot T_D & 0 \\ 0 & 1 & K_p \cdot K_s \end{vmatrix} > 0$$

Somit ergibt sich für das vorliegende Modell die Stabilitätsbedingung $T_D > T_f$.

Der (tatsächliche) Maximalwert für *T_D* ergibt sich aus dem realen Modell bzw. aus der Digitalisierung des Sensorsignals und dessen Schwankungen, die durch den *D*-Anteil des Reglers entsprechend verstärkt werden. Des Weiteren ist die Drehgeschwindigkeit des Modellbau-Servomotors begrenzt.

Die nachfolgende Abbildung zeigt beispielsweise das Simulationsverhalten des geschlossenen Regelkreises für einen Sprung in der Sollwertvorgabe *w* von 20 cm.

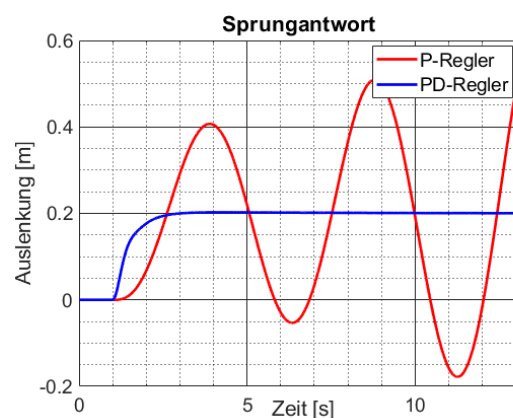


Abb. 5: Sprungantworten des Systems

3. Zusammenfassung und Ausblick

Auch eine Mathenote von 4,0 scheint für manche Schüler kein Hinderungsgrund zu sein, sich für ein technisches Studium zu bewerben. Dies und weitere Faktoren führen zu einer Durchfallquote von ca. 50 % in mathematiklastigen Fächern wie Physik, Mathematik 1 oder Regelungstechnik. Um hier Abhilfe zu schaffen, wurde an der Fakultät eine verpflichtender Mathematik-Grundlagentest und ein fächerübergreifendes Lehr- und Lernprojekt eingeführt: Ein balancierender Ball auf einer schiefen Ebene. Dieses Modell wird in verschiedenen Fächern eingesetzt, so dass für die Studierenden ein roter Faden entsteht, entlang dem das Modell immer weiterentwickelt wird. Es wird Schulstoff wiederholt wie z.B. die trigonometrischen Funktionen oder die kinetische Energie, und mit diesen Grundlagen neuer Stoff erarbeitet wie z.B. das Hurwitz-Kriterium oder Differentialgleichungen.

Noch lässt sich keine Aussage treffen, ob das angestrebte Ziel einer Verringerung der Durchfallquote in den oben genannten Fächern erreicht worden ist, da noch nicht genügend Daten vorliegen.

4. Literatur

- [1] Fries, M. (2002): Abitur und Studienerfolg. Welchen „Wert“ hat das Abitur für ein erfolgreiches Studium? In: Beiträge zur Hochschulforschung, Heft 1, 24. Jahrgang, S.30-51
- [2] Pustelnik, K. (2018): Bedingungsfaktoren für den erfolgreichen Übergang von Schule zu Hochschule. Dissertation, Georg-August-Universität Göttingen:
<http://hdl.handle.net/11858/00-1735-0000-002E-E4BD-C>
- [3] Dewey, J. (1916): Democracy and Education.
https://en.wikisource.org/wiki/Democracy_and_Education
- [4] Lutz, H., Wendt, W. (2014): Taschenbuch der Regelungstechnik; Europa-Lehrmittel; 10. Auflage; ISBN 978-3-8085-5679-5
- [5] Föllinger, O. (2016): Regelungstechnik; VDE Verlag GmbH; 12. Auflage; ISBN 978-3-8007-4201-1